

为何冷 BGK 模式如此酷：来自轨道约束分布函数的色散关系

Mikael Tacu*

CEA, DAM, DIF F-91297 Arpajon, France and

Université Paris-Saclay, CEA, Laboratoire Matière en Conditions Extrêmes, F-91680, Bruyères-le-Châtel, France

(10Dated: 2025 年 4 月 16 日)

我们推导了由 Vlasov 方程控制的冷、轨道约束系统的解析色散关系。对于磁化等离子体，我们得到了二维各向异性 BGK 模在有限磁场下的第一个显式关系，表明只有有限数量的角度模式可以变得不稳定，并确定了一个用于稳定化的磁场阈值。在引力情况下，我们建立了核心扰动增长率的界限，由势能的曲率设定。这些结果阐明了轨道约束如何塑造冷、无碰撞介质中动力学不稳定性谱和增长。

Bernstein – Greene – Kruskal (BGK) 模式 [1] 是 Vlasov – Poisson 方程的精确、不随时间变化的解，代表可以在弱碰撞等离子体中持续存在的非线性相空间结构。在一维静电设置下，它们的性质和稳定性已得到广泛研究 [2, 3]，并已知与电子洞、孤立波和相空间涡旋 [4] 相关联。实验室和太空等离子体中的观测 [5, 6] 指示了更高维度中类似结构的存在，但它们的存在性和稳定性仍然不太为人所知。Ng 和 Bhattacharjee [7] 通过将角动量作为守恒量引入来构建明确的二维和三维 BGK 平衡态，这使得在磁化二维和非磁化的三维等离子体中存在解成为可能。最近对这些平衡态的粒子-单元模拟 [8, 9] 报告了引人注目的不稳定性现象，包括离散角模式图案以及依赖于背景磁场的稳定性阈值。然而，观测到的方位场螺旋图案或稳定性的阈值背后的物理机制仍未得到解释。

在这封信中，我们提出了一类基于轨道约束狄拉克 δ 函数分布构建的冷 BGK 平衡的精确线性稳定性分析。对于磁化等离子体，我们推导出一个显式的色散关系，并表明任何给定势能下只有有限数量的角度模式可以变得不稳定。我们识别出了一个临界磁场，在该磁场之上所有扰动都是线性稳定的，并且推导出了一个关于势能的局部条件，保证即使在低于阈值的磁场中也能保持核心稳定性。这些结果阐明了先前模拟中观察到的离散不稳定性带背后的机制，并提供了新的分析工具来探索非线性相空间动力学。

我们然后将相同的方法应用于描述球状星团和银河系核心无碰撞动力学的引力 Vlasov – Poisson 系统 [10]。专注于与这类系统早期演化相关的冷、轨道受限分布，我们推导出中心扰动增长率的一个严格的上限，这个上限完全由引力势的曲率决定。这一解析结果将中心质量集中度与动能重新分配的时间尺度联

系起来，为解读高分辨率 N 体模拟中所见的早期坍塌阶段提供了一种新的诊断方法 [11, 12]。该形式化表述是通用的，并可扩展到其他几何或场配置。这些结果共同促进了对冷、长程相互作用系统相空间不稳定性理论理解的贡献。

等离子体情形。我们考虑一个离子密度为 n_i 且具有均匀背景磁场 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ 的无碰撞等离子体，在柱坐标系 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ 中。已经证明 [7] 在圆柱对称情况下，具有径向电场 $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ 的任何函数，以及哈密顿量 $w = v^2/2 - \psi(r)$ 和角动量 $l = 2rv_\theta - r^2 B_0$ 的函数都是以下 Vlasov 方程的解（其中 $v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2}$ 归一化为热速度， r 归一化为德拜长度），

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} + \frac{d\psi}{dr} - v_\theta B_0 \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{v_r v_\theta}{r} + E_\theta - v_r B_0 \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0. \quad (1)$$

