

从雷达数据学习生成攀爬飞机的模型

A Preprint

Nick Pepper
The Alan Turing Institute
The British Library
London, UK
npepper@turing.ac.uk

Marc Thomas
NATS
Whitely, Fareham, UK
marc.thomas@nats.co.uk

2025 年 8 月 14 日

Abstract

精确的轨迹预测 (TP) 对于爬升中的飞机受到认识不确定性的影响, 这些不确定性涉及飞机的操作, 可能导致预测轨迹与观察到的轨迹之间出现显著偏差。本文提出了一种针对爬升中飞机的生成模型, 在该模型中, 标准飞机数据基础 (BADA) 模型通过从数据中学习到的推力功能修正得到增强。该方法提供了三个特性: 与 BADA 相比, 到达时间预测误差减少 26.7%; 生成的轨迹在与测试数据对比时更为真实; 以及一种以极低计算成本计算置信区间的方法。

1 介绍

现代空中交通管理 (ATM) 面临着增加空域容量以满足日益增长的航空需求的挑战, 同时确保准确和安全的飞机操作符合气候目标 (1; 2)。在 ATM 中, 轨迹预测 (TP) 在安全管理空域方面发挥着重要作用, 通过预测飞机航迹并检测潜在冲突来为决策提供信息 (3; 4)。然而, 制定确保安全间隔的计划受到了实际观测与预测飞机航迹之间差异的影响。这些差异源于存在显著的知识不确定性, 以及 TP 模型中的误规范。

造成这种认知不确定性的来源包括: 预测风速和风向的不确定性; 未知的飞机速度剖面; 飞机发动机的推力设定; 以及飞机质量 (5)。飞机质量和速度剖面是预测爬升的关键参数, 然而, 这些数量可能具有商业敏感性, 并且不会常规共享与 ATM 相关。当前 TP 方法, 例如广泛使用的飞机数据基础模型 (BADA) (6; 7) 是确定性的。BADA 模型是一个总能量模型, 其条件参数包括飞机质量、速度剖面、风和大气条件以及飞行模式。BADA 模型参数是根据参考飞机性能参数 (6) 标定的。一方面, 这使得该模型能够推广到全球空域。另一方面, 在特定航线上的飞机可能会遵循当地程序或航空公司运营程序, 从而导致行为与全球标定模型期望的行为非常不同 (8)。

下一代 TP 模型的一般要求如图 1 所示: 该模型返回从相关情境数据中学习到的最可能轨迹, 其准确性高于现有确定性模型。此外, 所需的模型返回一个校准良好的置信区间, 这有助于更准确的预测工具和更有效地利用可用空域。

在 TP 文献中, 探索了两种主要策略来增强 TP 模型与数据的结合: 一种策略是使用轨迹数据通过机器学习技术完全学习一个新的 TP 模型。这一策略的一个显著例子是在 SESAR DART 项目中开发的方法, 例如 Hernández 等人比较了随机森林和梯度提升算法 (9), 而 Fernández 等人提出了一种基于隐马尔可夫模型

(HMM) 的 TP 方法 (10)。在更广泛的文献中, 诸如卷积神经网络和递归神经网络 (11; 12; 13)、LSTMS(14; 15; 16; 17; 18; 19)、广义线性模型 (20)、HMMs(21) 以及聚类方法 (22) 等机器学习方法都被用于数据驱动的 TP。这种方法的一个优点是模型在拟合数据方面具有灵活性, 然而缺点是在模型化轨迹中强制执行基于物理的约束更具挑战性, 并且确保所有预测的轨迹在空中交通管理背景下都是合理的。例如, 对于爬升或下降的飞机而言, 可能的轨迹预计会单调地改变高度 (23) 并遵循标准飞行程序, 这可能并不总是纯粹数据驱动方法 (24) 的情况。

一种可以克服这一缺点的替代方法是混合策略, 其中保留了基于物理的模型, 但使用最近邻 (25; 26)、神经网络 (27; 28)、梯度提升机 (29)、马尔可夫链蒙特卡罗 (30) 或线性 and 多项式回归 (31; 32) 从数据中推断出对默认模型的修正。这为使用保留由 ATM 驱动的约束和建模的数据来告知并改进 TP 模型提供了一种更灵活的方法。

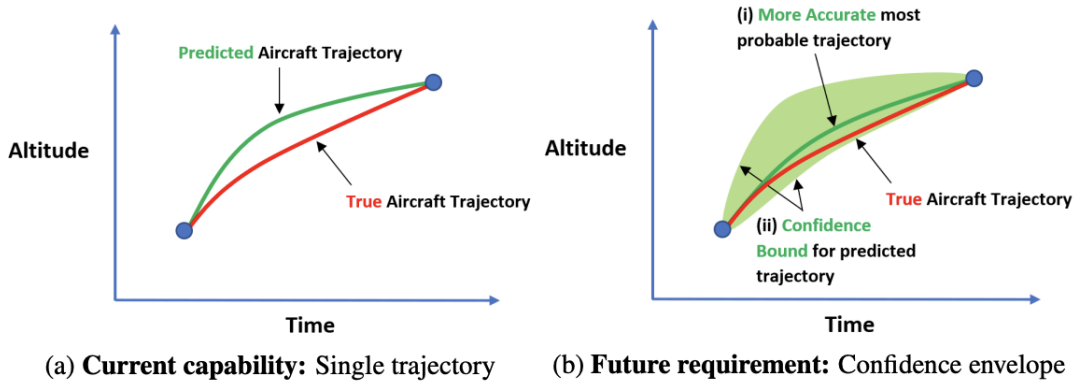


图 1: (a) 说明使用当前 TP 方法范式预测轨迹垂直分布的示意图。(b) 说明下一代 TP 模型所需特性的示意图。

本文提出了一种用于爬升飞机的概率混合模型。从数据中学习到一个有效的推力函数, 以使 BADA 模型适应特定场景。本文重点研究高空域内某一高度区间内的飞机爬升情况。该模型具有三个特征, 将在下文中展示:

