

非厄米波湍流

Xander M. de Wit,¹ Sébastien Galtier,² Michel Fruchart,³ Federico Toschi,^{1,4} and Vincenzo Vitelli^{5,6,*}

¹*Department of Applied Physics and Science Education,*

Eindhoven University of Technology, 5600 MB Eindhoven, Netherlands

²*Université Paris-Saclay, Laboratoire de Physique des Plasmas, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

³*Gulliver, ESPCI Paris, Université PSL, CNRS, 75005 Paris, France*

⁴*CNR-IAC, I-00185 Rome, Italy*

⁵*Kadanoff Center for Theoretical Physics, The University of Chicago, Chicago, IL 60637, USA*

⁶*James Franck Institute, The University of Chicago, Chicago, IL 60637, USA*

(10Dated: 2025 年 4 月 24 日)

波湍流描述了由弱相互作用波组成的非平衡系统在长时间内的统计行为。从开放量子系统到活性材料的非厄米介质可以维持所谓的 $\mathcal{PT}$ 对称状态中的波传播, 在这种状态下, 增益和损耗被有效平衡。在这里, 我们推导了一个原型非厄米介质中波湍流的动力学方程: 一个具有奇黏度的三维流体。我们计算了其精确各向异性的解, 即所谓的柯尔莫哥洛夫-扎哈罗夫谱, 并通过直接数值模拟验证了这种状态的存在。这种非厄米波湍流产生了一个直达小尺度并维持下来的直接级联, 抑制了通常在旋转流体和电子磁流体力学中观察到的向强湍流转变。除了奇黏度流体之外, 这种定性机制也适用于任何非线性波动系统, 在这些系统中, 通过动力学方程中的梯度项 (例如通过奇弹性模量或其他非互易响应) 在小尺度下增强了非厄米效应。

波湍流描述了由弱相互作用的波动组成的非平衡系统的长时间统计行为 [1–6]。从开放量子系统到活性材料等非厄米介质可以在所谓的 $\mathcal{PT}$ 对称状态中维持波动传播, 其中增益和损耗有效平衡 [7–35]。在这里我们问: 当这些非厄米介质的非线性动力学主要由弱相互作用的波主导时会发生什么? 我们将这个领域称为非厄米特波湍流之类的。

我们通过研究这种在典型非线性非厄米系统中的波湍流来说明我们的方法: 带有额外无耗散粘度系数的 Navier-Stokes 方程, 这些系数分别被称为奇粘度、霍尔粘度或旋粘度 [36–51]。非厄米介质通常在微观层面上具有活性 (即增益) 以及耗散 (即损失), 这两者可以平衡以生成系统中的波动。作为具体案例, 从磁化多原子气体 [52] 到磁性石墨烯 [53] 和旋转胶体 [54] 的奇粘流体实验实现都表现出微观层面上的旋转驱动。

如果流体围绕固定轴整体旋转, 通常在大尺度上会观察到各向异性的波湍流, 而在小尺度上则会观察到各向同性的强湍流 [55–57], 见图 1a。相比之下, 在我们的非厄米流体中, 波湍流一直持续到流动的最小活动尺度 (图 1b)。直观上来说, 这种非厄米效应发生是因为奇粘性作用于速度梯度。与手征体力 (例如科里奥利力) 不同, 由奇粘性产生的波随着波数的增加而增强, 抑制了向强湍流转变的可能性。在奇流体中

观察到强湍流作为不同的状态存在 (图 1c), 这在参考文献 [58, 59] 中有研究, 在那里关于弱相互作用波的奇流体描述失效, 类似于非费米液体中准粒子图像的失效 [60]。除了奇粘性流体之外, 这里探讨的定性机制适用于任何通过动力学方程中的梯度项在小尺度上增强非厄米效应的波非线性系统, 例如通过奇弹性模量或其他非互易响应 [16, 37, 61]。

非厄米手性流体考虑一个具有圆柱对称性的不可压缩手性流体, 沿方向 $\mathbf{e}_{\parallel}$ [39], 假设所有粒子都在旋转。流动 $\mathbf{u}$ 由包含奇粘度的 Navier-Stokes 方程描述,

$$D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \begin{pmatrix} \nu & \nu_{\text{odd}} & 0 \\ -\nu_{\text{odd}} & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

