拟球的光滑逼近

Spencer Cattalani*

2025 年 4 月 13 日

摘要

我们证明每个拟球都是局部光滑均匀拟球序列的 Gromov-Hausdorff 极限。我们也证明了在双 Lipschitz 环境中的一个类似结果。这将 D. Ntalampekos 最近的二维结果扩展到了任意维度。在这个过程中，我们将他的论证的后半部分替换为一种完全不同的、更有效的方法，这种方法应该可以应用于其他问题。

1 介绍

在对统一化、参数化或近似度量空间方面已有大量工作。特别的兴趣通常给予拟球体（即拟对称于欧几里得球体的度量空间）；参见 Bonk-Kleiner [2]，Ntalampekos-Romney [7, 8] 和 Meier-Wenger [9] 等。在这篇笔记中，我们证明了以下结果：

定理 1. 令 (X, d) 是一个与紧连通黎曼流形 (X, d_g) 拟对称的度量空间。那么， (X, d) 是一组局部等距于黎曼流形并且均匀拟对称于 (X, d_g) 的度量空间序列的 *Gromov-Hausdorff* 极限。

上述结论中隐含的常数仅依赖于拟对称失真和 X 的维度。定理 1 是将 [6, Theorem 1.8] 推广到任意维度的结果。证明遵循与 [6] 中相同的路线，并且特别地使用了主要技术结果 [6] 的一个特殊情况（在本文中作为命题 10 陈述）。证明的区别在于应用命题 10 所采用的构造。在 [6, Sections 3 and 4] 中，黎曼流形 (X, d_g) 首先以一种受控的方式进行三角剖分，然后修改这个三角剖分，并最终重新光滑。[6] 的修改步骤仅适用于二维情况，而重新光滑的步骤仅适用于最多四维的情况。本文节 4 中的构造则保持在光滑设置内。我们通过函数 λ_ε 进行共形重标度，该函数衡量了尺度 ε 处的长度扭曲（参见 [5, Section 7.8]）。这个构造不仅适用于任何维度，而且描述得更为简单。我们希望这种构造的简洁性即使在二维情况下也能进一步发挥作用。

类似的结果在双 Lipschitz 情况下也成立，将 [6, Theorem 1.11] 推广到任意维度：

定理 2. 设 (X, d) 是一个度量空间，它与紧连通黎曼流形 (X, d_g) 存在 L -双 Lipschitz 同胚。然后， (X, d) 是一个序列的 *Gromov-Hausdorff* 极限，这些度量空间局部等距于 (X, Ld_g) ，并且是 L -双 Lipschitz 同胚到 (X, d_g) 。

*Partially supported by NSF grant DMS 2246485 and the Simons Foundation

与 [6, Theorem 1.11] 相比, 定理 2 不仅在任意维度上成立, 而且完全控制了 Lipschitz 常数。定理 2 的证明遵循了 [6] 中的证明。在这种情况下, 简化更为显著, 因为只需要进行 [6, Section 2.2] 的拼接构造和均匀缩放。

本笔记的结构如下。第 2 节和第 3 节回顾了来自 [6] 的必要背景。第 2 节的重点是引理 8。这一点足以证明定理 2。第 3 节的重点是命题 10, 我们证明它是 [6, Theorem 2.8] 的一个非常特殊的案例。这是一个关于拟对称性的局部到全局的结果, 作为证明 [6, Theorem 1.8] 和定理 1 的技术核心。代替 (K, L) -近似值的 [6], 我们将命题 10 限制到 ε -网; 引理 11 证明了这种简化是合理的。第 4 节包含了本文的新构造, 并且包含定理 1 和 2 的证明, 取代了 [6, Sections 3 and 4] 的十二页内容。

致谢: 作者感谢 Dimitrios Ntalampekos 在其撰写本文期间的指导以及 Aleksey Zinger 的帮助性评论。

2 基本度量和黎曼几何

令 d 和 ρ 是空间 X 上的度量。令 $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个同胚。我们说度量 d 是 η -拟对称到 ρ 的, 如果恒等映射 $\text{id}: (X, d) \rightarrow (X, \rho)$ 是一个 η -拟对称, 即

$$\rho(p, q) \leq \eta\left(\frac{d(p, q)}{d(q, s)}\right)\rho(q, s) \quad (2.1)$$