- 改进了使用名义参数的飞机爬升平均预测, 相比 BADA
- 模型是生成性的, 可以用来生成现实的合成轨迹
- 上下置信限可以以极小的额外计算成本来估算一架爬升飞机的性能

本文的其余部分结构如下: 第 2 节详细概述了概率方法。第 3 节描述了用于训练并验证模型的真实世界数据集, 该数据集来源于飞机监视数据。最后, 第 4 节使用测试数据集的名义参数对比了模型与 BADA 的性能。

2 方法论

2.1 爬升飞机 BADA 参数的非可识别性

BADA 是一个基于物理学的模型, 描述了飞机的飞行力学。总能量方程在 BADA 中定义为:

$$(T_{HR} - D)V_{TAS} = m \left(g_0 \frac{dh}{dt} + V_{TAS} \frac{dV_{TAS}}{dt} \right), \quad (1)$$

其中 T_{HR} 表示与速度向量平行的飞机推力; D 表示阻力; V_{TAS} 表示飞机的真实空速; m 表示飞机的质量; h 表示飞机的大地高程; g_0 表示重力常数。方程左侧代表可用于飞机爬升或增加速度的剩余功率。右侧的两项

分别表示重力势能和动能的变化率。BADA 手册描述了如何重新排列 (1) 以得出爬升/下降率的方程, $ROCD$ (7):

$$ROCD = \frac{T - \Delta T}{T} \left[\frac{(T_{HR} - D)V_{TAS}}{mg_0} \right] f(M), \quad (2)$$

其中 T 代表国际标准大气 (ISA) 模型的大气温度; ΔT 是一个校正因子, 允许在有气象数据可用时调整 ISA 模型; 而 $f(M)$ 是能量分配因子 (ESF), 反映了相对于加速而言有多少功率被分配给爬升, 以马赫数 M 的函数形式表达。函数形式 $f(M)$ 取决于飞行条件。使用 BADA 手册中的方程 3.6-1、3.6-2 和 3.6-5, (7) 和 (2) 可以重新排列, 得到以下表达式:

$$\frac{2g_0^2 c_{D2}}{\cos^2(\phi) \rho V_{TAS} S} m^2 + \left[\frac{ROCD \times T}{f(M)(T - \Delta T)} \right] mg_0 + \frac{1}{2} c_{D0} \rho V_{TAS}^3 S - T_{HR} V_{TAS} = 0, \quad (3)$$

其中, c_{D0} 和 c_{D2} 是阻力系数, ρ 是空气密度 (来自 ISA 模型), S 是参考机翼表面积, 而 ϕ 是滚转角。在 (3) 中四个参数未知: $ROCD$, m , V_{TAS} 和 T_{HR} 。为了能够从数据中学习修正, $ROCD$ 是从雷达数据中观察到的 (使用 $ROCD^*$ 表示对 $ROCD$ 的观测), 并为 V_{TAS} 和 m 使用名义值, 允许拟合一个有效的推力项 $\hat{T}_{HR}$ 。此术语是大地高程 h 的函数, 并作为对 BADA 方程的功能性修正, 代表了飞机推力与其他 BADA 参数欠定的校正组合。(3) 可以重新排列来表示拟合的有效推力作为 $ROCD^*$ 和 BADA 模型中具有名义值的项的函数。以下小节描述了用于建模这种功能性修正的生成模型及其如何与数据拟合。

2.2 生成模型对推力剖面的修正

本节描述了一个拟合推力的功能形式的生成模型。 $\hat{T}_{HR}(h)$ 被建模为一个随机过程, 在 n_g 地球几何高度的网格上进行离散化。将拟合 $\hat{T}_{HR}(h)$ 应用于包含 n_f 次飞行的数据集, 并插值到此网格提供了该随机过程的 n_f 个实现。功能主成分分析 (fPCA) 用于将 $\hat{T}_{HR}(h)$ 的变化表示为一组 n 正交基函数 (33) 的加权和:

$$\hat{T}_{HR}(h_j) = \mu(h_j) + \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(h_j), \quad j = 1 : n_g, \quad (4)$$

其中 $\mu(h_j) = \mathbb{E}(\hat{T}_{HR}(h_j))$ 表示随机过程的均值, ϕ 是离散化的正交基函数, 满足条件:

$$\int \phi_i(h) \phi_j(h) dh = \delta_{ij}. \quad (5)$$

功能 PCA 遵循与主成分分析 (PCA) 相似的原则。然而, 虽然 PCA 确定的是由样本估计出的协方差矩阵的特征值和特征向量, 在 fPCA 中则是寻找一组协方差函数的特征值和特征函数。确定了均值函数和正交基函数后, 对数据集集中的每个 n_f 飞行进行最小二乘拟合。与一次飞行相关的权重表示为 fPCA 权重空间 $\mathbb{W}$ 中的点 $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^\top$, 其中包含 $\mathbf{w} \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ 。重复对每个 n_f 轨迹的数据拟合过程得到集合 $W = [\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(n_f)}]$ 。

fPCA 系数的联合密度, $f_w(\mathbf{w})$, 使用多元正态分布 $f_w(\mathbf{w}) \approx N(\boldsymbol{\mu}_w, \Sigma_w)$ 进行近似, 其中 $\boldsymbol{\mu}_w \in \mathbb{W}$ 和 $\Sigma_w \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别表示分布的均值和协方差矩阵。下标 “ w ” 用于区分此均值与 (4) 中的均值。