其中 $D_t \mathbf{u} \equiv \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。这里, p 是减压, $\mathbf{f}$ 是流的驱动力, ν 是正常粘度, 而 ν_{odd} 是奇粘度。公式 (1) 中的矩阵在 $\nu_{\text{odd}} \neq 0$ 时不为对称, 表现出奇粘度的非厄米性。波矢 $\mathbf{k}$ 在基底 $(\mathbf{e}_{\perp}^1, \mathbf{e}_{\perp}^2, \mathbf{e}_{\parallel})$ 中分解为 $\mathbf{k} \equiv (k_{\perp} \cos \theta, k_{\perp} \sin \theta, k_{\parallel})$, 其中矩阵在方程 (1) 中表示。奇粘性可以看作是一个与波数相关的科里奥利力 $-\nu_{\text{odd}} k^2 \mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{u}$, 在较大的 $k \equiv |\mathbf{k}|$ 处更强, 这体现在它诱导的奇波的色散关系 $\omega_{\mathbf{k}} = \pm \nu_{\text{odd}} k_{\parallel} k$ 中 [36, 58, 59]。

波湍流的条件为了评估波湍流是否可能出现,

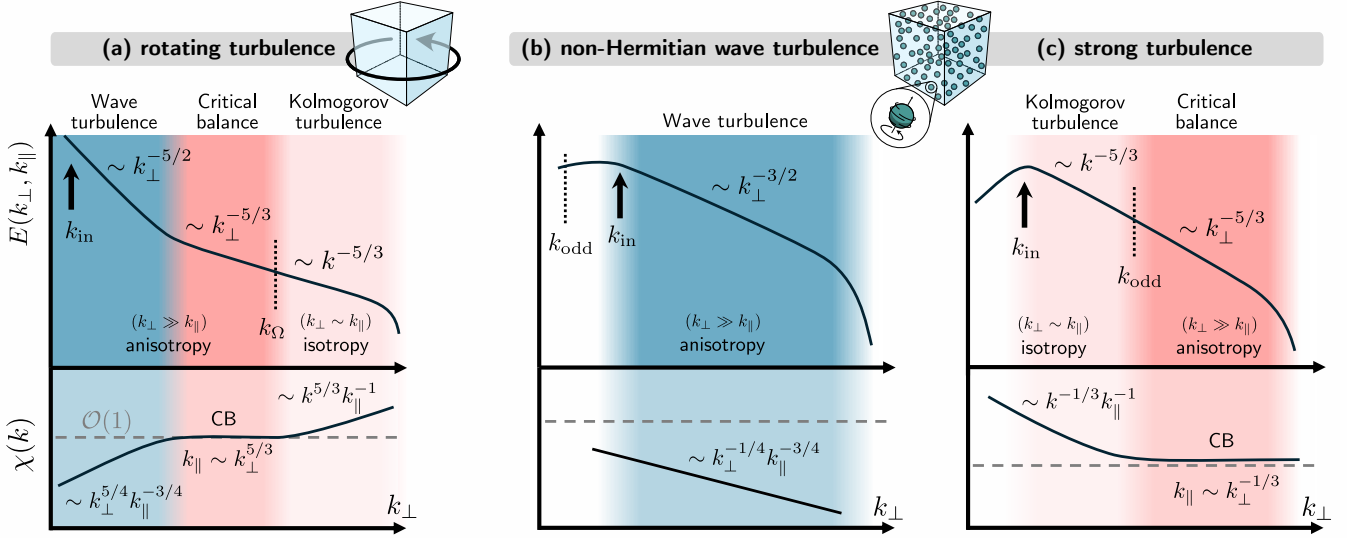


图 1. 旋转流体中的波湍流 (a) 和具有奇粘度的流体中的波湍流 (b)。顶部行描绘了各向异性的能量谱 $E(k_{\perp}, k_{\parallel})$ ，而底部行描绘了某些 $k_{\parallel} > 0$ 的时间尺度比 $\chi \equiv \tau_{\text{lin}}/\tau_{\text{NL}}$ 。底部面板中的虚线表示临界值 $\chi \sim \mathcal{O}(1)$ ，低于该值时，预期会出现波湍流。对于旋转波湍流 (a)，动力学逐渐变得不那么弱，并最终在超过 Zeman 波数 k_{Ω} [6, 55–57] 的小尺度上恢复强湍流和各向同性。相比之下，在奇涡流中，范围 $k > k_{\text{in}} > k_{\text{odd}}$ (b) 内的弱波湍流一直持续到最小的活跃尺度，而只有在大尺度 $k_{\text{in}} < k_{\text{odd}}$ (c) 注入能量时才能获得强湍流。

我们将非线性相互作用的时间尺度 τ_{NL} 与线性波的周期 τ_{lin} 进行比较。这里，我们将 τ_{NL} 估计为涡旋转换时间，可以用动能谱 $E(k_{\perp}, k_{\parallel})$ 表示为 $\tau_{\text{NL}} \sim 1/(k\sqrt{E(k_{\perp}, k_{\parallel})k_{\perp}k_{\parallel}})$ ，而波的周期 $\tau_{\text{lin}} \sim 1/\omega_k$ 则由它们的色散关系给出。这些时间尺度的比值是