对于所有点 p, q 和 $s \neq q$ 在 X 中。令 $L \geq 1$ 。度量 d 和 ρ 在 X 中的所有点 p 和 q 上是 L -双 Lipschitz 如果

$$L^{-1}d(p, q) \leq \rho(p, q) \leq Ld(p, q)$$

。我们用 $B(p, r)$ 表示以 $p \in X$ 为中心的开 r 球, 并用 $\overline{B}(p, r)$ 表示闭球。我们注意到, 闭球是满足 $d(p, q) \leq r$ 的点 $q \in X$ 的集合, 而不一定是开球的闭包。如果 $A \subset X$, 则 $N(A, r)$ 表示集合 A 的开 r 邻域。子集 A 和 B 之间的豪斯多夫距离是使得 $B \subset N(A, r)$ 和 $A \subset N(B, r)$ 成立的最小 $r \geq 0$ 。两个度量空间 X 和 Y 之间的 Gromov-Hausdorff 距离是所有度量空间 Z 上的 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 之间最小的豪斯多夫距离, 以及等距嵌入 $f: X \rightarrow Z$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 。

引理 3 ([4, p78]). 设 d, ρ 是同一空间上的度量。如果 d 是 L -双 Lipschitz 到 ρ , 则 d 是 η -拟对称到 ρ , 其中 $\eta(t) = L^2t$ 。

引理 4 ([4, Theorem 11.3]). 如果 (X, d_g) 是一个黎曼流形, 并且 d_g 几乎是对称于一个度量 d , 那么存在 $C \geq 1$ 和 $\alpha \leq 1$ 使得

$$d(p, q) \leq Cd_g(p, q)^\alpha$$

对于 $p, q \in X$ 满足 $d_g(p, q) < 1$ 。

引理 5 ([1, Proposition 95]). 对于每个紧致黎曼 n -流形 (X, d_g) , 存在一个 $c > 0$, 使得对于每个 $r \in (0, c)$ 和点 $p \in X$, $B(p, r)$ 是凸的并且 2-双李普希茨同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 ε -球。

推论 6. 设 (X, d_g) 是一个紧黎曼流形。对于每一个足够小的 $r > 0$, 以及满足 $d_g(p, q) < r$ 的 $p, q \in X$, 存在一个点 $s \in X$ 使得

$$8^{-1}r \leq d_g(p, s) \leq 8r \quad \text{and} \quad 8^{-1}r \leq d_g(q, s) \leq 8r. \quad (2.2)$$

证明. 由引理 5, 我们可以将 p 和 q 与 $\mathbb{R}^n$ 中的点关联起来, 使得 $d_{std}(p, q) < 2r$. 因此, 线上通过点 p 和 q 存在一个点 s , 使得

$$d_{std}(p, s) = 4r = d_{std}(p, q) + d_{std}(q, s).$$

由于事实是

$$d_{std}(q, s) = 4r - d_{std}(p, q) \quad \text{and} \quad 2r \leq 4r - d_{std}(p, q) \leq 4r$$

所以

$$2r \leq d_{std}(q, s) \leq 4r.$$

因为 d_{std} 是 2-双 Lipschitz 到 d_g 的,

$$\begin{aligned} 2r &= 2^{-1}d_{std}(p, s) \leq d_g(p, s) \leq 2d_{std}(p, s) = 8r \quad \text{and} \\ r &\leq 2^{-1}d_{std}(q, s) \leq d_g(q, s) \leq 2d_{std}(q, s) \leq 8r. \end{aligned}$$

因此, $s \in X$ 满足 (2.2). □

引理 7 ([1, Theorem 52]). 紧黎曼流形上任意两点之间的距离可实现为连接这两点的长度最短测地线的长度。

引理 8 ([6, Lemma 2.2]). 令 (X, ρ) 为一个度量空间, $S \subset X$ 是具有度量 d 的闭集, 使得 $d \leq \rho$ 在 $S \times S$ 上。然后, 函数

$$\tilde{\rho}: X \times X \longrightarrow [0, \infty), \quad \tilde{\rho}(x, y) := \min\{\rho(x, y), \inf_{p, q \in S} \{\rho(x, p) + d(p, q) + \rho(q, y)\}\},$$