该模型的三个具体优势是: 首先, 将 BADA 拟合到数据中使我们能够提高其平均精度, 并根据我们拥有的特定位置和场景的数据调整模型。其次, 这种表示可以用作飞机爬升的生成模型, 可以通过从此分布中采样权重并使用 BADA 中的 (4) 计算合成爬升剖面来生成 $\hat{T}_{HR}$ 。最后, 它提供了一种方便的方式来定义爬升飞机性能的数据驱动上限和下限, 这将在下一节中讨论。

2.3 优化的不确定性界限用于爬升中的飞机

TP 模型在 ATM 中用于为预测轨迹设定保守界限, 以协助控制器规划飞机的安全路线。理想情况下, 这些界限应准确、基于实际数据, 并且计算成本低廉, 即可以通过分析方法计算而无需采样。受最近关于神经

网络优化模型不确定性的研究 (34) 的启发, 以及可靠性分析中用于计算最坏情况失败概率的几何论证 (35), 本节介绍了一种计算上述混合模型上下置信限的解析方法。

似然函数的水平集可以描述为在 $\mathbb{W}$, 即 fPCA 权重空间中的 n 维椭球体。鉴于协方差矩阵 Σ_w 由于 fPCA 模式的正交基而对角化, 这些椭球体的轴长由 Σ_w 的对角元素的平方根确定, 并且椭球体是轴对齐的。选择 95% 的置信水平会导致一个包含满足以下条件点的置信椭球体:

$$(\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu}_w)^\top \Sigma_w^{-1} (\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu}_w) \leq \chi_{0.95}^2, \quad (6)$$

其中 $\chi_{0.95}^2$ 表示在 0.95 置信水平下具有 n 自由度的 χ^2 分布的评估。进行搜索以识别在每个大地高网格点上最大化和最小化推力的置信椭球体内的点。这些点用 $\hat{\mathbf{w}}_u^{(k)}$ 和 $\hat{\mathbf{w}}_l^{(k)}$ 表示, 并且有 $k = [1 : n_g]$ 。

通过代换 $a_i = \phi_i(h_k)$, (4) 在 k^{th} 地理高度处的值可以表示为:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{w} = \text{const.}, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]^\top$ 包含了 fPCA 基函数的评估值。(7) 实际上定义了 $\mathbb{W}$ 中的一组超平面, 所有这些超平面的法向量均为单位向量 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} / \|\mathbf{a}\|^2$ 。 $\hat{\mathbf{w}}_u^{(k)}$ 和 $\hat{\mathbf{w}}_l^{(k)}$ 对应于置信椭球面上与这组超平面相切的位置。可以证明这些位置对应于:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}_l^{(k)} &= \boldsymbol{\mu}_w - \sqrt{\chi_{0.95}^2} (\mathbf{c} \circ \hat{\mathbf{n}}) \\ \hat{\mathbf{w}}_u^{(k)} &= \boldsymbol{\mu}_w + \sqrt{\chi_{0.95}^2} (\mathbf{c} \circ \hat{\mathbf{n}}), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{c} = \text{diag}(\Sigma_w)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\mathbf{n} = \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$, 单位法向量为 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} / \|\mathbf{n}\|^2$ 。

确定了置信椭球体内 $\hat{\mathbf{w}}_u^{(k)}$ 和 $\hat{\mathbf{w}}_l^{(k)}$ 的位置集合以及 $k = [1 : n_g]$ 后, 可以通过插值来获得最佳情况和最差情况的推力剖面, 并对每个剖面评估一次 BADA, 从而得到爬升性能的上下界。因此, 这使得这些界限的计算效率较高。

3 数据准备

第 2 节中描述的学习 BADA 方程推力项功能修正的方法使用了来自 2019 年 7 月至 9 月收集的英国领空南部 (伦敦飞行情报区 (36)) 707,236 次航班的真实轨迹数据集进行了测试。图 2 的左面板显示了数据集中各机型出现的频率。为了清晰起见, 仅显示在数据集中出现次数超过 3000 次的机型。该数据集主要由 B738 和 A320 飞机组成。

一种生成模型被开发用于频繁出现的飞机类型, 这些飞机在飞行高度层 150 到 325 之间飞行。选择这些飞行高度层是因为它们位于高空区域, 在此区域内轨迹不太可能受到当地操作程序的影响。作为预处理步骤, 数据集被过滤为属于通过该区间爬升的轨迹的雷达回波 $ROCD \geq 500\text{ft}/\text{min}$ 。对这个过滤后的数据集进行了 66:33 的训练: 测试分割。图 2 的右侧面板展示了 B738 雷达回波的侧向位置, 颜色按其关联的航班进行区分。

然后采用逐点方法将 $\hat{T}_{HR}$ 拟合到训练数据中。与个别轨迹相关的 $\hat{T}_{HR}$ 样本被插值到飞行高度间隔内的等间距网格, 该网格包含 $n_g = 100$ 个点, 从而为每种飞机类型生成一个功能数据集, 并在此基础上执行了 fPCA 分析。使用 kneedle 算法 (37) 对解释方差进行分析以确定保留的主要成分数量。通常每种飞机类型保留 2-4 个组件。