$$\chi \equiv \frac{\tau_{\text{lin}}}{\tau_{\text{NL}}} = \frac{\sqrt{E(k_{\perp}, k_{\parallel})k_{\perp}k_{\parallel}}}{\nu_{\text{odd}}k_{\parallel}}. \quad (2)$$

虽然当 $\chi \geq \mathcal{O}(1)$ 时通常会得到规则的涡旋主导的强湍流，但当 $\chi \ll \mathcal{O}(1)$ 时可能会出现波或弱湍流。

遇到的湍流现象取决于能量注入的尺度。当在大尺度 $k_{\text{in}} < k_{\text{odd}} \equiv \varepsilon^{1/4}\nu_{\text{odd}}^{-3/4}$ 注入能量，其中 ε 是湍流能量注入率 [58]，我们在范围 $k < k_{\text{odd}}$ 内遇到类似 Kolmogorov 的湍流，在这个范围内波是缓慢的 ($\chi > \mathcal{O}(1)$)。当跨越尺度 k_{odd} 时，通过构造，涡旋时间尺度和波的时间尺度变得相同数量级，并且我们进入了一个在波动湍流中被称为临界平衡 [6, 57, 62–65] 的状态，在范围 $k > k_{\text{odd}}$ 内其中 $\chi \sim \mathcal{O}(1)$ ，见图 1c。在这个范围内，早期的工作揭示了能量积累导致图案形成和谱标度 $E(k) \sim k^{-1}$ [58, 59]。

另一方面，当在较小尺度 $k_{\text{in}} > k_{\text{odd}}$ 注入能量时，在 2D 流形中 (具有 $k_{\parallel} = 0$) 已知会出现动能逆级联现象，在范围 $k < k_{\text{in}}$ 中如参考文献 [58] 所详细描述。

然而，只有部分动能通过 2D 流形向上级联。剩余的能量通量仍然向前级联到范围 $k > k_{\text{in}}$ (这一性质在惯性波湍流 [66] 中也被观察到)。这个范围在早期的研究中尚未被详细研究。正如我们将展示的，这个范围恰好是动力学足够缓慢的情况，使得所有模式下 $\chi \ll \mathcal{O}(1)$ 成立，表明我们可能在这种情况下在三维流形中遇到波浪湍流 (具有 $k_{\parallel} > 0$)。为了进入这些流动条件，因此我们需要在尺度 $k_{\text{in}} > k_{\text{odd}}$ 处强制流动，然后关注范围 $k > k_{\text{in}}$ (图 1b 中的蓝色区域，请参见结尾部分的图 5)。

动力学方程我们现在使用波湍流的方法来推导能量谱的动能方程，从中可以得到物理性质 (例如稳定谱、级联方向) [1–4, 6, 67–69]。主要思路是将波幅作为多重时间尺度方法中的一个小参数。推导过程如下所述，而关键的技术步骤则在末尾部分提供，并在补充材料中详细说明。

