

湍流模型的后验闭合：对称性是否被保留？

André Freitas^{*1,2}, Kiwon Um², Mathieu Desbrun³, Michele Bucciotti¹, Luca Biferale¹

¹Dept. Physics and INFN, University of Rome "Tor Vergata" and INFN, Italy

²LTCI, Télécom Paris, IP Paris, France

³LIX, Inria and École Polytechnique, IP Paris, France

*Corresponding author: andre.freitas@roma2.infn.it

2025 年 4 月 10 日

ABSTRACT

湍流建模仍然是流体动力学中的长期挑战。数据驱动方法的最新进展导致了一系列旨在解决这一问题的新颖方法的涌现。本工作基于 [1]，我们在其中引入了一种新的湍流壳模型闭合，使用了事后（或求解器在环中）的方法。与大多数基于深度学习的模型不同，我们的方法明确地将物理方程纳入神经网络框架，确保闭合受到基础物理学的约束，并因此获得了增强的稳定性和泛化能力。在这篇论文中，我们进一步分析了学到的闭合，探讨其能力和限制。特别地，我们观察联合概率密度函数以评估交叉相关性是否得到了良好保持，还是仅仅捕获了平均行为。此外，我们在惯性范围内调查倍增因子——相邻壳体之间的比率——的尺度不变性。虽然我们的模型在重现高阶可观察量（如平坦度）方面表现出色，但在截止附近破坏了这一已知对称性，表明存在一个基本限制。我们讨论这些发现对于三维湍流中的次网格规模建模的影响，并概述未来研究的方向。

1 介绍

湍流在自然界中无处不在，从早晨搅拌的咖啡到我们宇宙的原始状态 [2]。尽管它普遍存在，理解并建模湍流仍然是经典物理学中最具挑战性的任务之一。虽然我们不知道其控制方程已有超过一个世纪的时间，但湍流的完整现象学仍然难以捉摸。数值模拟湍流也非常计算密集型。自由度按雷诺数 $Re = uL/\nu$ 的幂律缩放，这意味着研究极高雷诺数的湍流在很大程度上仍然是不可能的。减少自由度的一种方法是大涡模拟 (LES) [3]，其中应用滤波器，通常在惯性范围内，以仅解析最大的、包含最多能量的漩涡。然而，为了闭合 LES 系统，必须对未解析的次网格尺度的影响进行建模。这构成了 LES 建模问题。这个问题通常是通过引入湍流扩散项来稳定系统的方法来解决的。这些解决方案尽管对于实际应用很有用，但未能捕捉到正确的次网格尺度统计量。此外，虽然在 LES 建模方面已经花费了几十年的研究时间，但在该领域仍然有很多非常基础的开放性问题。能否制定出一种亚格子封闭方法，准确地捕捉解析尺度的统计数据，特别是在高雷诺数流动中，间歇性起着关键作用的情况下？在湍流中，由于间歇性的存在，速度场不是统计自相似的，使得封闭方法必须考虑到次网格尺度的多重分形特性。

最近，深度学习 (DL) 方法因其在解决大涡模拟 (LES) 建模问题方面的潜力而受到关注。DL 在逼近具有未知函数形式的函数方面表现出色。通过从数据中学习，尽管以黑盒方式，DL 方法可以准确地逼近高维函数。

为了研究深度学习在该情境中的适用性，我们使用了湍流的壳模型 [4]。壳模型提供了三维同质各向同性湍流 (HIT) 的简化表示，为完整的纳维-斯托克斯方程提供了一个可处理的替代方案。尽管其简单，壳模型保留了诸如能量级联、间歇性、异常标度和多重分形能耗散等关键湍流现象。

我们的主要关注点在于次网格尺度 (SGS) 模型捕捉极端事件和罕见波动的能力，这需要高精度、广泛的统计采样以及较长的惯性范围。从数据中学习 SGS 模型需要长时间的演化，这对三维湍流的大涡模拟 (LES) 构成了根本性的挑战。这一挑战目前最佳的解决方法是通过壳层模型来实现。尽管三维均匀各向同性湍流 (三维 HIT) 的大涡模拟仍然是理想的测试案例，现有的基于机器学习的 LES 工具受限于其低分辨率和截止尺度接近强迫尺度的问题，阻碍了异常行为的出现。相比之下，壳层模型提供了一个更适合严格测试在强间歇条件下 LES 模型有效性的框架，并评估闭环求解器方法是否可以改进对极端波动随时间跟踪的效果。此外，更高阶统计量——尤其是四阶及以上——自然涉及傅里叶空间中的非局部相互作用，这意味着 SGS 波动能够以复杂的方式影响可解析尺度。这一观察结果在追求超出二阶矩精度时至关重要，因为二阶矩通常是 LES 验证的重点。因此，壳层模型提供了一个受控环境来探究闭合模型是否能正确捕捉这类高阶交互并保持跨尺度动力学。