是 X 上的一个度量, 使得 $\tilde{\rho} \leq \rho$ 。如果 (S, d) 是一个离散的度量空间, 则从 (X, ρ) 到 $(X, \tilde{\rho})$ 的身份映射是一个局部等距。如果对某些 $L \geq 1$, $d \geq \rho$ 在 $S \times S$ 上, 则 $\tilde{\rho}$ 是到 ρ 的 L -双 Lipschitz。

我们说 $\tilde{\rho}$ 是由 ρ 和决定的粘接度量 d 。

3 网络和逼近

令 (X, d) 为一个度量空间并且 $\varepsilon > 0$ 。一个子集 $S \subset X$ 被称为 ε -密集如果对于每个点 $p \in X$, 存在一个点 $s \in S$ 使得 $d(p, s) < \varepsilon$ 。一个子集 $S \subset X$ 被称为 ε -分离的如果对于 S 中任意两个不同的点 s 和 s' , 都有 $d(s, s') \geq \varepsilon$ 。 ε -网络是一个 ε -密集且 ε -分离的子集。以下是佐恩引理的一个简单推论。

引理 9 ([4, Exercise 12.10]). 每个度量空间都包含一个 ε -网对于每一个 $\varepsilon > 0$ 。

命题 10 (特殊情况 [6, Theorem 2.8]). 令 $n \in \mathbb{N}, R \geq 1$ 足够大 (取决于 n), $\varepsilon > 0$ 足够小 (取决于 R), X 是一个紧致连通光滑 n -流形, 带有度量 d_g, ρ 和 d , 且 $S \subset (X, d_g)$ 是一个 ε -网。假设 d_g 和 ρ 是由 Riemann 度量诱导的 X 上, $d \leq \rho$ 在 $S \times S$ 上存在, 且存在 $L \geq 1$ 和一个同胚 $\eta_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 使得

$$d(s, s') \geq L^{-1} \rho(s, s') \quad \forall s, s' \in S \quad \text{such that} \quad d_g(s, s') < 2\varepsilon, \quad (3.1)$$

d_g 是 η_1 -拟对称的到 d , 且 d_g 是 η_1 -拟对称的到 ρ 在 $B(s, R\varepsilon)$ 上对于每一个 $s \in S$ 。然后, 存在一个同胚 $\eta_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 仅依赖于 R, L 和 η_1 , 使得 d_g 是 η_2 -拟对称到引理 8 由 ρ 和 $d|_{S \times S}$ 确定的粘合度量 $\tilde{\rho}$ 。

[6, Theorem 2.8] 的陈述更为一般, 因为它适用于度量空间之间的映射, 并且使用了 (K, L) -近似而不是 ε -网。在本节的其余部分, 我们将展示命题 10 确实是 [6, Theorem 2.8] 的一个特例。设 (X, d_g) 是一个黎曼流形。为了方便引用, 并经作者许可, 下一段几乎逐字摘自 [6, Section 2.3]。

给定一个图 $G = (V, \sim)$, 我们用 $k(u, v)$ 表示顶点 $u, v \in V$ 之间的组合距离, 即连接两个顶点的链中的最小边数。注意, 如果不存在连接 u 和 v 的边链, 则 $k(u, v)$ 被理解为 ∞ 。我们考虑四元组 $\mathcal{A} = (G, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathcal{U})$, 其中 $G = (V, \sim)$ 是一个顶点集为 V 的图, $\mathbf{p} : V \rightarrow X$ 和 $\mathbf{r} : V \rightarrow (0, \infty)$ 是映射, 并且 $\mathcal{U} = \{U(v) : v \in V\}$ 是 X 的一个开覆盖。我们令

$$p_v := \mathbf{p}(v), \quad r_v := \mathbf{r}(v), \quad \text{and} \quad U_v := U(v) \quad \forall v \in V.$$

对于 $K > 0$, 我们将顶点 $v \in V$ 关于 $\mathcal{A}$ 的 K -星定义为

$$\mathcal{A}\text{-St}_K(v) := \bigcup_{\substack{u \in V \\ k(u, v) < K}} U_u$$

对于 $K, L \geq 1$, 如果以下四个条件得到满足, 我们称四元组 $\mathcal{A}$ 为 (K, L) -近似值 (X, d_g)