最近，通过 PIC 模拟 [8, 9] 已经表明，一些对应于特定分布形式 $f(w, l) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\omega(1 - h e^{-kl^2})}$ 的二维 BGK 模式（其中 $h \in (-\infty, 1)$ 和 $k \in (0, \infty)$ 为常数参数），表现出依赖于磁场 B_0 阈值稳定行为。为了探索这种配置中的稳定性，我们考虑了前一种分布的低温极限。它写为 Vlasov 方程的一个精确解，在约束轨道上，并使用 Dirac δ 函数作为

$$f_0(r, v_r, v_\theta) = g(r) \delta(v_r) \delta[v_\theta^2 + r\psi'(r) - rv_\theta B_0]. \quad (2)$$

这个理想化的冷 BGK 模式是最简单的，但具有物理相关性的分布，它允许有限的磁场 B_0 和任意径向轮廓 $g(r)$ ，其中 g 是任何实正函数。此配置文件通过泊松方程定义了势能 $\psi(r)$ ，其表达式为，

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\psi'(r))}{dr} = g(r) \int_{\mathbb{R}} \delta[(v_\theta - v_\theta^+)(v_\theta - v_\theta^-)] dv_\theta - 1, \quad (3)$$

其中, $2v_\theta^\pm = rB_0 \pm \sqrt{\Delta}$ 是多项式 $X^2 - rB_0X + r\psi'(r)$ 的根, 且 $\Delta = r^2B_0^2 - 4r\psi'(r)$ 。

这种冷分布描述了电子具有零径向速度的等离子体, 并且对于任意给定半径 r , 它们在 $v_\theta = v_\theta^\pm$ 处转向, 这取决于磁场和电势。电场 $E_r = -\psi'(r)$ 需要是正的, 以便即使当 $B_0 = 0$ 时也能维持平衡, 在这种情况下 $\Delta \geq 0$ 。然后我们发现 g 与电势通过 $d_r(r\psi'(r)) = 2rg(r)/\sqrt{\Delta} - r$ 相关。

通过研究先前分布的线性稳定性, 我们表明, 对于这些函数, 存在一个基于磁场值 B_0 的稳定性阈值。设时间相关的分布为 $f = f_0 + f_1$, 并用 $\dot{v}_r = v_\theta^2 - rv_\theta B_0 + r\psi'(r)$ 和 $\dot{v}_\theta = v_r B_0 - v_r v_\theta / r$ 表示以使用更紧凑的符号。扰动量是 f_1, E_r^1 和 E_θ^1 。受扰的 Vlasov 方程变为,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \dot{v}_r \frac{\partial f_1}{\partial v_r} + \dot{v}_\theta \frac{\partial f_1}{\partial v_\theta} \\ & = E_r^1 g(r) \delta'(v_r) \delta(\dot{v}_r) + E_\theta^1 g(r) (2v_\theta - rB_0) \delta(v_r) \delta'(\dot{v}_r). \end{aligned} \quad (4)$$

定常 BGK 模式具有轨道, 其中 $v_r = 0$ 。我们假设在受到扰动后, 电子仍然沿着这些轨道运动。首先, 我们寻找可能的最简单的色散关系, 其次, 对于足够小的振幅, 小扰动将仍然局限于稳定的轨道上, 第三, 具有 $v_r = 0$ 的轨道仍然是时变情况下的哈密顿动力学的有效解。受扰分布则写为 $f_1 = \delta(v_r) F_1$, 其一阶矩为 $F_1 = \int_{\mathbb{R}} f_1 dv_r$ 。通过在 v_r 中对前面的方程进行积分, 得到 $\partial_t F_1 + (v_\theta/r) \partial_\theta F_1 = E_\theta^1 g(r) (2v_\theta - rB_0) \delta'(\dot{v}_r)$, 因为 $\delta'(v_r)$ 积分为零。这可以通过特征线方法解析求解, 给出: $F_1(r, \theta, v_\theta, t) = g(r) (2v_\theta - rB_0) \delta'(\dot{v}_r) \int_0^t E_\theta(r, \theta - v_\theta(t - t_0)/r, t_0) dt_0$ 。这里假设了 $F_1(r, \theta, v_\theta, 0) = 0$ 成立。对于扰动高斯方程, 如果我们只保留方位场, 则其形式为 $\partial_\theta E_\theta^1 = -r \int_{\mathbb{R}} F_1 dv_\theta$ 。直接计算得到,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\theta^1}{\partial \theta} &= -\frac{g(r)}{\sqrt{\Delta}} \int_0^t t_0 \frac{\partial E_\theta^1}{\partial \theta}(r, \theta - v_\theta^+ t_0/r, t - t_0) dt_0 \\ &\quad - \frac{g(r)}{\sqrt{\Delta}} \int_0^t t_0 \frac{\partial E_\theta^1}{\partial \theta}(r, \theta - v_\theta^- t_0/r, t - t_0) dt_0. \end{aligned} \quad (5)$$