几项先前的研究探讨了壳模型框架内的闭合问题。Biferale 等人。[5] 最初从现象学角度入手，使用 Kolmogorov 乘数来解决闭合问题。最近，Ortali 等人。[6] 采用深度学习来学习闭合关系，而 Domingues Lemos [7, 8] 将概率机器学习工具整合到壳模型的隐藏对称框架 [9] 中，以解决闭合问题。在这些发展的基础上，我们通过循环求解器方法 [1] 为基于可微物理范式的壳模型闭合问题做出了贡献 [10]。该方法在训练期间展开系统的时间，允许神经网络与控制方程的数值求解器在任意数量的时间步内进行交互，然后再计算损失函数。与其试图匹配瞬时的真实值先验的演化，我们采用了一种后验的方法，其中网络学习其误差如何在接收更现实的输入时随时间传播。通过检查高达十阶的高阶矩（如平坦度）来分析诱导闭合，结果表明与真实值有很好的 consistency，并且表现出无条件稳定的行为。

本文进一步扩展了这一研究，更深入地探讨了所学习的闭合。我们将主要关注已解析变量与未解析（即由神经网络预测）变量之间的相关性，以评估模型是否能准确捕捉到交叉相关性，还是仅仅能够捕捉到平均行为。此外，我们还将研究 Kolmogorov 乘数统计。这些是相邻壳层间速度波动的比率，并已被证明在完全发展的湍流的惯性区间内具有普适统计特性。它们是由 Kolmogorov 引入的，他假设了这些乘数的自相似统计和尺度不变性 [11]。我们将探讨次网格模型是否打破了这些乘数的尺度不变性，或者学习到的闭合能否在仅基于速度场的 L^2 范数训练的情况下保持这种对称性。

论文的其余部分结构如下。在第 2 节中，我们介绍了壳模型框架和问题的数学表述。第 3 节详细说明了闭环求解器方法以及后验闭合学习的方法论。在第 4 节中，我们展示了我们的结果，重点是统计特性和已知对称性的保持。最后，在第 5 节中，我们讨论了我们的发现，并概述了未来研究的潜在方向。

2 壳模型

壳模型是一类湍流模型。它们在傅里叶空间中模拟同质各向同性湍流，仅考虑不同壳之间的稀疏耦合。我们使用几何级数的壳对 1D 傅里叶空间进行离散化，在对数格子上等间距分布， $k_n = k_0 \lambda^n$ ，其中通常使用 $\lambda=2$ 和 $k_0=1$ 。我们考虑 Sabra 壳模型 [12]，其不同壳的动力学由以下常微分方程组描述：

$$\frac{du_n}{dt} = i \left(ak_{n+1}u_{n+2}u_{n+1}^* + bk_nu_{n+1}u_{n-1}^* - ck_{n-1}u_{n-1}u_{n-2} \right) - \nu k_n^2 u_n + f_n, \quad (1)$$

其中， $u_n \in \mathbb{C}$ 表示给定壳层 n 的速度波动。自由参数 a, b 和 c 被选择为满足 $a + b + c = 0$ ，这对应于无粘、无强迫极限下的能量 $E = \sum_n |u_n|^2$ 和螺旋度 $H = \sum_n (a/c)^n |u_n|^2$ 的守恒，模仿欧拉方程中的二次无粘不变量。

Equation 1 的右端第一项表示非线性项，可以看到只有最近邻和次近邻相互作用被保留下来，使得该模型在傅里叶空间中局部化；第二项代表粘性项；第三项代表大尺度强迫。

左边界条件是 $u_{-1} = u_{-1} = 0$ 。对于完全解析的系统，我们对壳 $n=0, \dots, N$ 积分 Equation 1，其中选择 N 具有耗散截止尺度 N_η 的一些余量，以充分解析所有动力学。在以 LES 方式关闭系统的情况下，我们必须考虑一个截止壳 N_c ，在此之后我们只需要建模壳 N_c+1 和 N_c+2 （左侧的 BCs 保持不变），如 Figure 1 所示。这些壳的速度场将出现在 u_{N_c-1} 和 u_{N_c} 的方程中：

$$\frac{du_{N_c}}{dt} = i \left(k_{N_c+1} u_{N_c+2} u_{N_c+1}^* - \frac{1}{2} k_{N_c} u_{N_c+1} u_{N_c-1}^* + \frac{1}{2} k_{N_c-1} u_{N_c-1} u_{N_c-2} \right) - \nu k_{N_c}^2 u_{N_c} \quad (2a)$$

$$\frac{du_{N_c-1}}{dt} = i \left(k_{N_c} u_{N_c+1} u_{N_c}^* - \frac{1}{2} k_{N_c-1} u_{N_c} u_{N_c-2}^* + \frac{1}{2} k_{N_c-2} u_{N_c-2} u_{N_c-3} \right) - \nu k_{N_c-1}^2 u_{N_c-1} \quad (2b)$$

