

高维环面流形的网格划分来自拟周期三体问题的动力学，使用离散一形式的参数化方法

Dante Basile*, Xavier Tricoche[†], and Martin Lo[‡]

高维视觉计算机模型正准备革新空间任务设计过程。圆形限制三体问题 (CR3BP) 产生了高维环面流形，这对任务设计师来说具有极大的兴趣。我们提出了一种网格技术，该技术利用一种嵌入无关的参数化方法，以实现拓扑准确建模和直观可视化任意高维嵌入空间中的环面流形。这项工作描述了将基于离散一形式的环面点云网格化方法扩展到沿着 CR3BP 中准周期轨道采样的高维点云。通过应用一种嵌入无关的三角侧性分配算法，使生成的网格得到增强。这显著提高了这些网格在被降投影至三维以供可视化后的直观解释能力。这些模型提供了新颖的表面基础表示形式，用于描述迄今为止仅展示为点或曲线的高维拓扑结构。这一成功证明了微分几何方法对于表征具有复杂、高维嵌入空间流形的有效性，并为此类系统的高维解空间的新模型和可视化奠定了基础。此类表示有望通过应用已被证实的计算表面可视化和分析方法到潜在解决方案流形上，增强三体问题在视觉检查和设计航天任务轨道方面的实用性。

介绍

在此工作中，我们开发了一种点云网格化技术，用于建模和可视化圆形限制三体问题 (CR3BP) 的解空间。航天器在 CR3BP 中的位置和运动由动力系统¹描述。利用 CR3BP 的动力学进行太空任务轨迹设计至关重要，因为减少燃料消耗可以增加科学载荷容量。弹道轨迹，即仅受重力影响的航天器的轨迹，不需要消耗燃料。CR3BP 的动力学预测沿环面（甜甜圈形状）流形的弹道轨迹。这些动力学在相空间中被研究，在该空间中需要三维位置和速度来定义所有与轨迹设计相关的参数。因此，这些流形存在于 4D-6D 空间中，使得用有见地的可视化表示它们变得具有挑战性。为了解决这一挑战，我们提出了一种基于参数化的嵌入无关网格化方法，用于高维环面点云。这种方法有望通过使任务设计者能够建模和可视化真实且通常是前所未见表面表示的数值采样点云解空间，提高太空任务设计的有效性和直观性。

*PhD Student, Department of Computer Science, Purdue University, 610 Purdue Mall, West Lafayette, IN 47907, dbasile@purdue.edu

[†]Associate Professor, Department of Computer Science, Purdue University, 610 Purdue Mall, West Lafayette, IN 47907, xmt@purdue.edu

[‡]Principal Engineer, Mission Design and Navigation Section, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91109, United States, martin.w.lo@jpl.nasa.gov

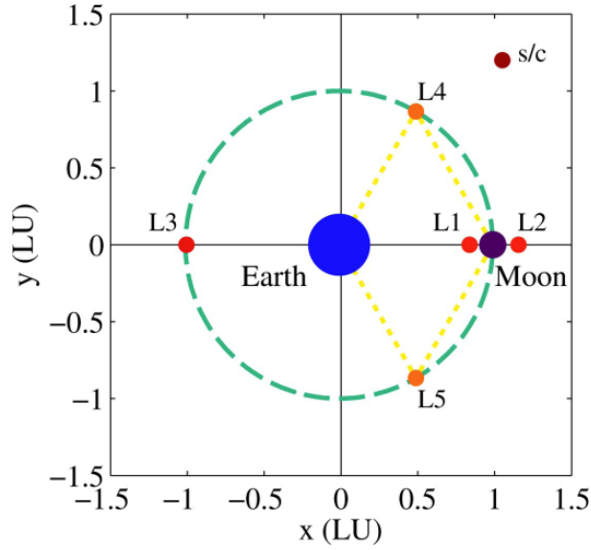


图 1: CR3BP 显示在旋转框架中。地球是 m_1 ，用蓝色点表示，而月球是 m_2 ，用紫色点表示。 m_1 和 m_2 分别位于 x 轴上的 0 和 1 处。标记为 s/c 的深红色点代表接近中的航天器 m_3 。拉格朗日点 L1、L2 和 L3 用红色点表示。拉格朗日点 L4 和 L5 用橙色点表示。绿色虚线显示了 m_2 绕 m_1 的轨道。黄色虚线表示在由 m_1 、 m_2 和任一拉格朗日点形成的等边三角形的第三个顶点处 L4 和 L5 的位置。