我们可以对周期场 $\theta \mapsto E_\theta^1(r, \theta, t)$ 进行傅里叶变换, 通过写出 $E_\theta^1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n(r, t) e^{in\theta} + c.c.$, 由此从前一个关系式中得出 $\sqrt{\Delta} E_n(r, t) = -g(r) \int_0^t E_n(r, t - t_0) [e^{-inv_\theta^+ t_0/r} + e^{-inv_\theta^- t_0/r}] dt_0$ 。然后我们对每个由 n 索引的这些方程进行拉普拉斯变换, 通过写出

$\hat{E}_n(r, \omega_n) = \int_0^\infty e^{i\omega_n t} E_n(r, t) dt$ 。色散关系如下,

$$\sqrt{\Delta} = \frac{g(r)}{(\omega_n - nv_\theta^+/r)^2} + \frac{g(r)}{(\omega_n - nv_\theta^-/r)^2}, \quad (6)$$

其中 $\omega_n = \omega_{r,n} + i\gamma_n$ 是每个由 n 索引的模式的频率。

等离子体情况的讨论。为了解这个色散关系, 让我们考虑给定的 ω , 并引入以下符号。令 $x_n = 2r(\omega_n - nB_0/2)/n\sqrt{\Delta}$ 和 $a_n = 4r^2 g(r)/n^2 \Delta^{3/2}$ 。然后, 频率必须选择在多项式 $P_n(X) = X^4 - 2(a_n + 1)X^2 + 1 - 2a_n$ 的根之间。这个多项式的根是这样的 $x_n^2 = a_n + 1 \pm \sqrt{a_n(a_n + 4)}$ 。为了研究色散关系解的模式稳定性, 我们使用 Penrose 准则 [13]。由于色散关系由一个四阶多项式给出, 它已经是解析函数, 并且在上半平面没有极点, 前提是 $a_n \leq 1/2$ 。因此, 当 $a_n \leq 1/2$ 时所考虑的系统是线性稳定的, 而当 $a_n > 1/2$ 时不稳定, 在后一种情况下有 $\gamma_n > 0$ 。

让我们首先考虑稳定的情况。稳定性条件 $a_n \leq 1/2$ 也可以写成 $a_1 \leq 1/2$ 。确实, 在那种情况下 $a_n \leq a_1 \leq 1/2$, 并且如果 $a_1 > 1/2$, 则至少有一个模式是不稳定的, 因此整个分布也是不稳定的。后一个稳定性条件可以写作 $\psi'' + 2\psi'/r \leq B_0^2/4 - 1$ 。直接得出的一个必要条件是 $B_0 \geq 2$, 通过取极限 $r \rightarrow \infty$ 。然而, 这并不是一个充分条件, 因为我们仍然需要施加前面的微分不等式, 这也可写为 $[r^2 \psi'(r) - r^3 (B_0^2/4 - 1)/3]' \leq 0$ 。对这个积分相当于使用 Grönwall 引理 [14] 与 $B_0 \geq 2$, 并且没有提供新的信息, 因为 E_r 是正数。然而, 我们已经看到在 E_r 增长的区域以及对于 $E_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} E_r^\infty / r^2$ 满足这个条件的情况, 这是由 Gauss 定理对局部电荷分布的情形。剩下的就是 E_r 减少的区域。如果例如 E_r 在某些区域遵循 $1/r^n$ 定律, 稳定性条件变为 $n - 2 \leq (B_0^2/4 - 1)r^{n+1}$, 这在 n 足够大和对于 $r < 1$ 的情况下可能会轻易被违反。然而, 电场过于陡峭的减少, 因此电子密度 (在德拜长度尺度上) 也会相应减少, 将与离子背景均匀电荷分布的假设不一致。所以, 对于实际的电场, 变化不是过于陡峭的情况下, 必要的和充分的稳定性标准仍可以写为 $B_0 > 2$ 。