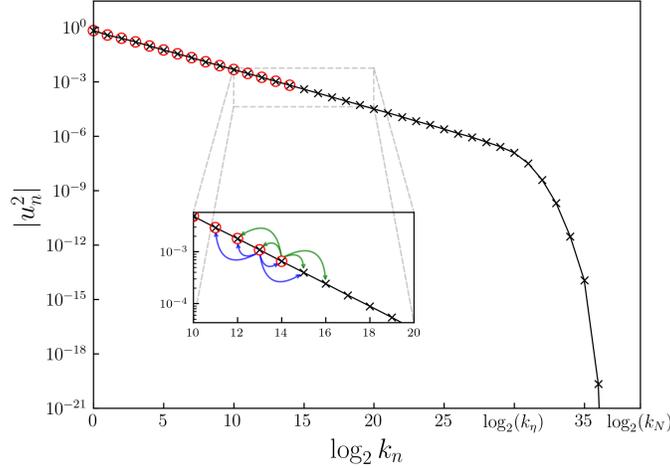


图 1: 能量谱 $|u_n|^2$ 作为波数 k_n 的函数。红色圆圈标记表示简化的系统，而黑色十字代表完全解析的系统。插图放大了截止区域，突出了通过三元相互作用的非线性能量传输，蓝色和绿色箭头分别指示截止前两个壳层的交互。很明显，为了闭合系统，只需要在截止后的两个壳层来建模即可。x 轴以 $\log_2 k_n$ 为单位标记，Kolmogorov 尺度 k_η 和最大解析波数 k_N 处有标记。

3 后验的闭包

为了闭合系统，我们使用一个深度神经网络来预测两个缺失的壳层， u_{N_c+1} 和 u_{N_c+2} ，输入为三个前驱壳层。与先验的方法不同，该方法训练模型以最小化一步误差，我们采用事后或循环中的求解器策略，在这种策略中，神经网络在不断演化的模拟中运行。这使得它不仅能够学习准确的短期预测，还能了解其自身的错误如何随时间传播并影响系统的长期行为。

机器学习中一个常见的挑战是分布变化，即当模型在做出若干预测后遇到从未在训练过程中见过的状态时，导致错误增加。这在自回归生成模型中尤为明显，例如语言模型预测文本序列 [13]。同样，在基于物理的建模中，不完美的闭包会导致累积偏差，将系统推入未经过训练的相空间区域。通过直接将神经网络嵌入到控制方程中，我们确保它在现实条件下学习，从而减轻分布变化的影响。这种方法提高了稳定性、改善了泛化能力，并使闭包更具物理一致性。

令简化的系统 $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{N_c})$ 存在于 LES 流形 \mathcal{S} 中，而完整的系统 (u_0, u_1, \dots, u_N) 跨越参考流形 \mathcal{R} 。壳体模型的控制方程定义了一个在 \mathcal{R} 上的动力系统，但大涡模拟将该系统截断到 \mathcal{S} ，引入了闭合误差。为了弥合这一差距，我们引入了一个由神经网络参数化的校正算子 $\mathcal{C} : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathcal{R}}$ ，其中 $\bar{\mathcal{R}}$ 表示被限制在已解决尺度 $(u_0, u_1, \dots, u_{N_c})$ 上的截断参考流形。该算子预测未解析壳体 $\tilde{u}_{N_c+1}, \tilde{u}_{N_c+2} = \mathcal{C}(\tilde{u}_{N_c-2}, \tilde{u}_{N_c-1}, \tilde{u}_{N_c})$ ，通过显式时间积分缺失项使在 \mathcal{C} 中重建完整状态成为可能：这对应于通过四阶龙格-库塔方案集成的已解决项的一种加性校正。

操作符 \mathcal{C} 实现为一个全连接的前馈神经网络（多层感知器，MLP），具有 L 个隐藏层。给定输入向量

$$\mathbf{x} = (\tilde{u}_{N_c-2}, \tilde{u}_{N_c-1}, \tilde{u}_{N_c}) \in \mathbb{C}^3,$$

输出 $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_{N_c+1}, \tilde{u}_{N_c+2}) \in \mathbb{C}^2$ 是通过一系列仿射变换和非线性激活函数计算得出的：

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(0)} &= \mathbf{x}, \\ \mathbf{h}^{(\ell)} &= \sigma(\mathbf{W}^{(\ell)}\mathbf{h}^{(\ell-1)} + \mathbf{b}^{(\ell)}), \quad \text{for } \ell = 1, \dots, L, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{W}^{(L+1)}\mathbf{h}^{(L)} + \mathbf{b}^{(L+1)}. \end{aligned}$$

这里， $\mathbf{W}^{(\ell)}$ 和 $\mathbf{b}^{(\ell)}$ 分别是第 ℓ 层的权重矩阵和偏置向量，而 $\sigma(\cdot)$ 是一个非线性激活函数，在我们的例子中为 ReLU。最后一层具有线性激活函数以确保输出值无限制。

系统的演化由一个离散求解器 \mathcal{P} 控制，通过以下方式推进已解析的壳层：

$$\tilde{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{u}_{N_c+1}, \tilde{u}_{N_c+2}),$$

其中 $\tilde{\mathbf{u}}(t) = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N_c})_t$ 。与训练以最小化单步误差的先验的闭合模型不同，我们的后验的方法将 \mathcal{C} 循环地整合到 \mathcal{P} 中。

在训练过程中，求解器与 \mathcal{C} 交互 m 步，使其暴露于自身的误差动态中。损失函数评估了参考轨迹在这段时间范围内的偏差：

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^\theta, \mathbf{u}^{\text{ref}}) = \sum_{k=1}^m \|\tilde{\mathbf{u}}^\theta(t + k\Delta t) - \mathbf{u}^{\text{ref}}(t + k\Delta t)\|_2^2, \quad (3)$$

