一个特征零函数域上的显式一致莫德尔猜想

Jiawei Yu

2025 年 5 月 2 日

目录

1 介绍

令 C 是在 $\mathbb{Q}$ 上的亏格为 $g>1$ 的几何连通光滑射影曲线。Mordell[Mor22] 猜测 $C(\mathbb{Q})$ 是有限的。这个猜想由 Faltings[Fal83] 证明，其中 $\mathbb{Q}$ 被任意数域替换。在 Faltings 的证明之前，Manin[Man64] 和 Grauert[Gra65] 分别独立证明了复函数域上曲线的这一猜想的类似结论。Vojta[Voj89b, Voj91] 在两种情况下用丢番图逼近给出了另一种证明方法。基于 Vojta 的证明，Dimitrov-Gao-Habegger[DGH21] 和 Kühne[Kü21] 证明了以下统一定理（参见 [Gao21, Theorem 1.1]）。

定理 1.1 (迪米特罗夫-高-哈贝格+库恩). 对于任意整数 $g>1$，存在一个常数 $c(g)$ 具有以下性质。令 K 是特征为 0 的域，C/K 是一个几何连通的光滑射影曲线，其亏格为 g，J 是 C/K 的雅可比簇，并且 $P_0\in C(K)$ 是一个有理点。然后对于任何有限秩 ρ 的子群 $\Gamma\subseteq J(K)$，

$$\sharp(i_{P_0}(C(K))\cap\Gamma)\le c(g)^{\rho+1}.$$

这里 i_{P_0} 是 Abel-Jacobi 映射

$$i_{P_0}: C \longrightarrow J, \quad P \longmapsto P - P_0.$$

Γ 的秩是 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ 的维度。注意，Γ 不必为有限生成的。在这篇文章中，我们在非等变情况下明确确定了常数 $c(g)$。我们的主要定理如下。

定理 1.2. 令 K 是特征为 0 的域，C/K 是一个几何连通的光滑射影曲线，其亏格为 $g > 1$，J 是 C/K 的雅可比簇，并且 α 是定义在 C 上的一个次数为 1 的线丛。如果 C 在 $\mathbb{Q}$ 上是非等变的，则对于任何有限秩 ρ 的子群 $\Gamma \subseteq J(K)$，

$$\sharp(i_\alpha(C(K)) \cap \Gamma) \leq (16g^2 + 32g + 184)(20g)^\rho.$$

特别是，如果 $J(K)$ 是有限秩 ρ，则

$$\sharp C(K) \leq (16g^2 + 32g + 184)(20g)^\rho.$$

一条曲线 C 在 $\mathbb{Q}$ 上是非等曲率的，如果它不与从 $\bar{\mathbb{Q}}$ 到 $\bar{K}$ 的基变换同构。我们记作

$$i_\alpha: C \longrightarrow J, \quad P \longmapsto P - \alpha.$$

然后 $i_{P_0} = i_{\mathcal{O}(P_0)}$ 是一个特殊情况。在我们的证明中，存在一个自然的 α，它不必是 C 中的一个点。

我们将主要定理简化为以下定理。

定理 1.3. 令 k 是一个特征为 0 的代数闭域，K 是光滑射影连通曲线 B/k 的函数域，C/K 是非等变的光滑射影几何连通曲线，在 k 上且亏格为 $g > 1$，J 是 C/K 的雅可比簇，α 是在 C 上度数为 1 的线丛。然后对于任意秩为 ρ 的子群 $\Gamma \subseteq J(\bar{K})$，

$$\sharp(i_\alpha(C(\bar{K})) \cap \Gamma) \leq (16g^2 + 32g + 184)(20g)^\rho.$$

特别是，如果 J 的 K/k-迹是平凡的，则

$$\sharp C(K) \leq (16g^2 + 32g + 184)(20g)^{\rho_{LN}}.$$

这里 *Lang-Néron* 秩 ρ_{LN} 是 $J(K)$ 的秩。

一个阿贝尔簇 A/K 的 K/k-迹 $(\mathrm{tr}_{K/k}(J), \mathrm{tr})$ 是由一个阿贝尔簇 B/k 和一个态射 $f: B_K \to A$ 组成的对 (B, f) 类别中的终对象。如果 k 在 K 中代

数闭合，则 K/k-迹存在且 $J(K)/\mathrm{tr}_{K/k}(J)(k)$ 是有限生成的（参见 [Con06, Theorem 2.1 and 6.2]）。特别是，我们关于平凡迹的假设意味着 ρ_{NL} 是有限的。

对于曲线 B, 我们有一个 Weil 高度在 $C(\bar{K})$ 上。有理点根据高度分为两部分并分别计数。请注意，我们将点按照在 [Zha95] 中介绍的 C 的可容许配对进行划分，而不是通常使用的 Faltings 高度（参见 [Gao21]）。Yuan[Yua23] 表明在函数域情况下这两个量相互有界。

我们修改了 Vojta 对 Mordell 猜想的证明，以计算具有大高度的点的数量。Vojta 使用 Grothendieck-Riemann-Roch 定理构造了一个有效的除子。然后他给出了关于其指标的一个丢番图逼近不等式，从而得出一个无效的高度上界。给出明确不等式的障碍在于 Weil 高度只能在有界的函数范围内确定。Zhang[Zha93] 引入了阿德利克线丛，与其相关的高度是规范高度。我们使用它来细化 Vojta 的估计，并均匀地限制具有大高度的点的数量。我们也使用 Siu 的定理 [Siu93] 来避免处理更高的上同调群并简化除子的构造。