现在让我们讨论在小 r 情况下的无条件稳定性。由于全局稳定性的条件为 $\psi'' + 2\psi'/r \leq B_0^2/4 - 1$, 并且假设 $E_r(0) = 0$, 我们取极限 $r \rightarrow 0$ 得到 $\psi''(0) < B_0^2/12 - 1/3$ 。如果这个不等式成立, 则存在一个严格正的 $r_c = \inf \{r > 0 \mid \psi''(r) + 2\psi'(r)/r > 1 - B_0^2/4\}$ 。然后, 根据定义, $\forall r \leq r_c, a_1(r) < 1/2$, 这意味着该区

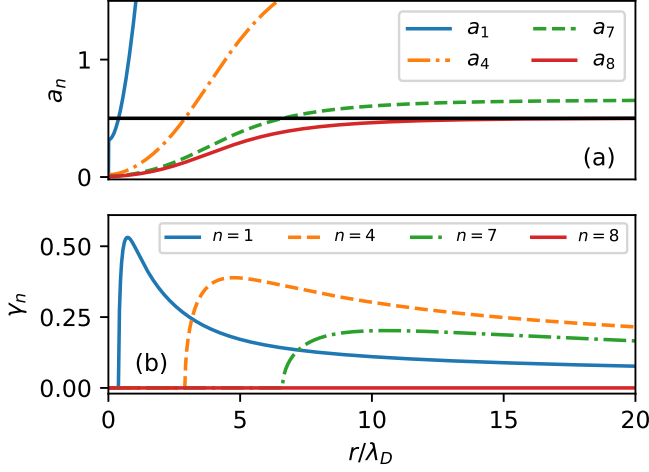


图 1. 在 (a) 中, 我们绘制了与稳定性相关的参数 a_n , 这些参数直接决定了给定模式 n 的稳定性。所有使得 a_n 跨过实黑线 $y = 1/2$ 的模式都是不稳定的。在 (b) 中, 我们有相应的增长率 γ_n 。我们看到当 $a_n \leq 1/2$, $\gamma_n = 0$ 。我们也看到 $a_8 \leq 1/2$ 。由于对于所有的 n , $a_{n+1} \leq a_n$, 我们推断出 $n \geq 8$ 的所有模式的稳定性。结果绘制了从分布 $f(w, l) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\omega} (1 - h e^{-k l^2})$ 计算出的电势 ψ 。这里 $B_0 = 0.25$, $k = 0.4$ 和 $h = 0.9$ 。

域的分布是稳定的, 无论磁场 B_0 如何。从物理上讲, 这意味着对于一大类势能来说, 一个稳定的中心区域会形成在轴附近, 而不受外部磁场强度的影响。

对于由条件 $a_n > 1/2$ 控制的不稳定情况, 增长率可以写成 $\gamma_n = \sqrt{\sqrt{a_n(a_n + 4)} - a_n} - 1/\sqrt{a_n} \Delta^{1/4}$, 实频率由 $\omega_{r,n} = n B_0/2$ 给出。由于当 n 足够大时我们有 $a_n < 1/2$, 因此在我们的例子中, 必然有**有限数量的模式可以增长不稳定**。这在图 1(a) 和 (b) 中清楚地表示出来, 其中从泊松方程计算出分布 $f(w, l) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\omega} (1 - h e^{-k l^2})$ 的电势时, a_n 和 γ_n 都得到了表示。为了计算势, 我们数值求解了与泊松方程关联的微分方程 $\psi''(r) = -\psi'(r)/r + e^{\psi(r)} (1 - h e^{-k B_0^2 r^4/4 \gamma^2} / \gamma) - 1$, 其中包含 $\psi'(0) = 0$ 和 $\psi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ 。