- (A1) G 的每个顶点的次数至多为 K 。
- (A2) $B(p_v, r_v) \subset U_v \subset B(p_v, Lr_v)$ 对于每一个 $v \in V$ 。
- (A3) 设 $u, v \in V$ 。如果 $u \sim v$, 那么 $U_u \cap U_v \neq \emptyset$ 和 $L^{-1}r_u \leq r_v \leq Lr_u$ 。反之, 如果 $U_u \cap U_v \neq \emptyset$, 则 $k(u, v) < K$ 。
- (A4) $N(U_v, r_v/L) \subset \mathcal{A}\text{-St}_K(v)$ 对于每一个 $v \in V$ 。

(K, L) 近似值 $\mathcal{A}$ 的 X 被称为精细, 如果 $U_v \neq X$ 对于所有 $v \in V$ 。

给定一个 ε -网络 $S \subset (X, d_g)$, 我们定义一个四元组 $\mathcal{A}_S$, 如上所述, 其中 G 是顶点集为 S 的图, 在两个顶点 s 和 s' 之间有边相连当且仅当 $d(s, s') < 2\varepsilon$, $\mathbf{p}$ 是将 S 包含到 X 中的函数, $\mathbf{r}$ 是常数 ε , 且对于每个 $s \in S$ 有 $U_s := B(s, \varepsilon)$ 。

引理 11. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在一个 $K \geq 1$, 使得对于每一个紧黎曼 n -流形 (X, d_g) , $\varepsilon > 0$ 足够小, 并且 ε -网 S , $\mathcal{A}_S$ 是 (X, d_g) 的 $(K, 1)$ -近似。

证明. 条件 (A2) 和 (A3) 显然对任何 $K \geq 2$ 都满足 $L = 1$. 由引理 5, 存在 $c > 0$ 和 $M \geq 1$ 使得对于所有的 $r \in (0, c)$ 和 $p \in X$, n -体积的 $B(p, r)$ 下界为 $M^{-1}r^n$ 上界为 Mr^n . 因此, 对于每一个足够小的 $\varepsilon > 0$, 最多有 $6^n M^2$ (相应地 $8^n M^2$) 个不相交的半径为 $\varepsilon/2$ 的球体可以位于 $B(s, 3\varepsilon)$ (相应地 $B(s, 4\varepsilon)$) 内, 对于任意的 $s \in S$. 通过 ε -分离的 S ,

$$B(s', \varepsilon/2) \cap B(s'', \varepsilon/2) = \emptyset \quad \forall s', s'' \in S, \quad s' \neq s''.$$

因此, $S \cap B(s, 2\varepsilon)$ 的基数至多为 $6^n M^2$. 从而, 条件 (A1) 对任何 $K \geq 6^n M^2$ 都成立. 由 ε -密度条件,

$$N(U_s, r_u/L) = B(s, 2\varepsilon) \subset \bigcup_{s' \in B(s, 3\varepsilon)} U_{s'}. \quad (3.2)$$

根据上述内容, $S \cap B(s, 3\varepsilon)$ 的基数至多为 $8^n M^2$. 由于 $B(s, 2\varepsilon)$ 是连通的, 并且当 $s', s'' \in S$ 通过一条边相连时 $U_{s'} \cap U_{s''} \neq \emptyset$, 图中任意两个顶点 $s', s'' \in B(s, 3\varepsilon)$ 都可以通过位于 $B(s, 3\varepsilon)$ 中的顶点连接. 结合 (3.2), 这意味着条件 (A4) 对任何 $K \geq 8^n M^2$ 都成立. $\square$

[6, Theorem 2.8] 的声明使用由精细的 (K, L) -近似 $\mathcal{A}$ 确定的 $(2K+1)$ -星在 X 中, 以及 L -有界转角的概念. 我们不定义后一概念, 但注意到根据引理 7, 紧黎曼流形具有 L -有界转向对于每一个 $L \geq 1$. 由于

$$\mathcal{A}_S\text{-St}_{2K+1}(s) \subset B(s, 2(2K+1)\varepsilon) \quad \forall s \in S,$$

, 我们可以取 $R = 2(2K+1)$ 以应用 [6, Theorem 2.8] 来得到这一命题.

4 光滑逼近

本节包含了定理 1 和 2 的证明. 这两个证明的想法是重新缩放 X 上的度量 d_g , 然后使用引理 8 将重新缩放后的度量与 d 连接起来. 对于定理 2, 全局缩放是可行的.