另一方面，Bogomolov 的一个猜想指出在 $C(\bar{K})$ 中只有有限多个小高度点。Ullmo[Ull98] 用 Szpiro-Ullmo-Zhang 的等分布定理 [SUZ97] 证明了它。Zhang[Zha95] 表明可允许配对的严格正性蕴含 Bogomolov 猜想。基于此，Looper-Silverman-Wilms[LSW21] 给出了关于函数域上的 Bogomolov 猜想的一个定量统一结果，并且 Yuan[Yua23] 独立证明了全局域上的统一 Bogomolov 猜想。我们结合 Looper-Silverman-Wilms 的定理和修改后的 Vojta 不等式来推导我们的主要定理。

在整个文章中，设 $\mathcal{C}$ 为 C 在 B 上的极小正则模型。由于用有限扩张替换 K 不会改变定理 1.3 的第一个结论，我们可以假设 C 具有分裂半稳定约化。对偶层 $\bar{\omega} = \omega_{\mathcal{C}/B}$ 是一个在线束上 $\mathcal{C}$ 的线丛。令 $X = C \times_K C$ 为乘积，$p_1, p_2 : X \to C$ 为投影，$\Delta \subseteq X$ 为对角线。

我们感谢 Xinyi Yuan 的重要建议和耐心帮助。我们感谢 Zheng Xiao 和 Chunhui Liu 教授作者丢番图逼近。我们感谢 Yinchong Song 审阅本文的草稿。我们感谢 Joseph Silverman 和 Robert Wilms 提供的有益评论。我们感谢 Ziyang Gao 的有益讨论。我们感谢匿名评审人提出的建设性建议。

2 高度之差

在本节中，我们回顾了在 [Zha93] 中引入的阿德利克线丛和在 [Zha95] 中的可容许度量。对于可容许度量的详细处理，请参阅 [Yua23, Appendix]。然后我们将与 $\bar{\omega}$ 相关的高度与规范高度进行比较。

对于 $v \in B$，设 K_v 为局部域且 $\mathcal{O}_{K_v}$ 为其估值环。我们为了简单起见取 $|\varpi_v| = e^{-1}$。这里 ϖ_v 是 K_v 的单位元。对于射影簇 Z/K 和 Z 上的线丛 L，$(Z, L^{\otimes n})$ 在 $\mathcal{O}_{K_v}$ 上的模型 $(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ 诱导 L_{K_v} 上的度量 $\|\cdot\|$，如下所示：对于 $z \in Z(\bar{K}_v)$，它扩展到

$$\bar{z} : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}_v}) \longrightarrow \mathcal{Z}.$$

对于 $\ell \in z^*L$，定义

$$\|\ell\| = \inf_{a \in \bar{K}_v} \{|a| : \ell^n \in a^n \bar{z}^* \mathcal{L}\}.$$

L_{K_v} 上的度量 $\|\cdot\|'$ 是连续且有界的，如果对于某个由模型诱导的度量 $\|\cdot\|$，$\|\cdot\|'/\|\cdot\|$ 是连续且有界的。一个*典范度量*在 L 上是集合 $\{\|\cdot\|_v\}$ 的连续且有界度量 $\|\cdot\|_v$ 集合在 L_{K_v} 上，对于所有 $v \in B$，使得 $\|\cdot\|_v$ 由模型 (Z, L) 在开子簇 $U \subseteq B$ 上诱导出，对于所有 $v \in U$。一个*阿德勒线丛*是一对 $\bar{L} = (L, \{\|\cdot\|_v\})$，由一个线丛 L 和一个在 L 上的阿代尔度量 $\{\|\cdot\|_v\}$ 组成。

我们说，在 L 上的一个 adel 距离 $\{\|\cdot\|_v\}$ 是 adel 距离序列 $\{\|\cdot\|_{n,v}\}(n = 1, 2, \dots)$ 的极限，如果 $\|\cdot\|_{n,v}$ 独立于 n 对于 v 在 B 的一些开子簇上，并且 $\|\cdot\|_{n,v}/\|\cdot\|_v$ 在每个 $v \in B$ 上的 $X(\bar{K}_v)$ 处一致收敛。模型 $(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ 在 $(Z, L^{\otimes n})$ 上相对于 B 是相对伪有效如果在 $\mathcal{Z}$ 的特殊纤维上 $\mathcal{L}$ 是伪有效的。一个阿德 elic 度量 $\{\|\cdot\|_v\}$ 是相对伪有效的，如果它是由在 B 上的相对伪有效模型诱导的一系列阿德 elic 度量的极限。一个 adel 线丛是*可积的*，如果它是两个相对 nef 的 adel 线丛的张量商。记 $\widehat{\mathrm{Pic}}(Z)_{\mathrm{int}}$ 为在 Z 上可积 adel 线丛的等距类群。

如果 $Z = \mathrm{Spec}(K)$，则 $\bar{L} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(Z)_{\mathrm{int}}$ 的*度*定义为

$$\widehat{\deg}(\bar{L}) = \sum_{v \in B} -\log \|s\|_v,$$

其中 s 是 L 的任意非零截面。如果 $d = \dim Z$，则存在一个*德利涅配对*

$$\widehat{\mathrm{Pic}}(Z)_{\mathrm{int}}^{d+1} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Pic}}(K)_{\mathrm{int}}, \quad (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1}) \longmapsto \pi_* \langle \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1} \rangle$$

关于结构态射 $\pi : Z \to \mathrm{Spec}(K)$（参见 [YZ23]）。$d+1$ 线丛的交数是它们 Deligne 配对的次数。与 $\bar{L}$ 相关的高度是

$$h_{\bar{L}} : Z(\bar{K}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \longmapsto \frac{\widehat{\deg}(z^*\bar{L})}{\deg(z)}.$$