图 3 展示了针对 B738 和 C56X 飞机类型的 fPCA 均值 $\mu(h)$, 绘制在飞行高度上。B738 作为常见客机的示例被选中, 而赛斯纳 C56X 则作为一种较小的企业喷气式飞机被选作比较对象, 其性能特性有明显不同。两个子图中的拟合推力曲线大致呈线性。与名义上的推力曲线相比, B738 的斜率更陡峭, 而在 C56X 的情况下, $\mu(h)$ 的位置大约比名义上的推力曲线低 $2kN$ 。对于 B738 和 C56X 而言, $\mu(h)$ 在 CAS-马赫转换高度附近存在间断点, 该高度由虚线垂直线表示。此高度在 BADA 3.16 中根据每种机型的名义速度计划计算得出, 表明拟合的 $\hat{T}_{HR}$ 正在校正数据集中特定航线上名义 BADA 速度曲线和/或质量参数的规格不准确问题。

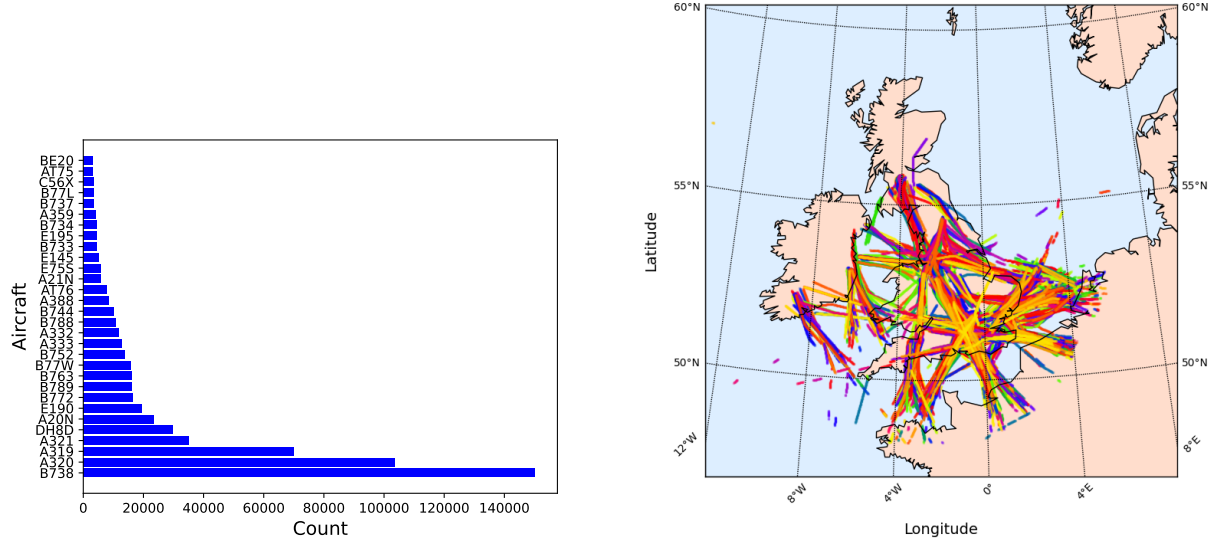


图 2: 数据集中每种飞机型号的出现频率。为了方便显示, 展示的飞机型号被过滤为在数据集中出现超过 3000 次的型号 (左)。数据集中 B738 雷达信号的横向位置与 $ROCD \geq 500\text{ft/min}$ (右)。

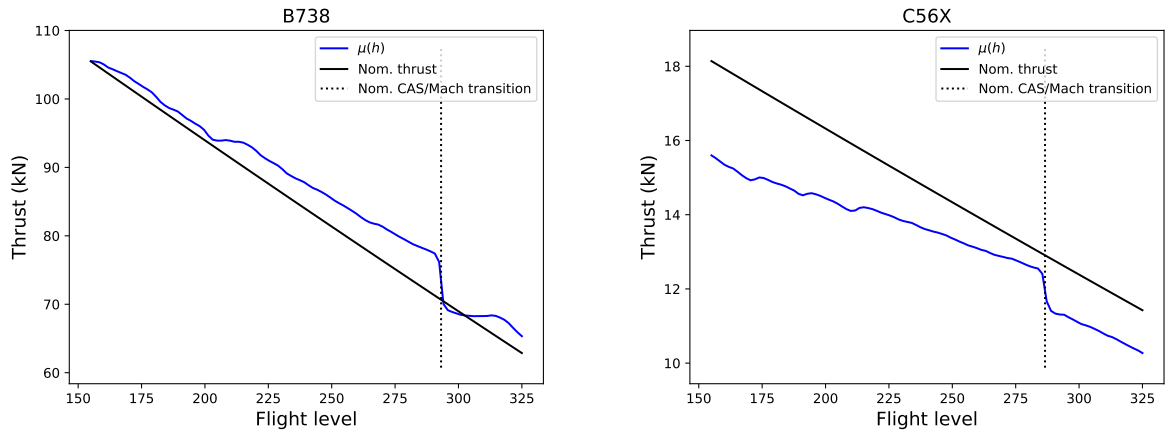


图 3: 三种飞机类型在飞行高度下的拟合平均推力。垂直线表示使用 BADA 速度计划的 CAS-马赫转换高度。

确定了均值函数和 fPCA 模式后，通过最小二乘拟合确定了训练数据集中每个轨迹的权重。这些权重被收集为集合 W ，并对该集合拟合了一个多元正态分布。对于训练数据集中的每种飞机类型，拟合过程都是独立重复进行的。