定理的证明 2. 根据假设, $d \leq Ld_g$. 令 $\varepsilon > 0$. 由引理 9, 存在一个 ε -网络 S 在 (X, Ld_g) 中. 令 ρ_ε 为由 Ld_g 和 $d|_{S \times S}$ 确定的粘接度量. 由引理 8, (X, ρ_ε) 局部等距于 (X, Ld_g) 并且 L -双 Lipschitz 到 d_g . 集合 (S, d) 是在 (X, ρ_ε) 和 (X, d) 中的 ε 密集子集. 因此, 它在这两个空间中的 Gromov-Hausdorff 距离上是 ε 接近的, 所以这些空间彼此之间是 2ε 接近的. $\square$

对于本节的其余部分, 我们将采用以下记号: (X, d_g) 是一个连通黎曼流形且 d 是 X 上的另一个度量, 使得 d_g 是 η -拟对称于 d , 即

$$d(p, q) \leq \eta \left(\frac{d_g(p, q)}{d_g(q, s)} \right) d(q, s) \quad \forall p, q \in X \quad \text{with} \quad q \neq s \quad (4.1)$$

符号 $B(p, r)$ 和 $\overline{B}(p, r)$ 仅指相对于 d_g 取出的球.

拟对称比双利普希茨同胚更为微妙, 全局缩放无法提供足够的控制来应用命题 10. 因此, 我们进行局部重缩放. 对于 $\varepsilon > 0$, 定义一个函数

$$\lambda_\varepsilon : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda_\varepsilon(p) := \frac{\max_{q \in \overline{B}(p, \varepsilon)} d(p, q)}{\varepsilon}. \quad (4.2)$$

我们注意到任何 ε -稠密子集 $S \subset (X, d_g)$ 是 $(\varepsilon \max_X \lambda_\varepsilon)$ -稠密于 (X, d) .

引理 12. 函数 λ_ε 是连续的。

证明. 令 $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 是 X 中收敛到 p_∞ 的点序列。我们证明了 $\lim \lambda_\varepsilon(p_i) = \lambda_\varepsilon(p_\infty)$ 。对于每个 p_i , 设 $q_i \in \overline{B}(p_i, \varepsilon)$ 是在 (4.2) 中实现最大值的点。由紧性可知, (q_i) 的一个子序列收敛到点 q_∞ 。显然, $q_\infty \in \overline{B}(p, \varepsilon)$ 并且 $d(p_\infty, q_\infty)/\varepsilon = \lim \lambda_\varepsilon(p_i)$ 。因此, $\lim \lambda_\varepsilon(p_i) \leq \lambda_\varepsilon(p_\infty)$ 。

反之, 设 $s_\infty \in \overline{B}(p_\infty, \varepsilon)$ 是在 (4.2) 中使 p_∞ 达到最大值的点。由于 (X, d_g) 是一个长度空间,

$$N(\overline{B}(p, r_1), r_2) = B(p, r_1 + r_2) \quad \forall p \in X \quad \forall r_1, r_2 > 0.$$

当 p_i 趋向于 p_∞ 时, 则有 $s_\infty \in N(\overline{B}(p_i, \varepsilon), r_i)$ 对于 r_i 趋向于零。因此, 存在一个收敛到 s_∞ 的序列 $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, 使得 $s_i \in \overline{B}(p_i, \varepsilon)$ 。于是, $\lim d(p_i, s_i)/\varepsilon = \lambda_\varepsilon(p_\infty)$, 进而 $\lim \lambda_\varepsilon(p_i) \geq \lambda_\varepsilon(p_\infty)$ 。 $\square$

引理 13. 对于所有满足 $0 < d_g(p, q) \leq \varepsilon$ 的 $p, q \in X$,

$$\eta(\varepsilon/d_g(p, q))^{-1} \lambda_\varepsilon(p) \varepsilon \leq d(p, q) \leq \lambda_\varepsilon(p) \varepsilon.$$

证明. 设 $s \in \overline{B}(p, \varepsilon)$ 是在 (4.2) 中实现 p 最大值的点。由 (4.1),

$$\lambda_\varepsilon(p) \varepsilon = d(p, s) \leq \eta(\varepsilon/d_g(p, q)) d(p, q)$$