这里 $\deg(z)$ 是残类域 z 关于 K 的次数。

阿代尔线丛 $\bar{L} = (L, \{\|\cdot\|_v\})$ 在 Z 上的有效部分的空间 $\hat{H}^0(\bar{L})$ 由 L 的截面 s 构成，满足对所有 v 均有

$$\sup \|s\|_v \leq 1$$

。当从某个射影模型上的 $\mathcal{L}$ 诱导出 $\bar{L}$ 时，$\hat{H}^0(\bar{L}) = H^0(\mathcal{L})$。$\bar{L}$ 的体积是

$$\mathrm{vol}(\bar{L}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \dim_k \hat{H}^0(\bar{L})$$

对于 $d = \dim(Z)$。极限总是存在。如果 $\mathrm{vol}(\bar{L}) > 0$，则我们说 $\bar{L}$ 是大的。对于 nef 的阿代尔线丛 $\bar{L}_1$ 和 $\bar{L}_2$，存在 Siu 不等式

$$\mathrm{vol}(\bar{L}_1 - \bar{L}_2) \geq \bar{L}_1^{d+1} - (d+1)\bar{L}_1^d \bar{L}_2.$$

选择一个次数为 1 的线丛 α_0 满足 $(2g-2)\alpha_0 = \omega_{C/K}$ 在 C 上。设 θ 为

$$C^{g-1} \longrightarrow J, \quad (x_1, \ldots, x_{g-1}) \longmapsto i_{\alpha_0}(x_1) + \cdots + i_{\alpha_0}(x_{g-1}).$$

的像。它是在 J 上的一个除子。线丛 $\Theta = \mathcal{O}(\theta) + [-1]^*\mathcal{O}(\theta)$ 是对称的。张 [Zha93] 应用 Tate 的极限论证来构造一个可积的阿代尔度量在 Θ 上。记阿代尔线丛为 $\bar{\Theta}$。规范高度被定义为相关高度

$$\hat{h} = h_{\bar{\Theta}} : J(\bar{K}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

它是正的，并且 $|\cdot| = \hat{h}(\cdot)^{1/2}$ 可以扩展成一个范数

$$J(\bar{K})_{\mathbb{R}} = J(\bar{K}) \otimes \mathbb{R}$$

满足平行四边形定律。记对应内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Theta$。滥用语言，我们将 $\hat{h}(i_{\alpha_0}(x))$ 写作 $\hat{h}(x)$。

对于 $v \in B$，令 Γ_v 为特殊纤维 $\mathcal{C}_v$ 的约化图，即，Γ_v 的顶点和边分别表示 $\mathcal{C}_v$ 的分支和节点，并且每条边的长度为 1。用 $F(\Gamma_v)$ 表示在 Γ_v 上连续且分段光滑的函数空间。对于 $f \in F(\Gamma_v)$，拉普拉斯算子给出一个测度

$$\Delta f = -f''(x)dx - \sum d_{\vec{v}} f(P)\delta_P.$$

这里 x 表示每条边上的规范坐标。求和是在 $P \in \Gamma_v$ 上进行的，以及在 P 处的切向方向 $\overrightarrow{v}$，并且 δ_P 是支持在 P 的 Dirac 度量。

对于每个概率测度 μ，存在一个唯一的对称函数 $g_\mu : \Gamma_v^2 \to \mathbb{R}$，称为与 μ 相关的格林函数，满足

$$\begin{gathered} g_\mu(x, \cdot) \in F(\Gamma), \\ \Delta g_\mu(x, \cdot) = \delta_x - \mu, \\ \int_{\Gamma_v} g_\mu(x, \cdot)\mu = 0. \end{gathered}$$

从定义可以直接看出

$$g_\mu(x, x) = \sup_{y \in \Gamma_v} g_\mu(x, y) \geq 0.$$

典范除子 K_{Γ_v} 的 Γ_v 是一个形式线性组合

$$K_{\Gamma_v} = \sum \deg(\bar{\omega}|_{F_\xi})\xi.$$

求和是对所有顶点 ξ 进行的，而 F_ξ 是由 ξ 表示的 $\mathcal{C}_v$ 的分量。存在唯一的概率测度 μ 满足 $g_\mu(K_{\Gamma_v}, x) + g_\mu(x, x)$ 是与 x 无关的常数。将该测度记为 μ_v，格林函数记为 g_v。借助收缩映射 $C(\bar{K_v}) \to \Gamma_v$（参见 [Ber90, Chapter 4]），我们可以将 g_v 视为定义在 $C(\bar{K_v})^2$ 上的函数。

模型 $(\mathcal{C}, \bar{\omega})$ 引入了一个阿德利克度量 $\{\|\cdot\|_{\mathrm{Ar},v}\}$ 到 $\omega_{C/K}$ 上。标准容许度量 $\{\|\cdot\|_{a,v}\}$ 由

$$\|\cdot\|_{a,v}(x) = \|\cdot\|_{\mathrm{Ar},v}(x) \cdot e^{g_v(x,x)}, \quad x \in C_{K_v}^{\mathrm{an}}.$$

定义的 $\omega_{C/K}$ 是一个可积的阿德利克度量。记 ω_a 为典范可容许阿代尔线丛。自交数 ω_a^2 非负。

类似地，存在一个由

$$\mathcal{O}(\Delta)_a = (\mathcal{O}(\Delta), \{\|\cdot\|_{\Delta,v}\}) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)_{\mathrm{int}}$$

确定的可积典范容许阿德利克线丛

$$\|\cdot\|_{\Delta,a}(x, y) = e^{-i_v(x,y) - g_v(x,y)}, \quad x, y \in C(\bar{K_v}), \, x \neq y.$$

这里，$i_v(x, y)$ 是稳定的交点数，即如果对于某个有限扩张 $x, y \in C(K'_w)$，K'_w/K_v，它们在基域 $\mathcal{O}_{K'_w}$ 上的极小正则模型 $\mathcal{C}'$ 中的闭包分别为 $\bar{x}, \bar{y}$，则

$$i_v(x, y) = \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})}{[K'_w : K_v]}.$$