最近的粒子模拟 (PIC) 定性支持了我们关于有限模式数不稳定性及磁场稳定阈值的分析预测。具体来说, McClung 等。[8] 和后来 Franciscovich 等。[9] 观察到, 当磁场强度满足 $B_0 \geq 2$ 时是稳定的, 而较弱的磁场则会出现不稳定性, 这与我们推导出的稳定阈值一致。图 2 中看到的螺旋图案也与之之前进行的 PIC 模拟中观察到的环向场情况相符。如图 2(a)、(b) 和 (c) 所示, 旋臂的数量可能会随时间变化, 在文献 [8] 中也

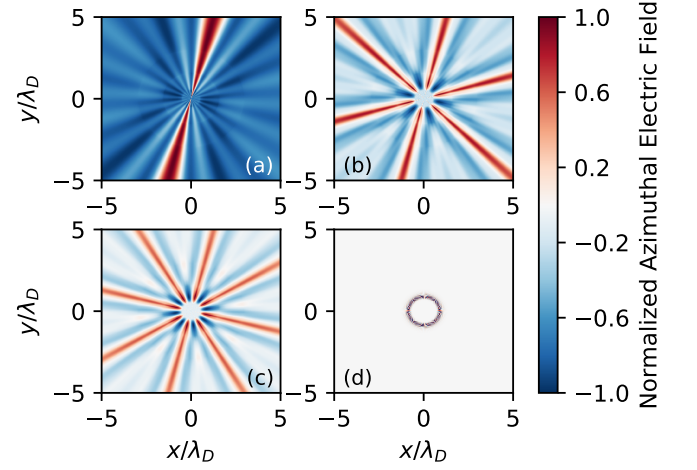


图 2. 归一化方位扰动电场的实部在 (x, y) 坐标中。该场由 $E_\theta^1(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{n_{max}} E_n(r) e^{\gamma_n(r)t} \cos[n(\theta - B_0/2)t]$ 给出, 其中为了清晰起见将 E_n 设置等于 $E_n = 1$ 。势能与在 [8, 9] 中使用的一样, 包含 $B_0 = 0.25$, $k = 0.4$ 和 $h = 0.9$ 。仅保留了八种模式 ($n_{max} = 8$), 因为其余的都是稳定的。在 (a) 中, 我们有 $t = 2$, 在 (b) 中, $t = 6$, 在 (c) 中, $t = 10$ 和在 (d) 中, 我们有 $t = 100$ 。我们看到一个不稳定的环形成并在长时间内持续存在。

有观察到这一点。然而, 在线性情况下, 如图 2(d) 所示, 该场最终将被围绕 a_1 最大值的区域主导, 这与图 1 所示的增长率一致, 这也划定了靠近中心的无条件稳定区域。

引力情况。在引力类比中, 我们考虑一组恒星在一个球对称的自洽势场 $\psi(r)$ 中演化, 在本研究中是通用的, 但可以是一个例如普拉美类型势场 $\psi(r) = -GM/\sqrt{r^2 + a^2}$, 以强调与等离子体情况符号差异。这里 G 是万有引力常数, M 是物体的质量, a 是普拉美半径。Vlasov 方程在 1D2V 几何中写为 [10],

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{d\psi}{dr} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\perp}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} = 0, \quad (7)$$

其中 $v_\perp = \sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2}$ 。我们通过使用事实 $v_\perp \geq 0$ 来修改 Ng 的原始构造等。代替在 $v_\perp^2/r - \psi'_0(r)$ 中评估 Dirac 分布, 我们在 $v_\perp - \sqrt{r\psi'_0(r)}$ 中评估它, 其中 ψ_0 是稳定势。这使得分布更简单, 并且更适合进行微扰研究。其形式为,

$$f_0(r, v_r, v_\perp) = g(r) \delta(v_r) \delta[v_\perp - \sqrt{r\psi'_0(r)}]. \quad (8)$$