第一个不等式随之成立。第二个不等式直接来自 (4.2)。 $\square$

引理 14. 对于所有足够小的 $R \geq 1$, $\varepsilon > 0$, 以及具有 $R^{-1}\varepsilon \leq d_g(p, q) \leq R\varepsilon$ 的 $p, q \in X$, 其中

$$C^{-1} \lambda_\varepsilon(p) \leq \lambda_\varepsilon(q) \leq C \lambda_\varepsilon(p),$$

其中 $C = \eta(1)\eta(R)^2$ 。

证明. 由引理 5, 存在 $p', q' \in X$ 使得

$$d_g(p, p') = d_g(q, q') = \varepsilon.$$

因此, $d_g(p, p') \leq R d_g(p, q)$ 和 $d_g(p, q) \leq R d_g(q, q')$ 。连同 (4.1), 这些不等式给出

$$d(p, p') \leq \left(\frac{d_g(p, p')}{d_g(p, q)} \right) d(p, q) \leq \eta(R) \left(\frac{d_g(p, q)}{d_g(q, q')} \right) d(q, q') \leq \eta(R)^2 d(q, q').$$

结合引理 13 并将 (p, q) 替换为 (p, p') , 我们得到

$$\lambda_\varepsilon(p) \leq \eta(1) \frac{d(p, p')}{\varepsilon} \leq \eta(1)\eta(R)^2 \frac{d(q, q')}{\varepsilon} \leq \eta(1)\eta(R)^2 \lambda_\varepsilon(q).$$

这给出了第一个所声称的不等式; 第二个则由对称性得出。 $\square$

引理 14 在一点周围的球壳上界定了 λ_ε 。在球内界定 λ_ε 更为方便。这是下面的引理 15 的内容。通过将球置于另一点周围的球壳内部, 可从引理 14 推出。

引理 15. 对于所有足够小的 $R \geq 1$, $\varepsilon > 0$, 以及 $p, q \in X$ 满足 $d_g(p, q) < R\varepsilon$,

$$C^{-1}\lambda_\varepsilon(p) \leq \lambda_\varepsilon(q) \leq C\lambda_\varepsilon(p),$$

其中 $C = \eta(1)^2\eta(8R)^4$.

证明. 由推论 6 与 $r = R\varepsilon$, 存在一点 $s \in X$ 使得

$$8^{-1}R^{-1}\varepsilon \leq d_g(p, s) \leq 8R\varepsilon \quad \text{and} \quad 8^{-1}R^{-1}\varepsilon \leq d_g(q, s) \leq 8R\varepsilon.$$

应用引理 14 到 (p, s) 然后再到 (s, q) 得出所声称的不等式. $\square$

定义连续的黎曼度量 $g_\varepsilon := \lambda_\varepsilon^2 g$ 并令 d_ε 为在 X 上诱导出的度量.

引理 16. 对于所有足够小的 $R \geq 1, \varepsilon > 0$, 以及 $p \in X, d_\varepsilon$ 在 $B(p, R\varepsilon)$ 上是 C -双 Lipschitz 到 $\lambda_\varepsilon(p)d_g$, 其中 $C = \eta(1)^2\eta(16R)^4$.

证明. 对于 X 中的可求长曲线 γ , 设其相对于 g 和 g_ε 的长度分别为 $|\gamma|$ 和 $|\gamma|_\varepsilon$. 由引理 15, 对于每个足够小的 $\varepsilon > 0$, $p \in X$, 以及在 $B(p, 2R\varepsilon)$ 中的可求长曲线 γ ,

$$C^{-1}\lambda_\varepsilon(p)|\gamma| \leq |\gamma|_\varepsilon \leq C\lambda_\varepsilon(p)|\gamma|. \quad (4.3)$$