以下命题给出了我们所需的差异。注意全局稳定交点数

$$i(P_1,P_2)=\sum_{v\in B} i_v(P_1,P_2)\log(e)=\frac{(\bar{P}_1\cdot\bar{P}_2)}{[K':K]}$$

可以被视为与线丛 $\mathcal{O}(\Delta)$ 在点 $P=(P_1,P_2)\in(X\backslash\Delta)(\bar{K})$ 处相关联的韦伊高度函数。因此，我们可以将第二个等式视为 Vojta 证明中 Mumford 的等式。

命题 2.1. *(1)* 对于 $P_0\in C(\bar{K})$，

$$h_{\bar{\omega}}(P_0)=\frac{g-1}{g}\hat{h}(P_0)+\sum_{v\in B} g_v(P_0,P_0)+\frac{\omega_a^2}{4g(g-1)}.$$

(2) 对于 $P_1,P_2\in C(\bar{K})$，如果 $P_1\neq P_2$，则

$$i(P_1,P_2)=\frac{\hat{h}(P_1)}{2g}+\frac{\hat{h}(P_2)}{2g}-\langle P_1,P_2\rangle_\Theta-\sum_{v\in B} g_v(P_1,P_2)-\frac{\omega_a^2}{4g(g-1)}.$$

证明. (1) 考虑态射

$$i_\omega: C\longrightarrow J,\quad x\longmapsto(2g-2)x-\omega_{C/K}.$$

由 [Yua23, Theorem 2.10(1)]，

$$i_\omega^*\bar{\Theta}=4g(g-1)\omega_a-\pi^*\pi_*\langle\omega_a,\omega_a\rangle$$

在 $\widehat{\mathrm{Pic}}(C)\otimes\mathbb{Q}$ 中。这里 $\pi_*\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是结构态射 $\pi: C\to\mathrm{Spec}(K)$. 的德利涅配对由于 $i_\omega=[2g-2]\circ i_{\alpha_0}$，我们有

$$(2g-2)^2\hat{h}(P_0)=4g(g-1)h_{\omega_a}(P_0)-\omega_a^2.$$

因此，

$$\begin{aligned}h_{\bar{\omega}}(P_0)&=\sum_{v\in B} g_v(P_0,P_0)+h_{\omega_a}(P_0)\\&=\sum_{v\in B} g_v(P_0,P_0)+\frac{g-1}{g}\hat{h}(P_0)+\frac{\omega_a^2}{4g(g-1)}.\end{aligned}$$

(2) 考虑形态映射

$$j: X\longrightarrow J,\quad (x,y)\longmapsto y-x.$$

由 [Yua23, Theorem 2.10(2)]，

$$j^*\bar{\Theta} = 2\mathcal{O}(\Delta)_a + p_1^*\omega_a + p_2^*\omega_a$$

在 $\widehat{\mathrm{Pic}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ 中。因此

$$\hat{h}(P_2 - P_1) = 2h_{\mathcal{O}(\Delta)_a}(P_1, P_2) + h_{\omega_a}(P_1) + h_{\omega_a}(P_2).$$

我们得到

$$\begin{aligned} i(P_1, P_2) =& h_{\mathcal{O}(\Delta)_a}(P_1, P_2) - \sum_{v \in B} g_v(P_1, P_2) \\ =& \sum_{i=1,2} \frac{\hat{h}(P_i) - h_{\omega_a}(P_i)}{2} - \langle P_1, P_2 \rangle_\Theta - \sum_{v \in B} g_v(P_1, P_2) \\ =& \frac{\hat{h}(P_1)}{2g} + \frac{\hat{h}(P_2)}{2g} - \frac{\omega_a^2}{4g(g-1)} - \langle P_1, P_2 \rangle_\Theta - \sum_{v \in B} g_v(P_1, P_2). \end{aligned}$$

□

用 $\delta(\Gamma_v)$ 表示 Γ_v 的总长度。张 [Zha10] 引入了 φ 不变量作为

$$\varphi(\Gamma_v) = -\frac{1}{4}\delta(\Gamma_v) + \frac{1}{4}\int_{\Gamma_v} g_v(x, x)((10g + 2)\mu_v - \delta_{K_{\Gamma_v}}).$$

他还在此文献中证明了

$$\omega_a^2 \geq \frac{2g - 2}{2g + 1} \sum_{v \in B} \varphi(\Gamma_v).$$

由 [LSW21, Lemma 2.2] 和 [BR07, Proposition 13.7]，我们有

$$|g_v(x, y)| \leq \frac{15}{4}\varphi(\Gamma_v).$$

因此，

$$|\sum_{v \in B} g_v(x, y)| \leq \frac{30g + 15}{8g - 8}\omega_a^2$$

由此，我们得到以下推论。

推论 2.2. *(1)* 对于 $P_0 \in C(\bar{K})$，

$$0 \leq h_{\bar{\omega}}(P_0) - \frac{g-1}{g}\hat{h}(P_0) \leq \frac{19}{2}\omega_a^2.$$

(2) 对于 $P_1, P_2 \in C(\bar{K})$，如果 $P_1 \neq P_2$，则

$$-\frac{19}{2}\omega_a^2 \leq i(P_1, P_2) - \frac{\hat{h}(P_1)}{2g} - \frac{\hat{h}(P_2)}{2g} + \langle P_1, P_2 \rangle_\Theta \leq \frac{37}{4}\omega_a^2.$$

3 沃伊塔不等式

在本节中，我们修改 Vojta 的证明 [Voj89b] 以给出一个统一不等式。以下是本节的主要定理。

定理 3.1. 对于 $P_1, P_2 \in C(\bar{K})$，如果

$$|P_2| \geq 20g|P_1|$$

和

$$|P_1| \geq 200\sqrt{g\omega_a^2},$$

则

$$\frac{\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{|P_1||P_2|} \leq \frac{4}{5}.$$