从物理上讲, 我们假设星团最初是冷的, 并且所有恒星都沿着半径为 $v_\perp = \sqrt{r\psi'_0(r)}$ 的圆形轨道运动。考虑这

种分布的主要原因是数学上的。它是最简单的 Vlasov 方程的解，支持一个通用势 ψ_0 。在引力情况下，泊松方程写作，

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 8\pi^2 G \int_{\mathbb{R}} dv_r \int_0^{+\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f(r, v_r, v_{\perp}, t). \quad (9)$$

对于静态势能，我们有以下关系： $8\pi^2 G r \sqrt{r\psi'_0(r)} g(r) = 2\psi'_0(r) + r\psi''_0(r)$ 。现在，为了研究这一类分布的稳定性，假设在线性阶段，恒星继续遵循静态势能中的圆形轨道 ψ_0 。这简化了问题的处理方式，同时保持其物理意义清晰。相反，假设恒星继续沿 $v_r = 0$ 轨道运动，则意味着没有色散关系，并且是无条件稳定的。因此我们写作 $f(r, v_r, v_{\perp}, t) = f_0(r, v_r, v_{\perp}) + F_1(r, v_r, t)\delta(v_{\perp} - \sqrt{r\psi'_0(r)})$ ，在线性化方程后。(7) 并在 $v_{\perp}$ 中积分，我们得到，

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + v_r \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{v_r}{r} F_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} g(r) \delta'(v_r), \quad (10)$$

其中 $\psi(r, t) = \psi_0(r) + \psi_1(r, t)$ 。这个方程类似于等离子体情况下的前一个方程，可以通过注意到如果 $x = r + v_r t$ ，则 $d_t[x F_1(x, v_r, t)] = x \partial_r \psi_1(x, t) g(x) \delta'(v_r)$ ，在特征线上进行积分。积分后我们得到与 $r' = r - v_r(t - t')$ 有关的结果是 $r F_1(r, v_r, t) = \int_0^t r' \partial_r \psi_1(r', t') g(r') \delta'(v_r) dt'$ 。此外，我们利用了任意函数 q 的事实，即 $q(s) \delta'(s) = -q'(0) \delta(s) + q(0) \delta'(s)$ 。顺便说一下，获得的表达式为 F_1 形式 $g_0(r, t) \delta(v_r) + h_0(r, t) \delta'(v_r)$ 。 $\delta'(v_r)$ 项在报告密度时将消失。然而，它作为寻找完整 1D2V Vlasov 方程解的试探法提供了一个有趣的思路。可以考虑形式为 $g_1(r, v_{\perp}, t) \delta(v_r) + h_1(r, v_{\perp}, t) \delta'(v_r)$ 的解，然后取矩。 $\delta'(v_r)$ 项不对泊松方程作出贡献，但它确保了数学一致性，因为在传播未扰动分布时，自然会出现来自 $\partial_{v_r} f_0$ 项的狄拉克 delta 导数 $\delta'(v_r)$ 。

我们将线性化的泊松方程进行拉普拉斯变换，并为此引入了 $\tilde{\psi}_1(r, \omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \psi_1(r, t) dt$ 。为了表达色散关系，我们记为 $z = \partial_r \tilde{\psi}_1$ 和 $z' = \partial_r z$ 。然后经过一些直接的运算，我们得到，

$$\left(r + \frac{2\psi'_0 + r\psi''_0}{\omega^2} \right) z' + \left(2 - \left[1 + \frac{rg'}{g} \right] \frac{2\psi'_0 + r\psi''_0}{r\omega^2} \right) z = 0. \quad (11)$$