其中 \mathbf{u}^{ref} 是从 \mathcal{R} 的直接数值模拟中获得的。然后将优化问题表述为：

$$\min_{\theta} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^\theta, \mathbf{u}^{\text{ref}}),$$

其中 $\theta = \{\mathbf{W}^{(\ell)}, \mathbf{b}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{L+1}$ 代表神经网络参数。这一多步骤优化确保了 \mathcal{C} 能够学习减少误差累积和分布偏移，如 Figure 2 所示。

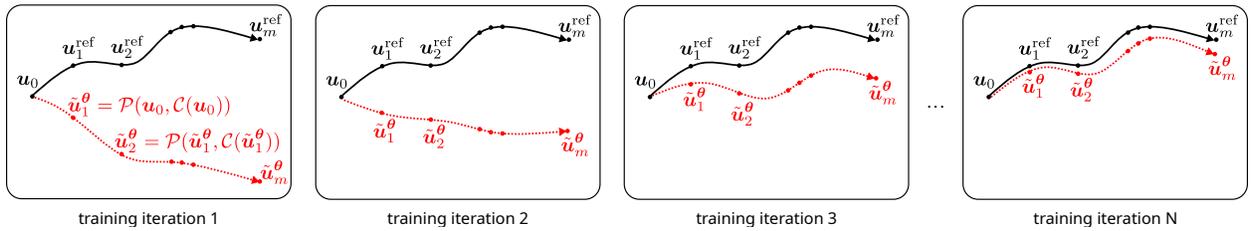


图 2: 示意图说明了循环中的求解器方法。LES 轨迹 $\tilde{\mathbf{u}}$ 使用离散求解器 \mathcal{P} 经过 m 时间步长演变，而由神经网络参数化的校正算子 \mathcal{C} 预测未解析的尺度。目标是在训练过程中迭代优化 \mathcal{C} ，使 $\tilde{\mathbf{u}}$ 更接近参考轨迹 \mathbf{u}^{ref} ，该参考轨迹集成了来自相同初始条件的整个系统动力学。这里，下标表示轨迹的时间步索引，即 $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t + k\Delta t)$ ，并非壳体索引。

4 结果

在本节中，我们的 DL 闭合简化方程系统（以下简称 LES-NN）通过将其预测与多个统计度量下的全解析真实值进行比较来评估。我们分析其再现关键湍流特性（包括结构函数、能量的时间演化以及尺度依赖相关性）的性能。特别关注模型捕捉已解析变量和未解析变量之间联合概率密度函数尾部的能力；以及是否遵循 K62 理论的第三假设，保持尺度不变统计量，并且这种对称性是否由闭合保持。

结构函数定义为不同尺度上的速度增量的某个幂次 p 的差，可以为壳模型定义为

$$S_n^{(p)} = \langle |u_n|^p \rangle. \quad (4)$$

这些在 Figure 3 上显示到截止壳，对于 $p = 1, \dots, 6$ ，包括完全解析的系统（真实值）和 LES-NN 模型。模型与真实值之间，在所有阶结构函数展示出的高度一致性，即使接近截止尺度，这是子网格尺度效应更加明显的地方。

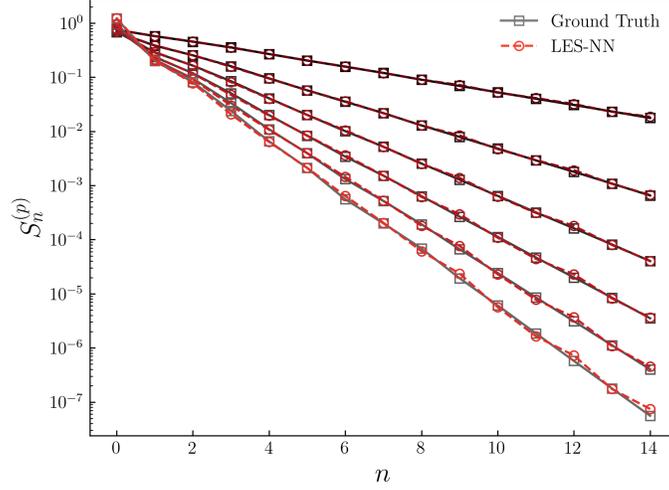


图 3: 结构函数 $S_n^{(p)}$ 作为壳层指数 n 的函数，对于不同的阶数 $p = 1, \dots, 6$ 。LES-NN 模型与真实解进行了比较。

在 Figure 4 中，我们展示了归一化速度场的对数随时间演化（速度场按 $u_n \sim k_n^{-1/3}$ 缩放）的情况，包括真实值 (GT) 和 LES-NN 模型的结果，以及两者之间的归一化误差。GT 和 LES-NN 模型都从相同的初始条件 (IC) 开始。很明显，LES-NN 模型迅速与 GT 去相关。这种行为是预期的，因为我们无法同步超过 Lyapunov 时间。对于这个特定的 IC，差异特别明显，因为我们选择了一个能量爆发已经传播到小尺度的 IC，在那里动力学速度要快得多。因此，有效的 Lyapunov 时间与这些更快的时间尺度一致。