令 $\bar{M}$ 为从 B 拉回至 X 的一个阿代尔线丛，其度数为 1。考虑阿代尔线丛

$$\bar{L} = d_1 p_1^*\omega_a + d_2 p_2^*\omega_a + d((2g-2)\mathcal{O}(\Delta)_a - p_1^*\omega_a - p_2^*\omega_a) + c\bar{M},$$

其中 d_1, d_2, d, c 为待定的正整数。

引理 3.2. 如果 $d_1 \geq gd$，$d \geq d_2$ 和 $2(d_1d_2 - gd^2)c > (g+1)d_1d^2\omega_a^2$，那么 L 很大。

证明. 取

$$\bar{L}_1 = (d_1 - d)p_1^*\omega_a + d(g-1)p_2^*\omega_a + d(2g-2)\mathcal{O}(\Delta)_a + c\bar{M},$$

$$\bar{L}_2 = (gd - d_2)p_2^*\omega_a.$$

通过 [Yua23, Theorem 2.10(2)]，

$$p_1^*\omega_a + p_2^*\omega_a + 2\mathcal{O}(\Delta)_a$$

是数值有效的。所以 $\bar{L}_1$ 和 $\bar{L}_2$ 都是数值有效的。由 Siu 的不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(\bar{L})\\
\geq&\bar{L}_1^3-3\bar{L}_1^2\bar{L}_2\\
=&6(2g-2)^2(d_1d_2-gd^2)c+d^3(2g-2)^2\left((2g+1)\omega_a^2-(2g-2)\sum_{v\in B}\phi(\Gamma_v)\right)+\\
&3(2g-2)(d_1^2d_2-(g^2+2g-1)d_1d^2+2gd^3+(2g-2)d_1dd_2-(2g-1)d^2d_2)\omega_a^2\\
\geq&6(2g-2)^2(d_1d_2-gd^2)c-3(2g-2)(g^2+g)d_1d^2\omega_a^2\\
>&0.
\end{aligned}$$

在这里我们使用证明中的交数 [Yua23, Theorem 3.6] □

对于 $P_i\in C(K)(i=1,2)$，我们有 $P=(P_1,P_2)\in X(K)$ 以及 $\bar{P}_i\subset\mathcal{C}$、$\bar{P}\subset\mathcal{X}$ 节的 B。选择局部坐标 x_i 在 C 上的 P_i。然后对于任何有效除子 $D\in\mathrm{Div}(X)$，D 在 P 处由一个形式幂级数定义

$$\sum_{i_1,i_2\geq 0}a_{i_1,i_2}x_1^{i_1}x_2^{i_2}.$$

回忆一下，索引在 D 的 P 处关于一对正数 (e_1,e_2) 是

$$\mathrm{ind}(D,P,e_1,e_2)=\min\{\frac{i_1}{e_1}+\frac{i_2}{e_2}:a_{i_1,i_2}\neq 0\}.$$

它独立于 x_1,x_2 的选择。

定理 *3.1* 的证明。. 定理在用有限扩域替换 K 后保持不变。我们可以假设 $P_1,P_2\in C(K)$。取

$$d_1=\lceil\sqrt{g+\frac{1}{400}\frac{|P_2|}{|P_1|}}d\rceil,$$

$$d_2=\lceil\sqrt{g+\frac{1}{400}\frac{|P_1|}{|P_2|}}d\rceil,$$

$$c=\lceil 200(g+1)d_1\omega_a^2\rceil,$$

其中 $\lceil\cdot\rceil$ 是天花板函数，即 $\lceil x\rceil$ 是不小于 x 的最小整数。对于足够大的 d，$\bar{L}$ 很大。存在一个正整数 n 使得 $n\bar{L}$ 有一个有效的截面 s。

令 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$ 的正规点集。对于 $v \in B$，存在一个自然的一一对应 $(\mathcal{C} \times_B \mathcal{C})(\mathcal{O}_{\bar{K}_v}) = X(\bar{K}_v)$。记 $X(\bar{K}_v)^\circ$ 为与 $\mathcal{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}_v})$ 对应的 $X(\bar{K}_v)$ 的子集。它是一个解析域的 $X(\bar{K}_v)$。令 $\bar{\Delta}$ 为 Δ 在 $\mathcal{X}$ 中的闭包，并且

$$\mathcal{L} = d_1 p_1^* \bar{\omega} + d_2 p_2^* \bar{\omega} - d((2g-2)\mathcal{O}(\bar{\Delta}) - p_1^* \bar{\omega} - p_2^* \bar{\omega}) + cM \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}).$$

然后 $\mathcal{L}_K = L$。对于 $v \in B$，$\mathcal{L}$ 在 $X(\bar{K}_v)^\circ$ 上诱导了 L 的一个度量 $\|\cdot\|_{\mathcal{L},v}$，就像射影情形一样。设

$$m_v = -\log(\sup_{x \in X(\bar{K}_v)^\circ} \|s(x)\|_{n\mathcal{L},v}).$$

视 s 为 $n\mathcal{L}$ 的有理截面。那么 m_v 是 $\mathrm{div}(s)$ 在 v 上垂直部分的最小重数。所以

$$D = \mathrm{div}(s) - \sum_{v \in B} m_v [\mathcal{X}_v]$$

是 $\mathcal{X}$ 上的一个有效除子。这里 $\mathcal{X}_v$ 是 $\mathcal{X} \to B$ 的纤维。表示

$$\mathcal{L}' = n\mathcal{L} - \sum_{v \in B} m_v \mathcal{O}([\mathcal{X}_v]).$$

由于 s 是 $\bar{L}$ 的有效部分，

$$m_v \geq -\log(\sup \|s\|_{n\bar{L},v}) - n(d_1 + d_2 + 2gd) \sup |g_v| \geq -2nd_1 \sup |g_v|.$$