CR3BP 是一个动力学系统，描述了三个在空间中相互绕行的天体的位置和速度^{2,3}。我们考虑一个无质量天体 m_3 （通常是一艘航天器）围绕两个大质量天体 m_1 和 m_2 运动的情况，这两个大质量天体代表太阳和一颗行星或一颗行星及其卫星。我们应用标准重心归一化坐标，定义质量参数 μ 为

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

使得 m_1 是主天体的质量，而 m_2 是次天体的质量。根据惯例， $m_1 \geq m_2$ 。这导致了约束条件 $\mu \in (0, 0.5)$ 。

m_1 和 m_2 存在于围绕它们的质心的圆形轨道上。我们在旋转框架中考虑 CR3BP，使得 m_1 和 m_2 在 x 轴上的位置固定在 $x_1 = -\mu$ 和 $x_2 = 1 - \mu$ 。这种布置的可视化表示见图 1。 m_3 的状态 $\mathbf{x}$ 定义为

$$\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{r}$ 表示位置， $\mathbf{v}$ 表示速度。

m_3 的质量相对于 m_1 和 m_2 来说被认为是微不足道的。因此，我们限制它对这两个较

大的天体没有引力影响，规定了受限三体问题。运动方程在 CR3BP 旋转框架中为

$$\ddot{x} = -\left((1-\mu)\frac{x+\mu}{\|\mathbf{r}_1\|^3} + \mu\frac{x-1+\mu}{\|\mathbf{r}_2\|^3}\right) + x + 2\dot{y} \quad (5)$$

$$\ddot{y} = -\left((1-\mu)\frac{y}{\|\mathbf{r}_1\|^3} + \mu\frac{y}{\|\mathbf{r}_2\|^3}\right) + y - 2\dot{x} \quad (6)$$

$$\ddot{z} = -\left((1-\mu)\frac{z}{\|\mathbf{r}_1\|^3} + \mu\frac{z}{\|\mathbf{r}_2\|^3}\right) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 定义为

$$\mathbf{r}_1 = [(x+\mu), y, z]^\top \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_2 = [(x-1+\mu), y, z]^\top \quad (9)$$

增广势能方程为

$$U(\mathbf{r}) = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{(1-\mu)}{\|\mathbf{r}_1\|} = \frac{\mu}{\|\mathbf{r}_2\|} \quad (10)$$

其定义了雅可比常数为

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 2U(\mathbf{r}) - \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \quad (11)$$

CR3BP 的五个平衡点被称为滞后点或拉格朗日点，标记为 L1-L5。滞后点的雅可比常数通过设置 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 来计算。

任务设计师依赖于他们对 CR3BP 的理解来识别提供明确的、长期弹道解决方案的具体轨道，这些解决方案能维持与感兴趣目标的接近或反复飞越。许多轨道具有可以利用的周期性或拟周期性行为，以降低解空间的复杂度。周期轨道在每个周期遵循相同的路径，并且局限于一个封闭曲线或 1-环面内。拟周期轨道 (QPOs) 的路径随着每个周期而演变，并受限于一个圆环或 2-环面¹。这个环面是一个不变流形，意味着轨道轨迹被系统的恒定能量约束在其表面上。拟周期轨道在相空间中非常丰富。它们为任务设计师提供了一系列广泛的轨迹，确保设计的灵活性。此外，QPOs 允许航天器随着时间覆盖广阔的区域，并可用于观察一个广泛区域，如月球整个表面。