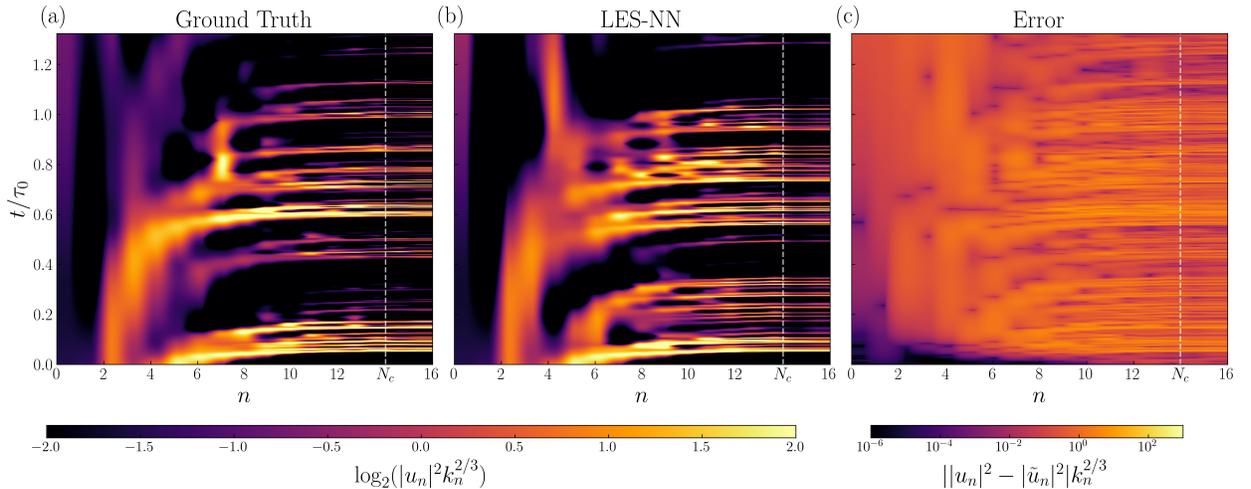


图 4: $\log_2(|u_n|^2 k_n^{2/3})$ 的归一化能量密度的时间演化 (a) 真实值和 (b) LES-NN 模型。(c) 两个场之间的绝对归一化误差 $||u_n|^2 - |\tilde{u}_n|^2| k_n^{2/3}$ 。x 轴表示波数索引 n ，而 y 轴表示归一化时间 t/τ_0 。虚线代表截止尺度。

Figure 5 显示了用于神经网络输入的壳层解决能量之和, $\tilde{u}_{N_c}, \tilde{u}_{N_c-1}, \tilde{u}_{N_c-2}$, 以及壳层未解决能量之和, 即 NN 输出的能量总和, $\tilde{u}_{N_c+1}^\theta, \tilde{u}_{N_c+2}^\theta$, 对于真实值和 LES-NN 模型的联合 PDF。虽然模型正确预测了 PDF 的整体形状, 但它似乎主要捕捉到了平均行为, 而不是准确再现整个分布。

这种差异可能存在几种潜在的原因。一种可能的原因是神经网络本身的架构 (多层感知器), 它可能缺乏充分捕捉数据中高阶相关性的必要复杂性。频谱偏差, 即神经网络倾向于学习平滑的低频成分而非更复杂的高频变化的倾向, 可能会进一步导致预测分布尾部被低估。此外, 这也可能是由于选择了已解析壳体速度场之间的均方误差作为损失函数的结果, 从而没有明确包含未解析的部分。

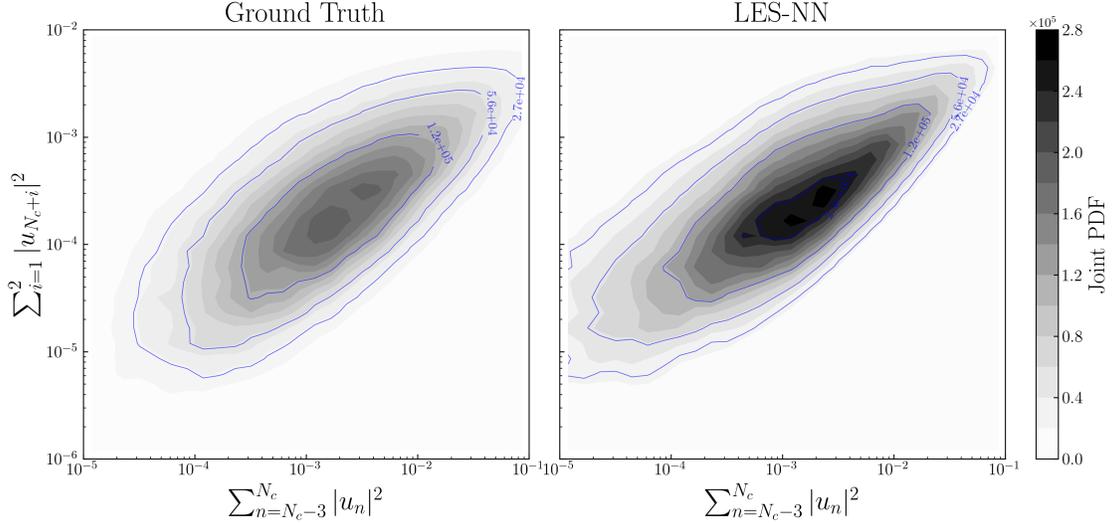


图 5: 神经网络 (x 轴) 和亚网格尺度输出壳层 (y 轴) 的总能量联合 PDF 的等高线, 包括真实值和 LES-NN 模型。

在他的 1962 年开创性研究 [11] 中, 柯尔莫哥洛夫提出了一个理论框架来描述在小尺度湍流中观察到的间歇性。这个框架的核心概念是乘子, 定义为速度增量的比例依赖于尺度。这些乘数表示为 $w_{ij}(x; \ell, \ell')$, 表达式如下:

$$w_{ij}(x; \ell, \ell') = \frac{\delta_i v_j(x, \ell)}{\delta_i v_j(x, \ell')}, \quad (5)$$