这个微分方程的形式为 $c_1(r)z'(r) + c_0(r)z(r) = 0$ ，其解从一个 $r_0 > 0$ 积分可以写成 $z(r) =$

$z(r_0) e^{-\int_{r_0}^r c_0(r_1)/c_1(r_1) dr_1}$ 。由于， $c_0(r)/c_1(r) \sim 2/r$ ，我们看到在 r 再次积分后，得到 $\psi_1 \sim -z(r_0)/r$ ，这是引力势在无穷远处的一致行为。对于 $r = 0$ ，我们需要扰动势具有有限值 $z'(0) = 0$ 。然而，由于 $c_0(r)/c_1(r) \sim 2/r(1 + 3\psi''(0)/\omega^2)$ ，在极限 $r_0 \rightarrow 0$ 下唯一能满足这个条件的方式是 $1 + 3\psi''(0)/\omega^2$ 严格为负（或零，这将需要进行 c_1 的级数展开到二阶）。由于在大多数情况下 $\psi''_0(0) > 0$ （例如，在 Plummer 势中， $\psi''_0(0) = GM/a^3$ ），因此频率 ω^2 为负。我们将其表示为 $\omega = i\gamma$ ，其中 γ 是增长率。所考虑的分布类是不稳定的，因为扰动的增长率使得，

$$\gamma \leq \sqrt{3\psi''(0)}. \quad (12)$$

引力情况的讨论。由轨道约束分布导出的不稳定条件对靠近星团核心处扰动的增长率施加了一个上限。这个限制来源于在原点处需要一个有限且规则的引力势的要求。从物理上讲，这意味着在一个冷、无碰撞的核心中不能存在任意快速的再分配，除非有一个相应大的中心势曲率。这限制了动力学不稳定性的产生。由于 $\psi''_0(0)$ 取决于中心质量密度，因此将不稳定性增长的动力学时间尺度与潜在结构联系起来。例如，在一个普鲁默势中，我们有 $\psi''_0(0) = GM/a^3$ ，得到 $\gamma \lesssim \sqrt{3GM/a^3}$ ，这大约是动力学时间的倒数。这不同于经典的热力学不稳定，顺便说一下，在这种情况下由于径向速度上的无限小分散而被抑制了，以及径向轨道不稳定性。这个理论上限提供了一个诊断：原则上，这意味着如果在冷、无碰撞的核心中观察到快速再分配速率（无论是通过模拟还是从瞬态结构推断），则势的局部曲率必须相应陡峭。反之，在没有中心黑洞的球状星团这样的浅势下，则会施加一个更慢的最大增长速度。中等质量黑洞的存在 [15]，相比之下，会加剧 $\psi''(0)$ ，从而允许更快的不稳定驱动演化。这表明，在中心质量集中占主导地位系统中，动力学机制可能会在碰撞过程变得重要之前推动快速早期演化。这可能允许通过高分辨率 N 体模拟进行解释，并且仅通过动态论据来限制不可见的中心质量。

对于冷的、无碰撞的恒星系统，数值模拟 [11] 已经显示早期核心演化受到轨道约束动力学的影响。在初始为冷且球对称配置 [16] 的情况下，其剧烈弛豫导致中央尖峰和准静核的形成。最近的高分辨率研究 [12, 17] 确认，在这一早期阶段，中心区域由相干、近圆形

轨道主导——这与我们的解析假设一致。在这个领域中，碰撞效应可以忽略不计，并且相空间不稳定性控制着重新分布过程。我们推导出的对不稳定性增长速率的限制提供了一个动理论极限，直接将它与引力势的曲率联系起来。这一点在有和没有中心黑洞的模拟 [18] 中得到了反映，在这些模拟中，更深的中央势场加速了核心演化。尽管这些模拟并没有直接施加我们所讨论的冷、轨道约束条件，但它们表明我们的解析模型捕捉到的机制可能自然地出现在球状星团演化的早期阶段，在弛豫使速度分布各向同性之前。