所以

$$\sum_{v \in B} m_v \geq -20nd_1\omega_a^2 \geq -nc.$$

由 [Voj89b, Lemma 4.1] 可知，存在一个有限扩张 B' 为 B 的函数域 K'，以及一个在 B' 上的正则曲面 $\mathcal{C}_i'$ 满足 $i = 1, 2$。

(1) 存在一个态射 $\mathcal{C}_i' \to \mathcal{C} \times_B B'$；

(2) 其在一般纤维 $C_i' \to C \times_K K'$ 上的限制次数为 $2d_{3-i}$ 并且在外于 P_i 处无分歧；

(3) 有两个点 C_i' 在 P_i 上，都定义在 K' 上，并且分歧指数为 d_{3-i}。

令 $\mathcal{X}'$ 为 $\mathcal{C}_1' \times_{B'} \mathcal{C}_2'$ 的正则点集。然后存在一个态射

$$f : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X} \times_B B'$$

扩展$C_1\times_{K'}C_2\to X\times_K K'$。任意选择位于$P$上的$P'=(P_1',P_2')\in C_1'\times_{K'}C_2'$。$\bar{P}'$的闭包在$\mathcal{X}'$中是$P'$的恰当闭包。余法线层$\mathcal{N}^\vee_{\bar{P}'/\mathcal{X}'}$是直和

$$\mathcal{N}^\vee_{\bar{P}'/\mathcal{X}'}=\mathcal{N}^\vee_{\bar{P}_1'/\mathcal{C}_1'}\oplus\mathcal{N}^\vee_{\bar{P}_2'/\mathcal{C}_2'}.$$

由 [Voj89a, Lemma 3.2]，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ind}(D,P,(2g-2)nd_1,(2g-2)nd_2)\\
=&\operatorname{ind}(f^*D,P',(2g-2)nd_1d_2,(2g-2)nd_1d_2)\\
=&\frac{\operatorname{ind}(f^*D,P',1,1)}{(2g-2)nd_1d_2}.
\end{aligned}$$

与 [Voj89b, Lemma 4.2.2] 一起，我们有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ind}(D,P,(2g-2)nd_1,(2g-2)nd_2)\\
\geq&\frac{1}{(2g-2)nd_1d_2}\frac{-2\deg(f^*\mathcal{L}'|_{\bar{P}'})}{\deg(\omega_{\mathcal{C}_1'/B'}|_{\bar{P}_1'})+\deg(\omega_{\mathcal{C}_2'/B'}|_{\bar{P}_2'})}\\
=&\frac{1}{(g-1)n}\frac{-\deg(\mathcal{L}'|_{\bar{P}})}{d_1\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_1})+d_2\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_2})}\\
\geq&\frac{1}{g-1}\frac{-\deg(\mathcal{L}|_{\bar{P}})-c}{d_1\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_1})+d_2\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_2})}\\
=&-\frac{1}{g-1}+\frac{1}{g-1}\frac{d(\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_1})+\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_2})-(2g-2)\deg(\mathcal{O}(\tilde{\Delta})|_{\bar{P}}))-2c}{d_1\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_1})+d_2\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_2})}.
\end{aligned}$$

由推论 2.2，

$$\frac{g-1}{g}|P_i|^2\leq\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_i})\leq\frac{g-1}{g}|P_i|^2+\frac{19}{2}\omega_a^2\leq\frac{100}{99}\frac{g-1}{g}|P_i|^2.$$

注意$\deg(\mathcal{O}(\tilde{\Delta})|_{\bar{P}})=i(P_1,P_2)$。再次由推论 2.2，

$$\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_1})+\deg(\bar{\omega}|_{\bar{P}_2})-(2g-2)\deg(\mathcal{O}(\tilde{\Delta})|_{\bar{P}})\geq(2g-2)(\langle P_1,P_2\rangle_\Theta-\frac{19}{2}\omega_a^2).$$

我们可以假设 $\langle P_1, P_2\rangle_\Theta \geq 0$。那么

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{ind}(D, P, (2g-2)nd_1, (2g-2)nd_2)\\
\geq& -\frac{1}{g-1} + \frac{1}{g-1}\frac{(2g-2)d\langle P_1, P_2\rangle_\Theta - (19g-19)d\omega_a^2 - 2c}{d_1 \deg(\bar\omega|_{\bar P_1}) + d_2 \deg(\bar\omega|_{\bar P_2})}\\
\geq& -\frac{1}{g-1} + \frac{0.99g}{g-1}\frac{2d\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{d_1|P_1|^2 + d_2|P_2|^2} - \frac{g}{(g-1)^2}\frac{(19g-19)d\omega_a^2 + 2c}{d_1|P_1|^2 + d_2|P_2|^2}\\
\geq& -\frac{1.01}{g-1} + \frac{0.99g}{g-1}\frac{2d\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{d_1|P_1|^2 + d_2|P_2|^2} - \frac{g}{(g-1)^2}\frac{2c}{d_1|P_1|^2 + d_2|P_2|^2}.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{d\to\infty} \operatorname{ind}(D, P, (2g-2)nd_1, (2g-2)nd_2)\\
\geq& -\frac{1.01}{g-1} + \frac{0.99g}{(g-1)\sqrt{g+\frac{1}{400}}}\frac{\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{|P_1||P_2|} - \frac{g}{(g-1)^2}\frac{200(g+1)\omega_a^2}{|P_1|^2}\\
\geq& -\frac{1.03}{g-1} + \frac{0.98g}{(g-1)\sqrt{g}}\frac{\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{|P_1||P_2|}.
\end{aligned}
$$