由引理 5 与 $r = R\varepsilon$, 对于每个足够小的 $\varepsilon > 0$ 和 $p \in X$, $B(p, R\varepsilon)$ 关于 g 是凸的. 因此, 在每个球内的点之间的 d_g 距离由一条位于该球内部的可求长曲线实现. 令 $q, s \in B(p, R\varepsilon)$. 距离 $d_\varepsilon(q, s)$ 等于连接 q 到 s 的可求长曲线 γ 的最小 d_ε 长度, 因此

$$d_\varepsilon(q, s) \leq C\lambda_\varepsilon(p)d_g(q, s)$$

通过 $B(p, R\varepsilon)$ 的 g 凸性和 (4.3). 如果此曲线位于 $B(p, 2R\varepsilon)$ 内, 则由 (4.3) 可知

$$C^{-1}\lambda_\varepsilon(p)d_g(q, s) \leq d_\varepsilon(q, s). \quad (4.4)$$

如果 γ 不在 $B(p, 2R\varepsilon)$ 内, 则它包含连接 $B(p, 2R\varepsilon)$ 边界到 q 和 s 的线段. 由 (4.3) 和事实 $q, s \in B(p, R\varepsilon)$, 这些片段每个的 d_ε -长度至少为 $C^{-1}\lambda_\varepsilon(p)R\varepsilon$, 所以 $d_\varepsilon(q, s) \geq 2C^{-1}\lambda_\varepsilon(p)R\varepsilon$. 最后, 由于相对于 g 的 $B(p, R\varepsilon)$ 的直径最多为 $2R\varepsilon$, 因此 $d_g(q, s) \leq 2R\varepsilon$, 所以 (4.4) 仍然成立, 结果随之得出. $\square$

定理的证明 1. 令 $R \geq 1$ 足够大 (仅取决于维度 n 的 X) 以及 $\varepsilon > 0$, 如同命题 10 中所述的两种情况. 定义 $C := \eta(1)^2\eta(16R)^4$. 令 $S_\varepsilon \subset (X, d_g)$ 为一个 $\varepsilon/2$ -网.

由 [3, Theorem 4.45], 光滑流形上的每一个连续函数都是光滑函数序列的一致极限. 令 $\tilde{\lambda}_\varepsilon : X \rightarrow (0, \infty)$ 是一个光滑函数, 使得

$$2^{-1}\lambda_\varepsilon(p) \leq \tilde{\lambda}_\varepsilon(p) \leq 2\lambda_\varepsilon(p) \quad \forall p \in X. \quad (4.5)$$

令 ρ_ε 是由黎曼度量 $h_\varepsilon := (4C\tilde{\lambda}_\varepsilon)^2 g$ 在 X 上诱导出的度量. 我们在下面证明对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$, 在 $S_\varepsilon \times S_\varepsilon$ 上有 $d \leq \rho_\varepsilon$. 因此, 由 ρ_ε 和 $d_{S_\varepsilon \times S_\varepsilon}$ 确定的引理 8 的粘合度量 $\tilde{\rho}_\varepsilon$ 是良定义的, 并且局部

等距于 ρ_ε 。我们使用命题 10 下的结论来证明度量 ρ_ε 在一致拟对称意义上与 d_g 相同。然后我们注意到，当 ε 趋于零时，这些度量在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到 d 。

拟对称条件。我们现在验证命题 10 的假设条件，在其中将 ε 替换为 $\varepsilon/2$ 后，由 d_g 、 ρ_ε 和 d 满足这些条件。由假设， d_g 对于任何满足 $\eta_1 \geq \eta$ 的同胚 $\eta_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 均为 η_1 -拟对称到 d 。令 $s \in S_\varepsilon$ 。由引理 16， $\lambda_\varepsilon(s)d_g$ 在 $B(s, R\varepsilon)$ 上是 C -双 Lipschitz 到 d_ε 。因此， $\lambda_\varepsilon(s)d_g$ 在 $B(s, R\varepsilon)$ 上通过 (4.5) 是 $8C^2$ -双 Lipschitz 到 ρ_ε 。因此，根据引理 3，对于任何满足 $\eta_1(t) \geq (8C^2)^2 t$ 的同胚 $\eta_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ， $\lambda_\varepsilon(s)d_g$ 和 d_g 在 $B(s, R\varepsilon)$ 上是 η_1 -拟对称到 ρ_ε 。

令 $s, s' \in X$ 满足 $\varepsilon/2 \leq d_g(s, s') < \varepsilon$ 。因此， $\eta(\varepsilon/d_g(s, s')) \leq \eta(2)$ 。由引理 13 结合 $d_g(s, s')$ 的界限，

$$\eta(2)^{-1} \lambda_\varepsilon(s) d_g(s, s') \leq \eta(2)^{-1} \lambda_\varepsilon(s) \varepsilon \leq d(s, s') \leq \lambda_\varepsilon(s) \varepsilon \leq 2 \lambda_\varepsilon(s) d_g(s, s').$$