冷 BGK 分布的相关性。尽管我们在分析模型中使用的精确 δ 函数分布代表了一种理想化的极限，实际的数值实现必然涉及由于数值约束而导致的有限但较小的速度弥散。这原则上可以通过 Vlasov 模拟进行测试。然而，正如最近所示 [19]，在执行 Vlasov 模拟时需要具有急剧变化导数的不连续分布特别小心，更不用说以 Dirac δ 函数作为初始条件了。这一点尤其适用于常用的半拉格朗日方案。检验本文精确结果的一种更为直接的方法是测试粒子算法，在这种算法中会使用相空间中的守恒量来传播最初的冷分布，然后数值求解泊松方程。由于需要在泊松方程中仔细处理径向 Dirac 项 $\delta(r - r_{orb})$ ，因此这留待未来的工作，其中 r_{orb} 会遵循等式 7 的时变特征。

总结。总结来说，我们开发了一个统一的动理学框架，用于在由 Vlasov 方程支配的冷、轨道约束系统中推导解析色散关系。在等离子体环境中，这种方法给出了二维有限磁场下冷、各向异性 BGK 模式的第一个显式色散关系，其中包含一组有限的不稳定角模和磁稳定化的阈值。应用于自引力系统时，同样的方法建立了中心扰动增长率的一个严格上限，该上限由引力势的曲率决定。这一结果表明，冷、无碰撞的核心不能在无显著中心质量集中情况下快速重新分布——将不稳定性增长的动力学与核心结构联系起来。综上所述，这些发现突显了长程相互作用系统中共享的动理学机制。该形式主义应用广泛，可能使其他几何中的新色散关系得以实现。未来的解析工作、模拟和受这些结果启发的观测研究可能会增进我们对等离子体和天体物理环境中相空间不稳定性理解。

作者感谢 Charles Ruyer、Vanina Recoules 和

Jean-Christophe Pain 仔细阅读手稿。感谢与 Didier Bénisti、Serge Bouquet、Matthias Pautard 和 Robin Piron 的有益讨论。

* mikael.tacu@cea.fr

- [1] I. B. Bernstein, J. M. Greene, and M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **108**, 546 (1957).
- [2] H. Schamel, *J. Plasma Phys.* **7**, 1 (1972).
- [3] J. L. Schwarzmeier, H. R. Lewis, B. Abraham-Shrauner, and K. R. Symon, *Phys. Fluids* **22**, 1747 (1979).
- [4] I. H. Hutchinson, *Phys. Plasmas* **24**, 055601 (2017).
- [5] R. E. Ergun, C. W. Carlson, J. P. McFadden, F. S. Mozer, G. T. Delory, W. Peria, R. C. Elphic, and R. J. Strangeway, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 826 (1998).
- [6] R. Pottellette and R. A. Treumann, *Geophys. Res. Lett.* **32** (2005).
- [7] C. S. Ng and A. Bhattacharjee, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 245004 (2005).
- [8] J. McClung, M. T. Franciscovich, K. Germaschewski, and C. S. Ng, *Phys. Plasmas* **31**, 042302 (2024).
- [9] M. T. Franciscovich, J. McClung, K. Germaschewski, and C. S. Ng, *Phys. Plasmas* **32**, 022302 (2025).
- [10] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics: Second Edition* (2008).
- [11] T. S. van Albada, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **201**, 939 (1982).
- [12] F. Sylos Labini and M. Joyce, *Astron. Astrophys.* **652**, A8 (2021).
- [13] O. Penrose, *Phys. Fluids* **3**, 258 (1960).
- [14] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas, *Exercices de mathématiques : oraux X-ENS, analyse 4*, 1st ed. (CASSINI, 2012), p. 120.
- [15] M. Häberle, N. Neumayer, A. Seth, *et al.*, *Nature* **631**, 285 – 288 (2024).
- [16] D. Merritt and L. A. Aguilar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **217**, 787 (1985).
- [17] S. Rozier, J.-B. Fouvry, P. G. Breen, A. L. Varri, C. Pichon, and D. C. Heggie, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **487**, 711 (2019).
- [18] P. G. Breen and D. C. Heggie, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **432**, 2779 (2013).
- [19] M. Tacu and D. Bénisti, *Phys. Rev. E* **110**, 045205 (2024).