其中 $\delta_i v_j(x, \ell) = v_j(x + \ell \mathbf{e}_i) - v_j(x)$ 表示沿单位向量 \mathbf{e}_i 方向的空间间隔 ℓ 处第 j 速度分量的增量。Kolmogorov 提出, 在足够高的雷诺数下, 这些乘数的统计分布将表现出普适性——仅依赖于尺度比 ℓ/ℓ' , 而与绝对尺度 ℓ 或 ℓ' 无关。此外, 他假设与大间隔尺度相关的乘数之间存在统计独立性, 这一猜想后来被称作他的第三个假说 [14]。

对于壳模型, 可以通过以下方式分别定义振幅和相位乘子 [15]:

$$w_n(t) = \left| \frac{u_n(t)}{u_{n-1}(t)} \right|, \quad (6)$$

$$\Delta_n(t) = \theta_n(t) - \theta_{n-1}(t) - \theta_{n-2}(t), \quad (7)$$

其中 $\theta_n = \arg u_n$ 。

在 Figure 6 中, 我们展示了地面真实值和我们的模型 LES-NN 的幅度和相位乘数的 PDF, 针对壳层 $n = 6, \dots, N_c$ 。对于完全解析的模型, 我们看到了预期的坍塌。然而, 对于 LES-NN 模型, 学习到的闭合打破了这种对称性, 并且乘数在截止值附近不再具有尺度不变性。这是该模型的一个局限性。

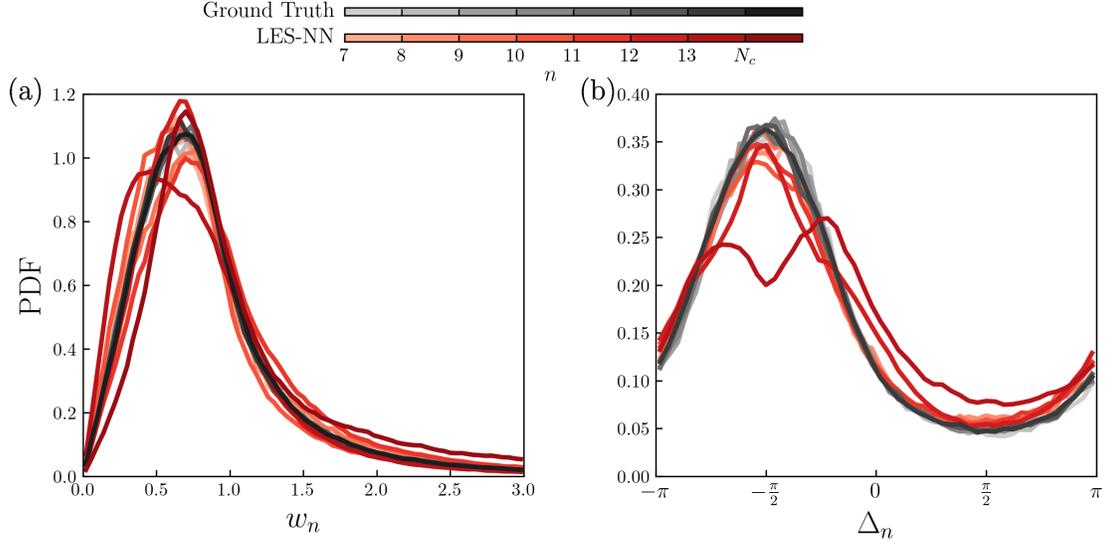


图 6: 地面真实值 (GT) 和 LES-NN 模型的 (a) 振幅乘数, w_n , 以及 (b) 相位乘数, Δ_n , 对于壳体 7 到 N_c 。

我们通过分析最后两个已解析乘数的幅值与两个未解析乘数（包括神经网络的预测）的乘积的联合 PDF 来扩展 Figure 7 中的这一分析。LES-NN 模型能够准确捕捉到已解析的乘数，但在未解析的乘数方面表现显著不足，导致不仅在尾部而且在均值上的预测结果不正确。如同所有高度非线性、高维优化问题一样，神经网络训练收敛到了一个局部最小值——足以正确地再现高阶结构函数，但学习了一种有缺陷的方法来匹配次网格统计量，从而产生总体上好的结果但在某些可观测量上有明显失败。这表明存在改进的空间，可能是通过选择损失函数、输入输出表示或整体问题表述上的改变。我们将其作为未来研究的一个开放性问题。