当前，流形由从动力系统数值积分采样的点云表示。沿流形发生的周期现象可以使用庞加莱映射捕捉^{4,5}。这些模型已经证明了利用视觉技术指导空间任务轨迹设计的有效性^{6,7}。然而，这种方法在可解释的状态空间维度数量上存在根本性的限制，因此仅限于二维平面 CR3BP (PCR3BP)，其中 4D 相空间可以使用基于雅各比常数的简化和限制到庞加莱截面来减少到 2D 庞加莱映射⁸。在 CR3BP 中考虑赤道平面外的运动向相空间添加了一个额外的位置和速度，并产生了难以可视化的 4D 庞加莱映射。考虑到椭圆限制三体问题 (ER3BP) 会阻止相空间公式中的雅各比常数简化，进一步通过增加一个维度来提升维度。随着分析寻求从 PCR3BP 过渡到具有 6D 相空间的完整三维情况，将需要与高维嵌入空间兼容的表面

表示形式。因此，扩展模型的维度对追求越来越接近和全面飞越的任务至关重要⁹。

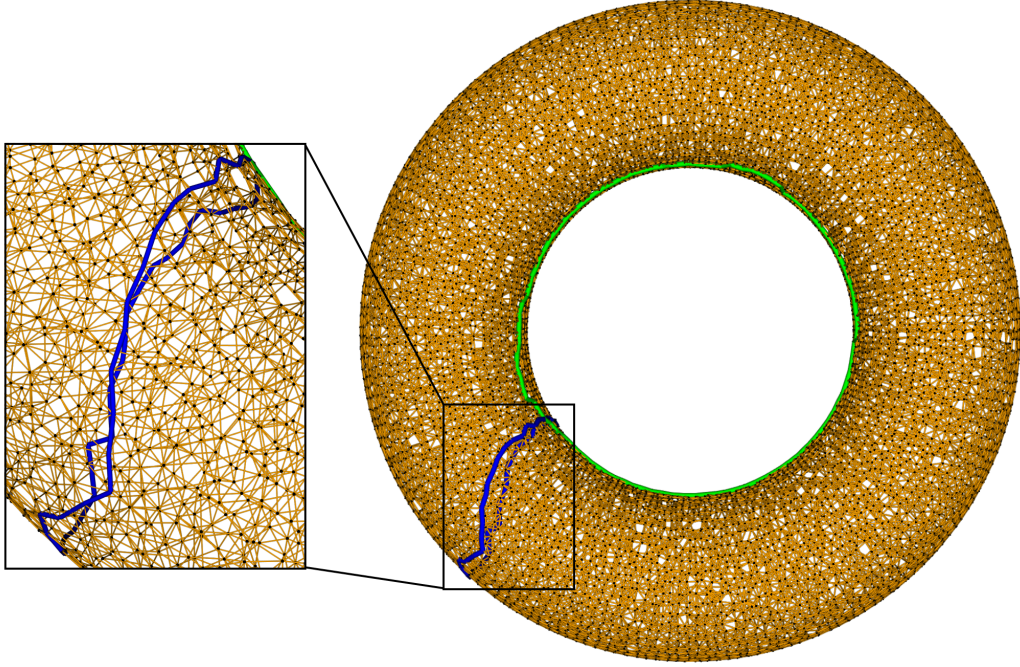
高维建模和可视化的进展在空间任务设计的最前沿越来越受到重视。任务达到了复杂性水平，使得以前有效的假设开始失效。例如，像欧罗巴快船这样的任务涉及接近气态巨星卫星的飞掠。对于欧罗巴快船来说，进行详细的表面研究以探测未来的着陆点并评估地下液态海洋的可能性是必要的。跟随欧罗巴快船的任务，如“欧罗巴登陆器”概念，将需要设计捕获和降落机动操作。此类任务将需要利用 QPOs 来实现越来越复杂的轨迹。在赤道平面之外的运动对于研究一个天体的整个表面是必需的。特别是，有许多天体的极地地区具有特定的研究兴趣。从赤道平面上难以研究极区，因此超出平面假设的模型对于这些区域的研究是有利的。计划此类任务将通过能够代表完整的 3D CR3BP 的可视化模型得到极大增强。此外，李萨茹轨道和晕轮轨道是超出赤道平面轨迹的显著例子。这些轨道对月球任务越来越具有吸引力。椭圆轨道允许接近天体表面的飞掠，并且在航天器绕行其他目标天体时也有用处。这两种情况都与即将到来的欧罗巴快船任务相关。近距离飞掠对于侦察适合着陆点的地形是必需的。此外，快船将围绕木星运行，椭圆轨道允许它定期到达欧罗巴的位置。