4 结果

通过对多种机型进行混合模型的拟合，使用测试数据集对提出的方法进行了评估。选择了三项标准来进行评估：模型如何能够改善使用名义参数的 BADA 模型的平均误差；通过使用模型权重的 95% 置信区间生成的上下置信界限如何包含测试数据；以及模型生成的合成轨迹如何反映测试数据集中轨迹分布的情况。

图 4 的左侧子图展示了由模型生成的推力曲线样本、它们的均值以及使用第 2.3 节方法在 95% 置信水平下确定的上限和下限。为了对比，名义 BADA 推力曲线也被绘制出来。绿色线， $T_{th,min}$ ，表示每个飞行高度对应的 $ROCD = 0$ 的推力曲线。每个子图的中心面板将测试数据集中的轨迹与在使用 BADA 时模型的均值和上下限进行了比较。这些图表中的绿线对应于用名义参数运行的 BADA。此实际世界测试数据可以与生成的推力曲线对应的轨迹及模型边界进行比较，后者显示在右侧面板中。对于每种飞机类型，生成了一组样本，数量等于测试数据集中的轨迹数，以产生看起来非常类似于测试数据的人造爬升剖面。本节为 B738 和 A320 生成了图表，因为这两种机型主导了数据集，并且 C56X 作为具有明显不同性能特性的较小飞机的一个示例。

4.1 平均预测值

图 5 的左上角面板是一个蜂群图，显示了两种飞行高度的平均误差：每种飞机类型在 250（大约是区间的一半）和 325 处。

蓝色的数据驱动模型可以看出其平均绝对误差（MAE）显著低于红色的 BADA 模型。

数据驱动模型显著改善了所有飞机类型的 MAE，特别是在爬升顶部尤为明显，这一点可以从图 4 的中间面板中看出。

表 1 显示了数据集中所有飞机类型的结果。平均而言，对于飞行高度层 250 和 325，数据驱动模型的 MAE 比使用名义参数预测的 BADA 轨迹低 26.7%。

4.2 生成模型的准确性

通过飞行高度层 250 和 325 的到达时间的概率分布之间的统计距离，测试了模型生成现实轨迹的能力。图 5 显示了这些分布的核密度图。为了比较，绘制了使用 BADA 和名义参数预测的到达时间（这是确定性的）的垂直线。除了图 5 中 B738 在 FL250 的到达外，BADA 的预测似乎低估了到达时间。

模型生成的分布与测试数据集之间的统计距离是使用 KL 散度计算得出的。大多数值在 0.3 到 0.8 范围内，表明这两个分布之间有很好的 consistency。最大的统计距离之一出现在 B738 在 FL250 的情况 (3.9)，这在图 5 的左上角面板中进行了绘制，并且看起来显示出合理的吻合度。

4.3 边界包含

最后，研究了所提出的方法生成准确置信区间的能力。对于每种飞机类型，在 95% 的置信水平下生成了区间，并记录测试数据集中位于这些区间内的比例于表 1 中。发现该区间对大多数飞机类型都非常准确：测试数据的平均覆盖率是 97.2%。训练数据集中所有飞机的覆盖率均大于 95%。