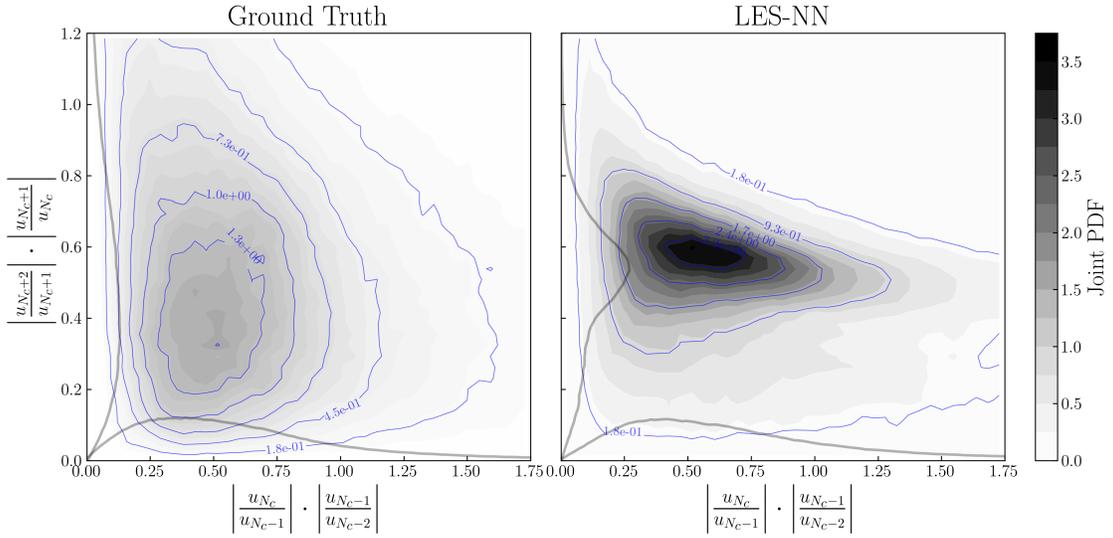


图 7: 地面真实值和 LES-NN 模型之间最后两个解析乘数的乘积 (x 轴) 与两个子网格尺度乘数的乘积 (y 轴) 的联合 PDF 的等高线。

遵循 Eyink 等人 [16], 我们可以进一步定义:

$$\sigma_n(t) = \ln w_n(t), \quad (8)$$

$$U_n(t) = \exp(i\Delta_n(t)), \quad (9)$$

其中, $\sigma_n(t)$ 是乘子 $w_n(t)$ 的“局部斜率”, 而 $U_n(t)$ 是生活在复平面单位圆上的二维旋转自旋。我们感兴趣的是研究这些变量在不同壳层之间的相关性。为此, 我们定义了以下相关函数 [16]:

$$C_{XY}(n, m) = \langle X_n^* Y_m \rangle - \langle X_n^* \rangle \langle Y_m \rangle. \quad (10)$$

$X=Y=\sigma$ 和 $X=Y=U$ 的结果在 Figure 8 中展示给 GT 和 LES-NN 模型。将 $n=11$ 保持为参考以计算相关性。我们看到预期的快速衰减, 随着 $|m-n|$ 增加; 然而, 对于 LES-NN 模型, 在截止值附近的关联被错误估计。这有助于揭示在截止值附近乘数缺乏合并的情况。

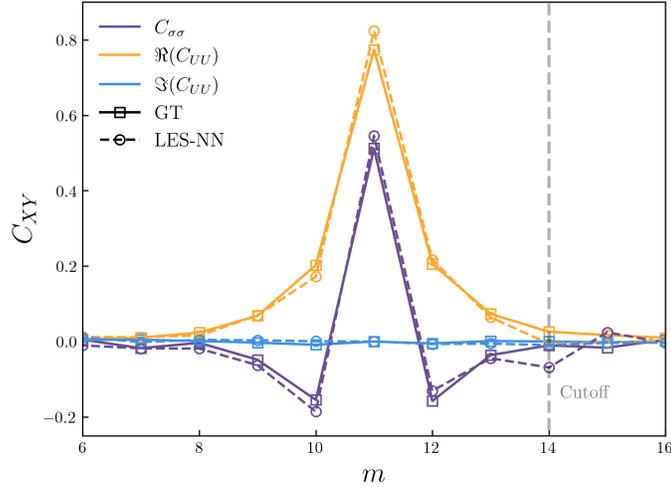


图 8: 自旋-自旋关联函数以壳层 $n=11$ 作为参考。虚线代表截止尺度。

5 讨论

在这项工作中, 我们更深入地探讨了使用求解器环路方法训练的闭合模型在湍流壳模型中的性能 [1]。我们关注已解析变量和未解析变量之间的相关性, 以及完全发展的湍流惯性范围的普遍单时间统计量, 即所谓的 Kolmogorov 乘数 (相邻壳体之间的比率)。我们展示了尽管我们的闭合模型能够以很高的精度重现高阶矩, 如 $p=6$ 阶结构函数, 但它仍然低估了已解析和未解析壳体能量之间的交叉相关性。虽然联合 PDF 的整体形状被很好地捕捉到了, 但学习到的闭合倾向于关注平均行为。这可能归因于几个因素。一个潜在的原因是所使用的神经网络架构 (即简单的多层感知器), 它可能缺乏完全捕获高阶关联所需的复杂性。此外, 神经网络内在的谱偏差可能会使其优先考虑更平滑、低频成分, 导致预测分布尾部被低估。损失函数的选择也可能有影响, 因为它只关注已解析壳体速度场之间的 MSE, 并未明确考虑未解析壳体。