为了解决这一复杂需求，依赖较少假设的日益复杂的模型可以利用高维表面网格。这些允许以点云形式离散数值解来近似由三角形构成的连续表面。这种近似是必要的，因为沿着不变流形集成轨迹进行密集采样在计算上不可行。然而，高维表面的降维可能会导致明显的自交现象。QPOs 的环面流形在能量表面上以拓扑非平凡的方式嵌入。因此，将这些流形投影到 3D 空间用于可视化会导致自交伪影。配置空间中的嵌入环面会两次向内翻转变换以保持其定向性。可视化这个环面的稳定和不稳定流形提出了巨大的挑战。此外，这些环面在相空间中具有复杂的分形层次结构¹⁰。这类现象的空间复杂性促使使用原生高维嵌入空间中的网格以及所需的可视化技术来使其解释直观化。点场三角化的标准方法是狄洛尼三角化。然而，当应用于存在二维嵌入空间的点云时，狄洛尼三角化只生成二维表面流形。因此，需要点云的二维参数化表示。如果这个低维表示在拓扑上有效，我们可以简单地将三角化结果应用到原始点云网格中。这允许使用狄洛尼三角化来对嵌入高维空间中的二维表面进行网格划分。

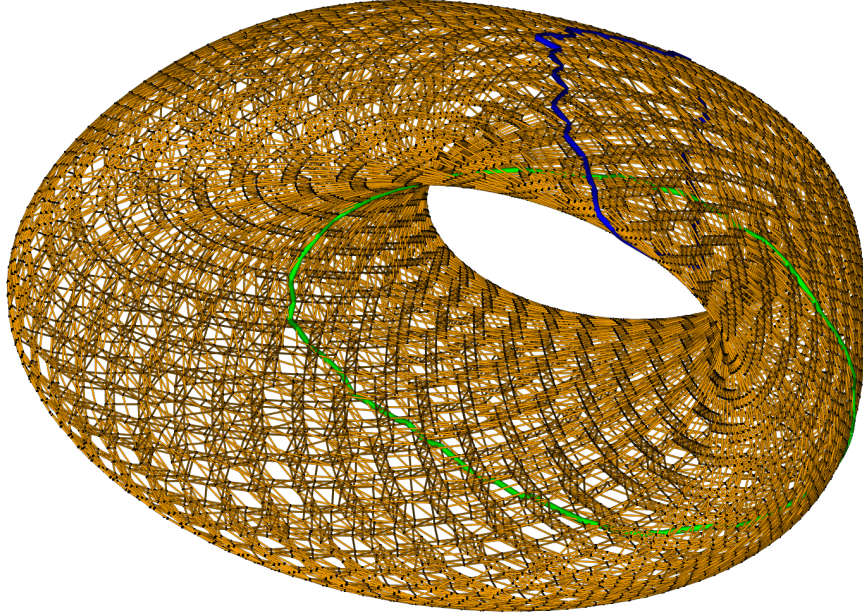
方法

我们的高维网格生成技术是 Tewari 等人最初为 3D 空间中的 2-环面网格设计的参数化方法的一种新颖扩展。¹¹。我们利用点云是从具有环状拓扑结构的 2-流形中采样这一知识，创建一个明确强制执行拓扑正确性的参数化。首先，使用 k 最近邻图 (KNNG) 建立点连接性。然后计算该图的最小循环基 (MCB)¹²。环面的拓扑结构保证了这个基中的两个最大循环捕捉到了周期性的两个轴线，而其余的循环则代表闭合边界回路。这是因为环面对其环向和极向坐标都表现出周期性行为。这种行为的一个示例在图 2 中展示。这些信息可以用于构造必要的共闭和闭合方程，将 KNNG 图中的边视为离散的一形式。