结合引理 16，这给出

$$C^{-1} \eta(2)^{-1} d_\varepsilon(s, s') \leq d(s, s') \leq 2C d_\varepsilon(s, s').$$

由于 $\rho_\varepsilon/4C$ 是到 d_ε 的 2-双 Lipschitz， $4^{-1} \rho_\varepsilon(s, s') \leq 2C d_\varepsilon(s, s') \leq \rho_\varepsilon(s, s')$ 。因此，

$$(8C^2 \eta(2))^{-1} \rho_\varepsilon(s, s') \leq d(s, s') \leq \rho_\varepsilon(s, s'). \quad (4.6)$$

由不等式组 (4.6) 中的第一个不等式，当用 $\varepsilon/2$ 替换 ε 时，(3.1) 对任何 $L \geq \max\{1, 8C^2 \eta(2)\}$ 都成立。

假设现在 $p, q \in X$ 满足 $d_g(p, q) \geq \varepsilon/2$ 。令 γ 是相对于 h_ε 连接 p 到 q 的最短测地线，这是由引理 7 提供的。令 $s_0, s_1, \dots, s_l$ 为 γ 上的一系列点，使得 $s_0 = p$ ， $s_l = q$ 和 $\varepsilon/2 \leq d_g(s_i, s_{i+1}) < \varepsilon$ 对于 $0 \leq i \leq l-1$ 成立；这样的序列可以通过迭代取中点生成。然后，通过三角不等式，(4.6) 中的第二个不等式，以及 γ 是最短长度的事实，

$$d(p, q) \leq \sum_0^{l-1} d(s_i, s_{i+1}) \leq \sum_0^{l-1} \rho_\varepsilon(s_i, s_{i+1}) = \rho_\varepsilon(p, q).$$

因此，在 $S_\varepsilon \times S_\varepsilon$ 上， $d \leq \rho_\varepsilon$ 如所声称的那样。根据命题 10，存在一个同胚 $\eta_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ，仅取决于 n 和 η ，使得 d_g 是 η_2 次对称到 $\tilde{\rho}_\varepsilon$ 。

格罗莫夫-豪斯多夫收敛。令 $\mu_\varepsilon := \max\{C, 1\}(\max_X \lambda_\varepsilon)$ 。集合 S_ε 是 $\mu_\varepsilon \varepsilon$ -稠密子集于 (X, d) 和 $(X, \tilde{\rho}_\varepsilon)$ 。因此，它在 Gromov-Hausdorff 距离上与这些空间中的每一个都是 $\mu_\varepsilon \varepsilon$ -接近的，所以它们彼此之间是 $2\mu_\varepsilon \varepsilon$ -接近的。因此只需证明当 ε 趋于零时， $2\mu_\varepsilon \varepsilon$ 也趋于零。由引理 4，存在 $C' \geq 1$ 和 $0 < \alpha \leq 1$ 使得对于每个点 $p \in X$ 有 $\varepsilon \lambda_\varepsilon(p) \leq C' \varepsilon^\alpha$ 。结论得证。□

石溪大学数学系，纽约州石溪，11794

spencer.cattalani@stonybrook.edu

参考文献

- [1] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 2003
- [2] M. Bonk and B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres*, Invent. Math. 150 (2002), no. 1, 127–183
- [3] G. Folland, *Real Analysis*, 2nd Ed., Wiley, 1999
- [4] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Universitext, Springer-Verlag, 2001
- [5] J. Heinonen and P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. 181 (1998), no. 1, 1–61
- [6] D. Ntalampekos, *Characterization of quasispheres via smooth approximation*, arXiv:2502.10006 (2025)
- [7] D. Ntalampekos and M. Romney, *Polyhedral approximation and uniformization for non-length surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (2024), published online first
- [8] D. Ntalampekos and M. Romney, *Polyhedral approximation of metric surfaces and applications to uniformization*, Duke Math. J. 172 (2023), no. 9, 1673–1734
- [9] D. Meier and S. Wenger, *Quasiconformal almost parametrizations of metric surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (2024), published online first