我们首先对 Navier-Stokes 方程进行模态展开，将其置于符号形式

$$i\frac{\partial A_k^{s_k}}{\partial t} = s_k\omega_k A_k^{s_k} + M_{kpq}^{s_k s_p s_q} A_p^{s_p} A_q^{s_q}, \quad (3)$$

其中隐含了对 s_p 和 s_q 的求和以及对 p 和 q 的积分 (详见补充材料以获取完整表达式)。这里， $A_k^{s_k}$ 表示一个具

有极性 $s_k = \pm 1$ 和波数 k 的模式, 而 $M_{kpq}^{s_k s_p s_q}$ 是非线性模耦合系数。类似的方程可以描述任何一组在二次非线性作用下相互作用的波, 包括空间扩展量子系统或光学腔的模耦合理论。更精确地说, $A_k^{s_k} = k\psi_k - s_k k^2 \hat{\phi}_k$ 是从速度场分解 $\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_{\parallel}) + \nabla \times (\nabla \times (\phi \mathbf{e}_{\parallel}))$ 的傅里叶分量中定义的, 该分解将速度场分解为环形 (ψ) 和多极 (ϕ) 标量场 ($\hat{X}_k$ 表示一个场 X 的傅里叶变换)。我们可以证明 $|A_k^+|^2 + |A_k^-|^2 = 2|\hat{\mathbf{u}}_k|^2$ 。

引入弱振幅波 ($0 < \epsilon \ll 1$) 的相互作用表示法 $A_k^{s_k} = \epsilon a_k^{s_k} e^{-i s_k \omega_k t}$, 我们得到波动幅度方程

$$\frac{\partial a_k^{s_k}}{\partial t} = \epsilon L_{kpq}^{s_k s_p s_q} a_p^{s_p} a_q^{s_q} e^{i \Omega_{k,p,q} t} \delta_{k,p+q}, \quad (4)$$

, 其中对 s_p 和 s_q 求和以及对 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 积分是隐含的, 在这里 $\Omega_{k,p,q} \equiv s_k \omega_k - s_p \omega_p - s_q \omega_q$, 其中相互作用系数 $L_{kpq}^{s_k s_p s_q}$ 在附录中给出。因此, 长时间的统计行为受三波相互作用的共振条件控制, 即 $s_k \omega_k + s_p \omega_p + s_q \omega_q = 0$ 和 $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ 。这些关系可以写成如下形式:

$$\frac{s_q q - s_p p}{k_{\parallel}} = \frac{s_k k - s_q q}{p_{\parallel}} = \frac{s_p p - s_k k}{q_{\parallel}}. \quad (5)$$

对于局部相互作用, $k \simeq p \simeq q$, 我们得到 $(s_q - s_p)/k_{\parallel} \simeq (s_k - s_q)/p_{\parallel} \simeq (s_p - s_k)/q_{\parallel}$, 这意味着相关的级联必定是各向异性的, 并且在平行方向上的级联可以忽略不计。这种情况类似于惯性波湍流 [70, 71] 和动能阿尔芬波湍流 [72], 其中的波动也是螺旋状的。在下文中, 我们利用这一性质并考虑各向异性极限 $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ 。

假设统计上均匀各向异性的湍流 [73], 可以使用多时间尺度方法推导出形式为

$$\partial_t E(k_{\perp}, k_{\parallel}) = -\partial_{k_{\perp}} \Pi_{\perp} - \partial_{k_{\parallel}} \Pi_{\parallel}, \quad (6)$$