Tewari 等人对此方法的描述在此完整给出。二维网格参数化方法通常将网格展平到平



(a) 来自合成数据的三维环面流形



(b) 四维环面流形通过标准映射采样，投影到三维空间

图 2: 在一个具有环面拓扑结构的 KNN (橙色边所示) 中, MCB 中的两个最大循环被视为不平凡循环。它们捕捉了沿环面和纬向轴的环面流形的周期性。环面循环 (绿色边所示) 围绕着环中心的空洞, 在返回其起始顶点时走的是长路径。纬向循环 (蓝色边所示) 围绕着环面本身, 在返回其起始顶点时走的是短路径。数值计算得到的点集用黑色显示。

面，使得结果面不相交且最小失真。Tutte¹³ 证明了一个具有圆盘拓扑结构的流形网格可以被参数化，每个内部顶点在平面上的位置是其邻居位置的质心。然后 Tutte 证明了对于一个平面图 G ，它有 B 个边界顶点、 V 个内部顶点、 E 条边和 F 个面，如果 G 是 3-连通的，如三角剖分一样，则平面上的面具有正面积且不相交。此嵌入在平面中所有具有相同边界条件的 G 绘图中，最小化了边长平方和。此外，Floater¹⁴ 证明，在每个内部顶点 v 的位置为其邻居 x_i 的某些任意凸组合的情况下，这样的嵌入对于加权边仍然存在

$$\forall i \in \{1, \dots, V\} \quad x_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} x_j \quad \sum_{j \in N(i)} w_{ij} = 1, \quad \forall j \quad w_{ij} \geq 0 \quad (12)$$

其中 $N(i)$ 是顶点 i 的邻居集。这可以代数化简为

$$\forall i \in \{1, \dots, V\} \quad 0 = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (x_i - x_j) \quad (13)$$

离散一形式是表示样本点之间成对距离的半边。它们定义为 $\Delta x_{ij} = x_i - x_j$ ，其中 $\Delta x_{ij} = \Delta x_{ji}$ 。使用离散一形式和方程 (13)，我们定义共闭性方程以确保每个顶点的值是其邻居的凸组合

$$\forall v \in \{1, \dots, V\} \quad 0 = \sum_{e \in \delta v} w_e \Delta x_e \quad (14)$$

其中 v 是一个顶点， e 是一半边， δv 是从 v 定义为指向外部的一系列半边集合。闭合方程确保循环返回其初始值，使离散一形式作为面边界拼接在一起

$$\forall f \in \{1, \dots, F\} \quad 0 = \sum_{e \in \partial f} \Delta x_e \quad (15)$$

其中 f 是一个面， ∂f 是边界 f 的半边集合。该方法将面视为循环。回想一下，除环面 MCB 的两个最大循环外的所有循环都代表闭合边界回路。我们可以将这些闭合边界回路视为等同于 ∂f 。然后，公式 (15) 被重新表述为

$$\forall c \in \{1, \dots, C-2\} \quad 0 = \sum_{e \in \partial f} \Delta x_e \quad (16)$$

其中 $\{1, \dots, C-2\}$ 代表按长度从最小到最大排序的 MCB 循环列表中的所有除最后两个循环外的循环，等价于根据先前定义表示闭合边界环路的循环。结合公式 (14) 和公式 (16) 指定了一个在表面上任何封闭补丁内可积的参数化。解这个方程组，我们获得了一种二维参数化，在该参数化中可以对流形表面进行 Delaunay 三角剖分。然后从在参数空间进行了三角剖分的补丁集构建网格。这些补丁通过广度优先搜索从 KNNG 上随机采样的种子顶点开始扩展，并从环面获取。环面的拓扑结构保证了这些补丁具有圆盘拓扑。因此，它们与上述