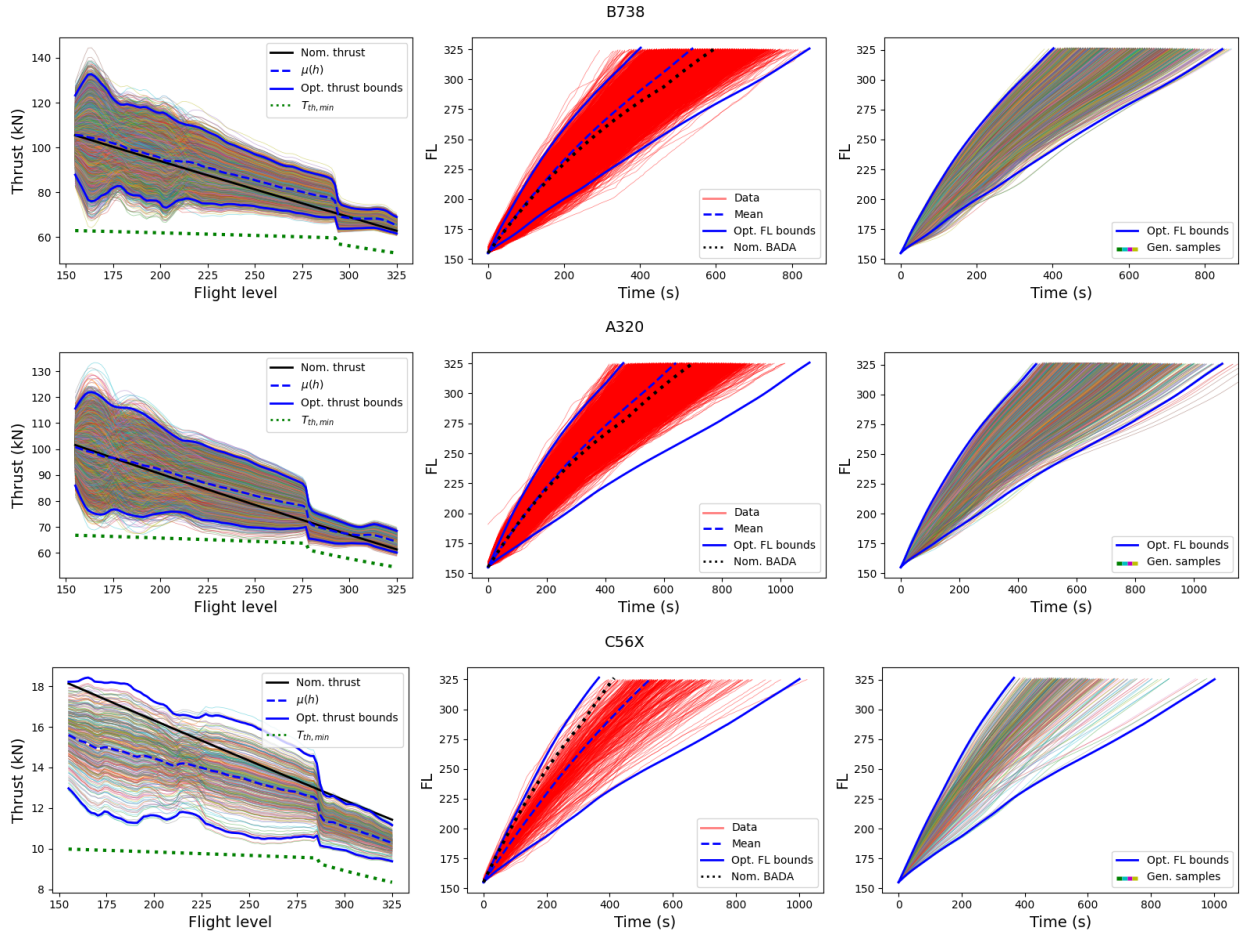


图 4: 优化边界下的推力函数样本与名义 BADA 推力曲线的对比 (左)。测试数据与生成模型均值及优化不确定性边界的对比以及名义 BADA 的比较 (中)。当推力样本和边界通过 BADA 运行时采样的轨迹和不确定性边界 (右)。

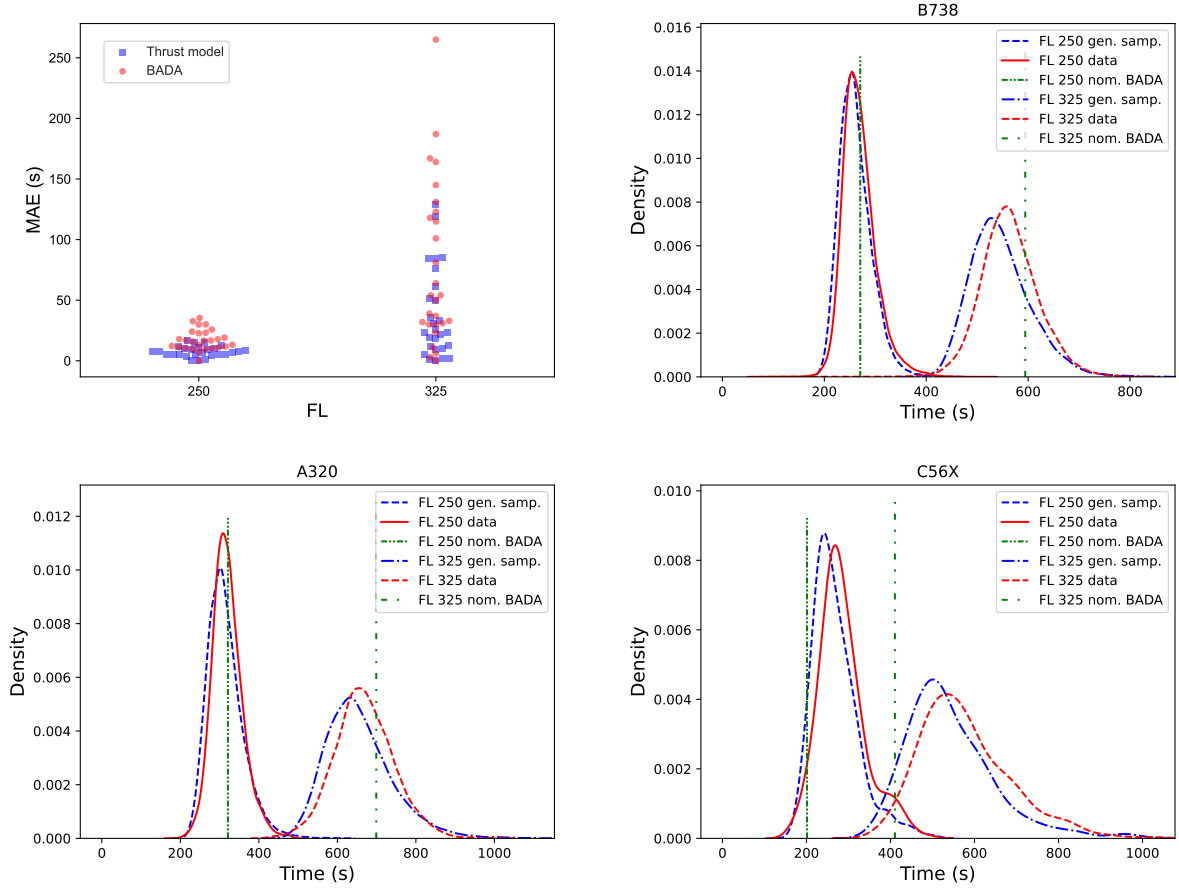


图 5: 群集图显示了所提出的模型和 BADA 在 FL 250 和 325 下的 MAE (左上角)。两个飞行高度层到达时间分布的核密度估计, 将测试数据 (红色) 与从生成模型采样的轨迹 (蓝色) 进行比较。