通过 Dyson 引理（参见 [Voj89a]），

$$
V(\operatorname{ind}(D, P, (2g-2)nd_1, (2g-2)nd_2)) \leq \frac{d_1d_2 - gd^2}{d_1d_2} + (2g-1)\frac{d_2}{2d_1}.
$$

这里

$$
V(t) = \int_{x,y\in[0,1],x+y\leq t} dxdy.
$$

取极限我们有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{d\to\infty} V(\operatorname{ind}(D, P, (2g-2)nd_1, (2g-2)nd_2))\\
\leq& \frac{1}{400g+1} + (2g-1)\frac{|P_1|^2}{2|P_2|^2}\\
\leq& \frac{1}{200g}
\end{aligned}
$$

由 V 的单调性，我们有

$$
\liminf_{d\to\infty} \operatorname{ind}(D, P, (2g-2)nd_1, (2g-2)nd_2) \leq \frac{1}{10\sqrt{g}}.
$$

结合指标上的两个不等式我们有

$$
-\frac{1.03}{g-1} + \frac{0.98g}{(g-1)\sqrt{g}}\frac{\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{|P_1||P_2|} \leq \frac{1}{10\sqrt{g}}.
$$

因此，
$$\frac{\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{|P_1||P_2|} \leq \frac{100}{98}(\frac{g-1}{10g} + \frac{1.03}{\sqrt{g}}) \leq \frac{4}{5}.$$
□

4 主定理的证明

本节我们将完成定理 1.2 和定理 1.3 的证明。

定理的证明 1.2. 由于 Γ 是有限秩的，存在一个由有限生成的子群 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 满足
$$\Gamma_0 \otimes \mathbb{Q} = \Gamma \otimes \mathbb{Q}.$$
然后我们可以找到一个由有限生成的扩张 $K/\mathbb{Q}$，使得 C 和 Γ_0 在 K 上有定义。对于任意的 $P \in \Gamma$，存在 $Q \in \Gamma_0$ 和一个整数 n，使得 $nP = Q$。态射 $[n] : J \mapsto J$ 是有限的。因此 $P \in J(\bar{K})$。

记 M_g 为在 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上的 genus$g$ 曲线的粗模量方案。令
$$\iota : \mathrm{Spec}(\bar{K}) \longrightarrow M_g$$
为对应于 $C_{\bar{K}}$ 的 $\bar{K}$ 点。由于 C 在 $\mathbb{Q}$ 上是非等变的，x 不通过 $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}})$ 因子。注意，
$$\cap k = \bar{\mathbb{Q}},$$
其中交集是在所有代数闭子域 $k \subseteq \bar{K}$ 上进行的，这些子域满足 $\bar{K}/k$，其超越次数为 1。存在一个 k 使得 ι 不通过 $\mathrm{Spec}(k)$ 因式分解。用 Kk 替换 K。然后 K/k 是有限生成的超越次数为 1，因此是光滑射影连通曲线 B/k 的函数域。定理 1.2 由定理 1.3 推出。 □

我们需要以下命题来在定理的证明中计算具有较大高度的点数量。1.3

命题 4.1. 令 $P_1, P_2 \in C(\bar{K})$ 为两个不同的点。如果
$$|P_2| \geq |P_1| \geq \left(5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{\omega_a^2}$$
和
$$\frac{\langle P_1, P_2\rangle_\Theta}{|P_1||P_2|} \geq \frac{4}{5},$$
则
$$\frac{|P_2|}{|P_1|} \geq \frac{9g}{10}.$$

证明. 由于 $P_1 \neq P_2$，根据推论 2.2 我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leq i(P_1, P_2) \\
&\leq \frac{|P_1|^2}{2g} + \frac{|P_2|^2}{2g} - \langle P_1, P_2 \rangle_\Theta + \frac{37}{4}\omega_a^2 \\
&\leq \frac{|P_1|^2}{2g} + \frac{|P_2|^2}{2g} - \frac{4}{5}|P_1||P_2| + \frac{37}{4}\omega_a^2 \\
&\leq \frac{|P_1|^2}{2g} + \frac{|P_2|^2}{2g} - \frac{3}{5}|P_1||P_2|.
\end{aligned}$$

求解它我们得到

$$\frac{|P_2|}{|P_1|} \geq \frac{3g}{5} + \sqrt{\left(\frac{3g}{5}\right)^2 - 1} \geq \frac{9g}{10}.$$

□

定理的证明 1.3. 用 Γ_1 表示由 Γ 和 $\alpha - \alpha_0$ 生成的 $J(\bar{K})$ 的子群。我们有向量空间 $V = \Gamma \otimes \mathbb{R}$ 和 $V_1 = \Gamma_1 \otimes \mathbb{R}$。令

$$W = V + \alpha - \alpha_0$$

为 V 在 V_1 中的陪集。然后

$$\begin{aligned}
\sharp(i_\alpha(C(\bar{K})) \cap \Gamma) =& \sharp\{P \in C(\bar{K}) : P - \alpha \in V\} \\
=& \sharp\{P \in C(\bar{K}) : P - \alpha_0 \in W\}.
\end{aligned}$$

对于任意点 $x \in V_1$ 和正数 r，记 $B(x, r)$ 为以点 x 为中心、半径为 r 的闭球体，在 V_1 中。由 [LSW21] 可知，半径为

$$R_0 = \sqrt{\frac{\omega_a^2}{8(g^2 - 1)}}$$

的球内至多有 $16g^2 + 32g + 124$ 个有理点在 $C(\bar{K})$ 中。设

$$R_1 = \left(5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{\omega_a^2}.$$