参数化技术兼容。这种参数化的严格构造保证了在给定足够高的采样密度时，补丁之间的一致性和拓扑正确性。

我们已经改进了这种方法，使其能够在 4D-6D 空间中浸入的 2-环面上运行。参数化构造仅需要沿着流形表面积离散的一形式。这些使用共闭性和闭合性方程来定义。反过来，这一组方程仅依赖于用于通过 KNNG 建立连接性的距离函数以及确保相对于 MCB 强制执行环面拓扑的保证。这两个标准都与嵌入空间的维数无关，从而使该方法能够在任意高维的嵌入空间中运行。与现有的技术不同，该算法提供了与高维嵌入空间兼容性及表示环面双重周期性的拓扑保证。

流形被网格化，然后投影到三维嵌入空间中进行交互式可视化。网格表示使我们能够仅基于三角形邻接关系来分配和着色流形的侧向性。对于种子三角形而言，通过为其顶点分配任意顺序来定义侧向性。这种排序在三角形的边定义了一个方向。然后通过为相邻三角形分配排序使得共享一条边的一对邻居给这条共享边赋予相反的方向来传播定向。三角形顶点顺序隐含地定义了类似叉积的方式进行定向。仅基于顶点顺序分配定向允许成功忽略嵌入空间的维度性。这导致流形在其高维原生空间中的侧向性的可视化表示与直观的 3D 表面表示无缝集成。由于这种分配相对于高维空间是准确的，因此它突出了由投影到三维引起的自交伪影。参数化、网格生成过程和可视化的计算性能很高，因为它们能够利用并行化。三角形网格是基础图形原语，并可以利用 GPU 计算来满足实时用户交互的要求。

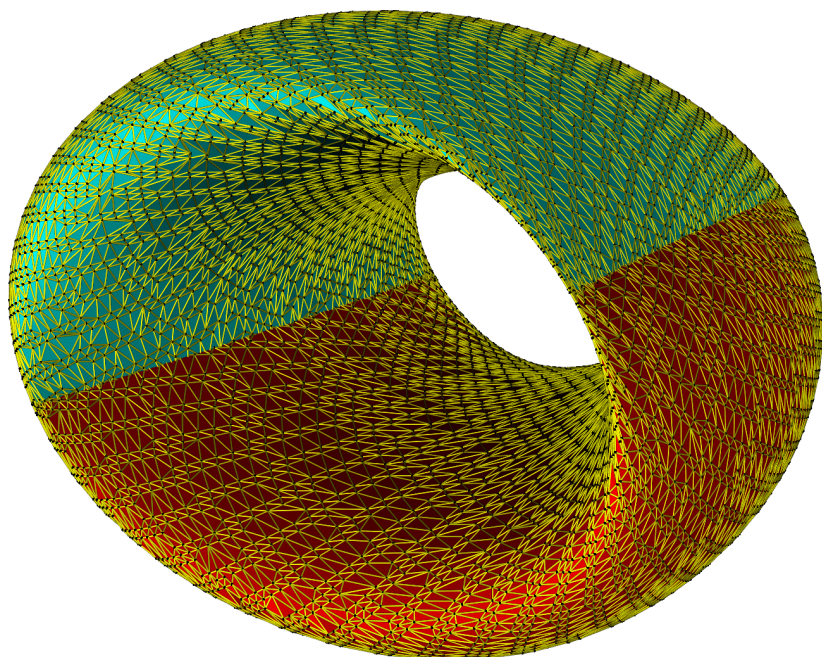
结果

我们的工作产生了第一个已知的使用标准映射采样的 4D 流形网格。这一令人兴奋的结果如图 3a 所示。由于点云是通过映射生成的，因此没有可以利用的高级轨迹结构，这突出了我们嵌入无关、基于参数化的方法的重要性。此外，我们的工作还首次成功地对嵌入土卫二（恩克拉多斯）南极轨道轨迹解 6D 状态空间中的不变流形进行了网格划分，如图 3b 所示。这些数据由 NASA 喷气推进实验室的一组任务设计师提供，他们对我们这项技术表现出了极大的兴趣，并渴望在未来的工作中使用这段代码。高维流形的准确表示将对未来的任务大有裨益，这些任务试图通过接近飞掠来搜索南极液态喷射中的生命迹象。