5 结论

一个生成模型被提出，该模型使用对 BADA 模型推力剖面的功能性修正。基于从跨越英国领空的 707,236 次航班中收集的数据训练了一个概率生成模型，适用于 26 种常见的飞机类型。该模型提供了三个主要特点：改进了爬升轨迹，提供到达 FL325 的高度层平均时间估计，比使用名义参数运行 BADA 时平均更准确 26.7%；能够生成爬升中的飞机的真实合成轨迹；以及一种高度有效的分析方法，用于计算我们训练数据集上指定置信水平下的爬升中飞机的上下限，测试数据集中 97.2% 的数据点处于这些界限内。鉴于 TP 对支持 ATM 决策的重要性，这是关键特征之一，因为它允许该方法在给定置信水平下生成由数据驱动的最佳和最坏情况爬升轮廓。未来的工作将旨在将此方法扩展到 ATM 中的其他场景，例如建模下降或遵循特定 ATM 程序的轨迹。

附录

表 1: 所提出的生成模型在一系列飞机类型上的性能，与未见过的测试数据相比。箭头指示每个指标是较大值还是较小值更优。

Aircraft type	n_f	平均误差 (s) ↓				KL 散度。↓		Coverage (%)
		FL 250		FL 325		FL 250	FL 325	
		Gen. Model	BADA	Gen. Model	BADA			
B738	36955	8.0	1.48	17.77	30.38	0.11	0.19	97.02
A320	25460	4.92	1.53	12.16	30.97	0.11	0.14	97.88
A319	16898	3.92	12.09	13.04	39.13	0.1	0.17	97.89
A321	8296	5.21	30.71	10.97	32.33	0.12	0.14	98.05
A20N	5918	4.95	21.66	17.93	50.39	0.09	0.2	97.55
E190	4855	10.49	19.37	24.09	3.21	0.1	0.15	97.25
B772	3037	6.55	61.27	16.7	117.69	0.12	0.14	97.3
B789	3242	8.1	118.95	16.69	164.48	0.07	0.09	97.08
B763	1687	15.3	5.0	29.95	30.43	0.22	0.24	97.44
B77W	1865	6.7	2.07	9.62	81.03	0.14	0.15	97.23
B752	3146	9.63	50.47	16.89	101.28	0.18	0.2	96.42
A333	2099	4.05	128.77	13.19	265.31	0.1	0.09	96.9
A332	1950	4.86	84.02	7.14	187.21	0.11	0.13	97.82
B788	2120	5.11	36.15	11.78	5.63	0.05	0.06	97.44
B744	1612	7.48	84.54	9.84	131.41	0.17	0.15	96.89
A388	1423	0.09	75.77	10.34	64.25	0.15	0.1	97.21
A21N	1655	8.09	18.27	19.11	115.07	0.13	0.17	97.97
E75S	755	12.2	23.23	25.81	53.78	0.19	0.21	97.39
E145	927	9.31	51.33	22.76	144.91	0.13	0.17	96.89
B733	582	2.15	10.23	13.62	23.37	0.12	0.21	96.87
E195	743	12.75	33.45	30.1	32.85	0.17	0.23	97.14
B734	669	14.87	13.16	32.72	53.8	0.22	0.25	96.57
A359	720	10.09	22.88	10.2	37.06	0.18	0.16	97.01
B737	868	11.29	8.71	23.16	11.12	0.14	0.18	96.17
B77L	249	5.0	26.4	15.86	123.37	0.18	0.22	97.54
C56X	697	16.59	84.32	35.39	166.79	0.2	0.19	96.3

资金来源

本文描述的工作主要由“EP/V056522/1：推进概率机器学习以实现更安全、更高效和可预测的空中交通管制”（又称 Project Bluebird 项目）资助，该项目是 NATS、艾伦图灵研究所、埃克塞特大学和剑桥大学之间的 EPSRC 繁荣伙伴关系。

致谢

作者谨向 Shubhani Jain、Jan Povala、Richard Everson 和 George 德阿特表示感谢，感谢他们提出的有益评论。

参考文献

- [1] NATS. Airspace efficiency; 2022. Available from: <https://www.eurocontrol.int/publication/eurocontrol-aviation-outlook-2050>.
- [2] UK Department for Transport. Jet Zero strategy: delivering net zero aviation by 2050; 2022. Available from: <https://www.gov.uk/government/publications/jet-zero-strategy-delivering-net-zero-aviation-by-2050>.
- [3] Chatterji G, Sridhar B, Bilimoria K. In: En-route flight trajectory prediction for conflict avoidance and traffic management; 1996. .
- [4] Chatterji G. In: Short-term trajectory prediction methods; 1999. .
- [5] Lympelopoulous I, Lygeros J. Sequential Monte Carlo methods for multi-aircraft trajectory prediction in air traffic management. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2010;24(10):830-49.
- [6] Nuic A, Poles D, Mouillet V. BADA: An advanced aircraft performance model for present and future ATM systems. International journal of adaptive control and signal processing. 2010;24(10):850-66.
- [7] Nuic A. User manual for the Base of Aircraft Data (BADA) revision 3.10. Atmosphere. 2010;2010:001. Available from: <https://www.eurocontrol.int/publication/user-manual-base-aircraft-data-bada>.
- [8] Musialek B, Munafo CF, Ryan H, Paglione M. Literature Survey of Trajectory Predictor Technology, technical note. FAA, US Department of Transport. 2010. Available from: <https://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/tctn11-1.pdf>.
- [9] Hernández AM, Magaña EJC, Berna AG. Data-driven aircraft trajectory predictions using ensemble meta-estimators. In: 2018 IEEE/AIAA 37th Digital Avionics Systems Conference (DASC). IEEE; 2018. p. 1-10.
- [10] Fernández EC, Cordero JM, Vouros G, Pelekis N, Kravaris T, Georgiou H, et al. DART: A machine-learning approach to trajectory prediction and demand-capacity balancing. SESAR Innovation Days, Belgrade. 2017:28-30. Available from: http://www.c4i.gr/xgeorgio/docs/SID_2017_paper_65.pdf.
- [11] Shafienya H, Regan AC. 4D flight trajectory prediction using a hybrid Deep Learning prediction method based on ADS-B technology: A case study of Hartsfield – Jackson Atlanta International Airport (ATL). Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2022;144:103878.
- [12] Tran PN, Nguyen HQ, Pham DT, Alam S. Aircraft trajectory prediction with enriched intent using encoder-decoder architecture. IEEE Access. 2022;10:17881-96.