关于所学闭合在乘子方面的性能, LES-NN 模型打破了截止点附近的尺度不变性: 接近截止点的乘子的概率密度函数不再坍塌。完美的 LES 模型会在惯性区保留这种对称性。我们的模型没有使用乘子进行训练, 因此这一点并不完全令人惊讶。有趣的问题是, 是否通过在损失函数中专注于乘子统计信息来训练模型会比仅基于简单速度差训练的模型表现更好。这个问题由 Domingues Lemos 等人在 [7] 和最近在 [8] 的研究中, 在隐藏对称性框架 [9] 下进行了探讨。相比之下, 我们的闭合在诸如结构函数和平坦度等可观测量上表现更好, 但在乘子统计方面则不然。采用求解器环路训练方法并在乘子框架内进行训练可能会产生更好的学习闭合。使用乘子闭合的另一个强大优势在于, 在原则上, 所学闭合应该是截止点无关的 (假设截止点不受强迫或耗散尺度的影响)。这一点由 Domingues Lemos 在 [8] 中进行了数值演示。

我们报告这些结果，希望有助于推进对湍流封闭问题的理解，特别是与最优设置相关的问题，这对数据驱动和现象学基础的封闭方法都有强烈的影响。此外，关于乘数统计的研究以及我们的模型打破这种对称性的证据可能表明当前框架并不理想，一个明确包含或强制执行这种尺度不变性的框架可能会更有吸引力。这在三维纳维-斯托克斯湍流的次网格规模建模中具有潜在意义，因为可以进行类似的重缩放过程，导致尺度不变性 [17]。自然地，会引入额外的挑战，但整体信息可能仍然成立。因此，需要对该主题进行进一步的研究。

致谢

作者从与 G. Eyink、A. Mailybaev 和 M. Sbragaglia 的讨论中受益。本研究得到了欧盟 HORIZON MSCA 博士网络计划的支持，项目编号为 101072344，项目名称 AQTIVATE（高级计算、量子算法和数据驱动的方法用于科学、技术和工程），以及欧洲研究理事会 (ERC) 在欧盟地平线 2020 研究与创新计划下的 Smart-TURB 项目（资助协议号 882340），并通过 Inria Chair 提供支持。

参考文献

- [1] André Freitas, Kiwon Um, Mathieu Desbrun, Michele Buzzicotti, and Luca Biferale. Solver-in-the-loop approach to turbulence closure. *arXiv*, 2024.
- [2] Uriel Frisch. Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov. *Cambridge University press*, 1995.
- [3] Charles Meneveau and Joseph Katz. Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation. *Annual Review Fluid Mechanics*, 2000.
- [4] Luca Biferale. Shell models of energy cascade in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35(1):441–468, 2003.
- [5] Luca Biferale, Alexei A. Mailybaev, and Giorgio Parisi. Optimal subgrid scheme for shell models of turbulence. *Physical Review E*, 95, 2017.
- [6] Giulio Orтали, Alessandro Corbetta, Gianluigi Rozza, and Federico Toschi. Numerical proof of shell model turbulence closure. *Physical Review Fluids*, 7, 2022.
- [7] J. Domingues Lemos and A. A. Mailybaev. Data-based approach for time-correlated closures of turbulence models. *Phys. Rev. E*, 109:025101, Feb 2024.
- [8] Julia Domingues Lemos and Fabio Pereira dos Santos. Statistical machine learning tools for probabilistic closures of turbulence models, 2025.
- [9] Alexei A. Mailybaev. Hidden scale invariance of intermittent turbulence in a shell model. *Phys. Rev. Fluids*, 6:L012601, Jan 2021.
- [10] Kiwon Um, Robert Brand, Yun Fei, Philipp Holl, and Nils Thuerey. Solver-in-the-loop: Learning from differentiable physics to interact with iterative pde-solvers. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2020.
- [11] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(1):82 – 85, 1962.
- [12] Victor S. L’vov, Evgenii Podivilov, Anna Pomyalov, Itamar Procaccia, and Damien Vandembroucq. Improved shell model of turbulence. *Physical Review E*, 58:1811–1822, 1998.
- [13] Ari Holtzman, Jan Buys, Li Du, Maxwell Forbes, and Yejin Choi. The curious case of neural text degeneration, 2020.
- [14] Qiaoning Chen, Shiyi Chen, Gregory L. Eyink, and Katepalli R. Sreenivasan. Kolmogorov’s third hypothesis and turbulent sign statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 90:254501, Jun 2003.
- [15] R. Benzi, L. Biferale, and G. Parisi. On intermittency in a cascade model for turbulence. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 65(1):163–171, 1993.
- [16] G. L. Eyink, S. Chen, and Q. Chen. Gibbsian hypothesis in turbulence. *Journal of Statistical Physics*, 2003.
- [17] Alexei A. Mailybaev and Simon Thalabard. Hidden scale invariance in navier – stokes intermittency. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 380(2218):20210098, 2022.