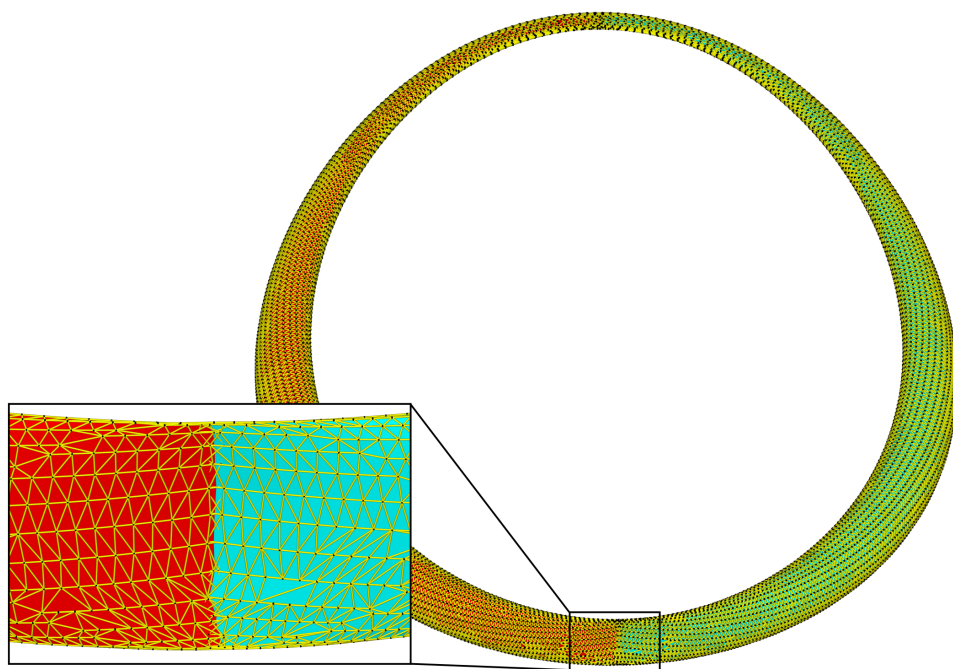
讨论

网格生成的表面表示方法使得可以使用一系列以前不适用于点云表示的技术。示例包括点间连接性、沿表面遍历、侧向识别、边界检测、交集或碰撞检测、在已知解之间的表面上对新点进行连续插值，以及流形的拓扑表示和分析。未来工作的方向之一是使用基于表面的插值来采样状态空间中的感兴趣区域。这种做法比定位并整合穿过这些区域的轨迹要计算效率高得多，从而提高了实时用户交互的有效性。

进一步改进模型的机会在于网格优化的潜力。现有大量关于网格细化方法的文献。然而，其中大部分是为具有更高网格灵活性的低维模型开发的，例如位置维度上的 LIDAR 数



(a) 四维环面流形通过标准映射采样，并投影到三维空间



(b) 六维环面流形通过数值积分土星-土卫二系统中的拟周期轨道轨迹采样，降维投影至三维

图 3: 高维流形在其本征嵌入空间中使用参数化进行网格划分。所得的网格被降投影到 3D 以便可视化。三角形边缘显示为黄色。三角形颜色表示网格侧向性，以帮助解释由降投影产生的自相交伪影。数值计算得到的点集用黑色显示。

据。相比之下，我们的模型考虑了超出视觉空间的结构。此外，由于必须保持作为动态系统非常准确数值解表示的有效性，我们的点集与可变形假设不兼容。考虑到这一点，在我们的情况下移动点很难证明是合理的。同样，增加点以采样稀疏区域也很困难，因为首先必须找到并整合合适的轨迹。因此，这种建模技术有望从针对高维动态系统的专门网格细化技术的发展中受益。适当的网格改进必须围绕边选择进行。相应的修改将直接构建在网格算法内部。

该方法的应用范围也有机会扩展。目前，其参数化依赖于环面 MCB 的拓扑属性，限制了它仅适用于环面流形。然而，离散一形式仍然是此方法的核心原始概念。一形式代表所有曲面流形的基本特征，而离散一形式同样适用于在其拓扑上诱导出的任何图。因此，存在利用已建立和尚未开发的替代参数化方案以适应更多种类流形拓扑的可能性。此外，不直接基于 Delaunay 三角剖分的拓扑方法提出了具备截然不同的参数化方法或完全缺乏参数化的网格技术潜力。