- [13] Pang Y, Zhao X, Yan H, Liu Y. Data-driven trajectory prediction with weather uncertainties: A Bayesian deep learning approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2021;130:103326.
- [14] Chen Y, Sun J, Lin Y, Gui G, Sari H. Hybrid N-Inception-LSTM-Based Aircraft Coordinate Prediction Method for Secure Air Traffic. 2022;23(3):2773-83.
- [15] Shi Z, Xu M, Pan Q. 4-D Flight Trajectory Prediction With Constrained LSTM Network. 2021;22(11):7242-55.
- [16] Xu Z, Zeng W, Chu X, Cao P. Multi-aircraft trajectory collaborative prediction based on social long short-term memory network. *Aerospace*. 2021;8(4):115.
- [17] Shi Z, Xu M, Pan Q, Yan B, Zhang H. LSTM-based Flight Trajectory Prediction. In: 2018 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN); 2018. p. 1-8.
- [18] Ma L, Tian S. A Hybrid CNN-LSTM Model for Aircraft 4D Trajectory Prediction. *IEEE Access*. 2020;8:134668-80.
- [19] Schimpf N, Knoblock EJ, Wang Z, Apaza RD, Li H. Flight Trajectory Prediction Based on Hybrid-Recurrent Networks. In: 2021 IEEE Cognitive Communications for Aerospace Applications Workshop (CCAASW); 2021. p. 1-6.
- [20] De Leege A, Van Paassen M, Mulder M. A machine learning approach to trajectory prediction. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference; 2013. p. 4782.
- [21] Ayhan S, Samet H. Aircraft Trajectory Prediction Made Easy with Predictive Analytics. In: Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. KDD '16. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2016. p. 21 – 30.
- [22] Murça MCR, de Oliveira M. A data-driven probabilistic trajectory model for predicting and simulating terminal airspace operations. In: 2020 AIAA/IEEE 39th Digital Avionics Systems Conference (DASC). IEEE; 2020. p. 1-7.
- [23] Pepper N, Thomas M, De Ath G, Olivier E, Cannon R, Everson R, et al. A probabilistic model for aircraft in climb using monotonic functional Gaussian process emulators. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2023;479(2271):20220607.
- [24] Jung S, Kochenderfer MJ. Learning Terminal Airspace Traffic Models from Flight Tracks and Procedures. In: 2019 IEEE/AIAA 38th Digital Avionics Systems Conference (DASC); 2019. p. 1-8.
- [25] Hrastovec M, Solina F. Prediction of aircraft performances based on data collected by air traffic control centers. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2016;73:167-82.
- [26] Hrastovec M, Solina F. Machine learning model for aircraft performances. In: 2014 IEEE/AIAA 33rd Digital Avionics Systems Conference (DASC); 2014. p. 8C4-18C410.
- [27] Alligier R, Gianazza D, Durand N. Machine learning and mass estimation methods for ground-based aircraft climb prediction. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2015;16(6):3138-49.
- [28] Uzun M, Umut Demirezen M, Koyuncu E, Inalhan G. Design of a Hybrid Digital-Twin Flight Performance Model Through Machine Learning. In: 2019 IEEE Aerospace Conference; 2019. p. 1-14.
- [29] Alligier R, Gianazza D. Learning aircraft operational factors to improve aircraft climb prediction: A large scale multi-airport study. *Transportation research part C: emerging technologies*. 2018;96:72-95.
- [30] Sun J, Hoekstra JM, Ellerbroek J. Estimating aircraft drag polar using open flight surveillance data and a stochastic total energy model. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2020;114:391-404.

- [31] Alligier R, Gianazza D, Durand N. Learning the aircraft mass and thrust to improve the ground-based trajectory prediction of climbing flights. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2013;36:45-60.
- [32] Yanto J, Liem RP. Aircraft fuel burn performance study: A data-enhanced modeling approach. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*. 2018;65:574-95.
- [33] Ramsay J, Silverman BW. *Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer New York; 2013. Available from: <https://books.google.co.uk/books?id=fgLqBwAAQBAJ>.
- [34] Heiss JM, Weissteiner J, Wutte HS, Seuken S, Teichmann J. NOMU: Neural Optimization-based Model Uncertainty. In: *International Conference on Machine Learning*. PMLR; 2022. p. 8708-58. Available from: <https://proceedings.mlr.press/v162/heiss22a.html>.
- [35] Pepper N, Crespo L, Montomoli F. Adaptive learning for reliability analysis using Support Vector Machines. *Reliability Engineering & System Safety*. 2022;226:108635.
- [36] NATS. Introduction to airspace; 2023. Available from: <https://www.nats.aero/ae-home/introduction-to-airspace/>.
- [37] Satopaa V, Albrecht J, Irwin D, Raghavan B. Finding a "kneedle" in a haystack: Detecting knee points in system behavior. In: *2011 31st international conference on distributed computing systems workshops*. IEEE; 2011. p. 166-71.