我们以归纳的方式用半径为 R_0 的球覆盖 $B(O, R_1) \cap W$。选择任意的 $x_1 \in B(O, R_1) \cap W$。在选择了 $x_1, \ldots, x_t$ 后，如果 $B(O, R_1) \cap W$ 不被 $B(x_1, R_1), \ldots, B(x_t, R_0)$ 覆盖，则选择任意的

$$x_{t+1} \in (B(O, R_1) \cap W) - (\bigcup_{i=1}^{t} B(x_i, R_0)).$$

注意 $B(x_i, R_0/2) \cap W$ 是不相交的并且全部包含在 $B(O, R_1 + R_0/2) \cap W$ 中。由于 W 是一个 ρ 维向量空间的转换。在 W 中计算体积，我们发现 $B(O, R_1) \cap W$ 可以被最多

$$\frac{(R + R_0/2)^\rho}{(R_0/2)^\rho} \le (20g)^\rho$$

个半径为 R_0 的球覆盖。因此，

$$\sharp\{P \in C(\bar{K}) : P - \alpha_0 \in V, |P| \le R_1\} \le (16g^2 + 32g + 124)(20g)^\rho.$$

上述不等式暗示了定理 1.3 在情形 $\rho = 0$ 中的第一个断言。现在假设 $\rho > 0$。对于任意的 $0 \le \phi \le \pi/2$，通过 [Voj89b, Lemma 6.3]，V_1 可以被

$$\frac{2\rho}{\sin(\phi/4)^{\dim(V_1)} \cos(\phi/4)}$$

扇形覆盖，使得同一扇形内的任何两点形成的夹角至多为 ϕ。这里 $\dim(V_1) \le \rho + 1$。令 $\phi = \arccos(4/5)$。然后

$$\frac{2\rho}{\sin(\phi/4)^{\dim(V_1)} \cos(\phi/4)} \le 13^{\rho+1}.$$

由于

$$\frac{200\sqrt{g\omega_a^2}}{R_1} < \left(\frac{9g}{10}\right)^7,$$

根据命题 4.1，对于任意扇形 S，

$$\sharp\{P \in C(\bar{K}) : P - \alpha \in S, R_1 \le |P| \le 200\sqrt{g\omega_a^2}\} \le 7.$$

由定理 3.1，同样我们有

$$\sharp\{P \in C(\bar{K}) : P - \alpha \in S, |P| \ge 200\sqrt{g\omega_a^2}\} \le 7.$$

总之，

$$\begin{aligned}\sharp(C(\bar{K}) \cap \Gamma) \le& (16g^2 + 32g + 124)(20g)^\rho + 14 \cdot 13^{\rho+1} \\ \le& (16g^2 + 32g + 184)(20g)^\rho.\end{aligned}$$

这证明了第一个断言。第二个是特殊情况即 $\Gamma = J(K)$。 $\square$

参考文献

[Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume no. 33. American Mathematical Society, Providence, R.I, 1990.

[BR07] Matt Baker and Robert Rumely. Harmonic analysis on metrized graphs. *Canadian journal of mathematics*, 59(2):225–275, 2007.

[Con06] Brian Conrad. Chow's k/k-image and k/k-trace and the lang-néron theorem. *Enseignement mathématique*, 52(1-2):37, 2006.

[DGH21] Vesselin Dimitrov, Ziyang Gao, and Philipp Habegger. Uniformity in mordell – lang for curves. *Annals of mathematics*, 194(1):237–298, 2021.

[Fal83] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche varietäten über zahlkörpern. *Inventiones mathematicae*, 73(3):349–366, 1983.

[Gao21] Ziyang Gao. Recent developments of the uniform mordell-lang conjecture, 2021. arXiv:2104.03431.

[Gra65] Hans Grauert. Mordell's vermutung über rationale punkte auf algebraischen kurven und funktionenkörper. *Publications mathématiques. Institut des hautes études scientifiques*, 25(1):131–149, 1965.

[Kü21] Lars Kühne. Equidistribution in families of abelian varieties and uniformity, 2021. arXiv:2101.10272.

[LSW21] Nicole Looper, Joseph Silverman, and Robert Wilms. A uniform quantitative manin-mumford theorem for curves over function fields, 2021. arXiv:2101.11593.

[Man64] Yu I. Manin. Rational points on algebraic curves. *Russian mathematical surveys*, 19(6):75–78, 1964.

[Mor22] L.J. Mordell. On the rational solutions of the indeterminate equation of third and fourth degrees. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 21:179–192, 1922.

[Siu93] Yum-Tong Siu. An effective Matsusaka big theorem. *Annales de l'Institut Fourier*, 43(5):1387–1405, 1993.

[SUZ97] L. Szpiro, E. Ullmo, and S. Zhang. Equirépartition des petits points. *Inventiones mathematicae*, 127(2):337–347, 1997.

[Ull98] Emmanuel Ullmo. Positivite et discretion des points algebriques des courbes. *Annals of mathematics*, 147(1):167, 1998.

[Voj89a] Paul Vojta. Dyson's lemma for products of two curves of arbitrary genus. *Inventiones mathematicae*, 98(1):107–113, 1989.

[Voj89b] Paul Vojta. Mordell's conjecture over function fields. *Inventiones mathematicae*, 98(1):115–138, 1989.

[Voj91] Paul Vojta. Siegel's theorem in the compact case. *Annals of mathematics*, 133(3):509–548, 1991.

[Yua23] Xinyi Yuan. Arithmetic bigness and a uniform bogomolov-type result, 2023. arXiv:2108.05625.

[YZ23] Xinyi Yuan and Shou-Wu Zhang. Adelic line bundles on quasi-projective varieties, 2023. arXiv:2105.13587.

[Zha93] Shou-Wu Zhang. Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4, 05 1993.

[Zha95] Shou-Wu Zhang. Admissible pairing on a curve. *Inventiones mathematicae*, 112(1):171–193, 1995.

[Zha10] Shou-Wu Zhang. Gross – schoen cycles and dualising sheaves. *Inventiones mathematicae*, 179(1):1–73, 2010.