此外，我们的方法大大增强了高维流形可视化的效果直观性。侧重点可视化对于由将高维流形下投影到 3D 空间所导致的自相交伪影提供了非常需要的清晰度。还需要进一步研究可视化，因为下投影仍然是一个不完美的解决方案，特别是在 5D 和 6D 空间中，必须同时忽略多个维度。传统的计算机屏幕仅直接表示 2D 空间，并且人类的空间推理仅适用于 3D。因此，需要进行降维以将可视化能力扩展到所需的 4D-6D。之前的努力已经展示了在这一方向上进步的潜力，这是我们当前积极研究的领域之一。^{10,15}

结论

此方法生成了前所未有的高维嵌入环面流形的计算表面表示，适用于理论和航天动力学应用。然而，仍存在一些有前景的机会来改进该方法结果的质量、多样性和展示方式。这将扩展其应用范围，涵盖越来越多的空间任务设计领域及以外的动力学建模挑战。最终，此方法展示了计算机图形学和微分几何方法在为空间任务设计提供高维轨道动力学的准确直观可视化方面的未开发潜力。

致谢

本工作部分在普渡大学完成，部分在美国国家航空航天局合同（80NM0018D0004）下，在加州理工学院喷气推进实验室完成。

参考文献

- [1] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 2nd edition ed., 1992.
- [2] H. Pollard, *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice Hall, 1966.
- [3] V. Szebehely, *Theory of Orbits - The Restricted Three Body Problem*. Academic Press, 1967.

- [4] P. Holms, “Celestial Mechanics, Dynamical-Systems Theory and “Chaos” ,” *Physics Reports*, Vol. 193, No. 3, 1990, pp. 137–163.
- [5] X. M. Tricoche, C. Garth, and A. Sanderson, “Visualization of Topological Structures in Area-Preserving Maps,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 17, No. 12, 2011, pp. 1765–1774.
- [6] B. P. McCarthy and K. C. Howell, “Leveraging quasi-periodic orbits for trajectory design in cislunar space,” *Astrodynamics*, Vol. 5, 2021, pp. 139–165.
- [7] D. Davis, S. Phillips, and B. P. McCarthy, “Trajectory design for Saturnian Ocean Worlds orbiters using multidimensional Poincaré maps,” *Acta Astronautica*, Vol. 143, 2018, pp. 16–28.
- [8] X. M. Tricoche, W. R. Schlei, and K. C. Howell, “Extraction and Visualization of Poincare Map Topology for Spacecraft Trajectory Design,” *arXiv*, 2020.
- [9] J. T. Blanchard, M. W. Lo, R. Restrepo, D. Landau, B. D. Anderson, and S. Elschot, “Using NRHO Invariant Funnels to Target Enceladus South Pole,” *J. of the American Astronomical Society*, Vol. 124, 2023. Preprint.
- [10] S. Lange, M. Richter, F. Onken, A. Bäcker, and R. Ketzmerick, “Global structure of regular tori in a generic 4D symplectic map,” *Chaos*, Vol. 24, 2014, pp. 917–926.
- [11] G. Tewari, C. Gotsman, and S. J. Gortler, “Meshing genus-1 point clouds using discrete one-forms,” *Computers & Graphics*, Vol. 30, No. 6, 2006, pp. 917–926.
- [12] K. Mehlhorn and D. Michail., “Implementing Minimum Cycle Basis Algorithms,” *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, Vol. 11, No. 2, 2006, pp. 1–14.
- [13] W. T. Tutte, “How to draw a graph,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 13, No. 3, 1963, pp. 743–768.
- [14] M. S. Floater, “Parameterization and smooth approximation of surface triangulations,” *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 14, 1997, pp. 231–250.
- [15] A. Haapala and K. C. Howell, “Representations of higher-dimensional Poincaré maps with applications to spacecraft trajectory design,” *Acta Astronautica*, Vol. 96, 2013.