的动力方程, 描述能量谱 $E(k_{\perp}, k_{\parallel})$ 的演化, 在没有动能螺旋度的情况下, 它与方程 (4) 中的振幅通过 $E(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \langle a_k^+ a_{k'}^+ \rangle + \langle a_k^- a_{k'}^- \rangle$ 相关, 其中 $\langle \cdot \rangle$ 是集合平均。数量 $\Pi_{\perp}$ 和 $\Pi_{\parallel}$ 表示垂直和平行方向的能量通量, 方程 (6) 的显式形式在结尾部分给出。假设轴对称湍流, 二维谱 $E(k_{\perp}, k_{\parallel}) = 2\pi k_{\perp} E(\mathbf{k})$ 按照 $k_{\perp}^{-3/2} k_{\parallel}^{-1/2}$ 缩放, 这对应于 Kolmogorov-Zakharov (KZ) 谱。当奇波湍流稳定时, 这是动能方程的一个精确解。能量通量可以证明是正的, 因此相应的级联是直接的 (结尾部分)。

现象学前一段推导出的 KZ 谱可以通过简单的现象学论据恢复。当 $\chi \ll 1$ 时, 可以预期波湍流, 见方程

(2)。如上所述, 波湍流通过共振三波相互作用发展。这发生在转移时间比波周期长得多的情况下, 因子为 $\chi^{-2} \sim \epsilon^{-2}$ [3]。这导致了波相互作用传输时间 [74, 75]

$$\tau_{\text{tr}} \sim \frac{\tau_{\text{NL}}^2}{\tau_{\text{lin}}} \sim \frac{\nu_{\text{odd}}}{k k_{\perp} E(k_{\perp}, k_{\parallel})}. \quad (7)$$

然后我们可以使用 Kolmogorov 类型的论据, 并假设在波动湍流状态下, 每个波数壳 $E(k_{\perp}, k_{\parallel}) k_{\perp} k_{\parallel}$ 的能量以恒定的能量传输率传输, 在时间尺度 τ_{tr} 上。

$$\epsilon \sim \frac{E(k_{\perp}, k_{\parallel}) k_{\perp} k_{\parallel}}{\tau_{\text{tr}}}. \quad (8)$$

然后利用公式 (7) 和 $k \sim k_{\perp}$ (假设 $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$), 我们可以得到能量谱为

$$E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \sim \sqrt{\epsilon \nu_{\text{odd}}} k_{\perp}^{-3/2} k_{\parallel}^{-1/2}. \quad (9)$$

这一预测导致了时间尺度比

$$\chi \sim \left(\frac{\epsilon}{k_{\perp} k_{\parallel}^3 \nu_{\text{odd}}^3} \right)^{1/4}. \quad (10)$$

因此, $k_{\perp}$ 越大, 级联越弱。我们指出, 这与旋转 (惯性波) 湍流形成对比, 在旋转 (惯性波) 湍流中, 强湍流总是在最小尺度上恢复, [70, 76]。而对于这种非厄米

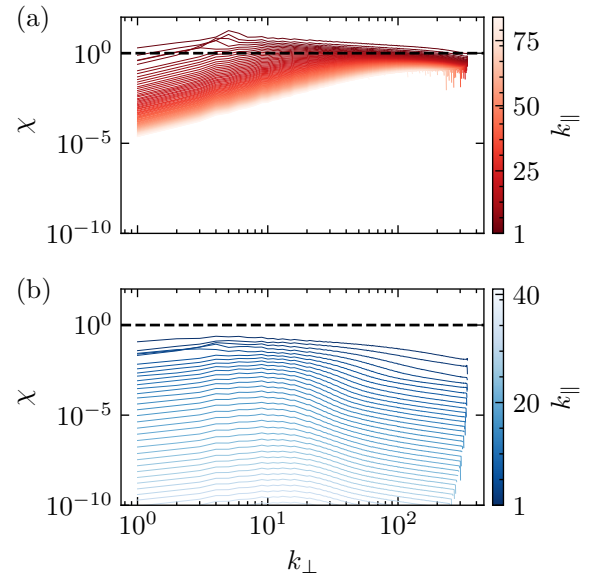


图 2. 时间尺度比 $\chi \equiv \tau_{\text{lin}}/\tau_{\text{NL}}$ 对比了强湍流 (a) 和弱湍流 (b) 情况下奇波和涡旋湍流的时间尺度。不同的线条代表不同的 $k_{\parallel}$ 。当所有模式低于 $\chi < \mathcal{O}(1)$ (虚线) 时, 发现进入了弱波湍流区域。

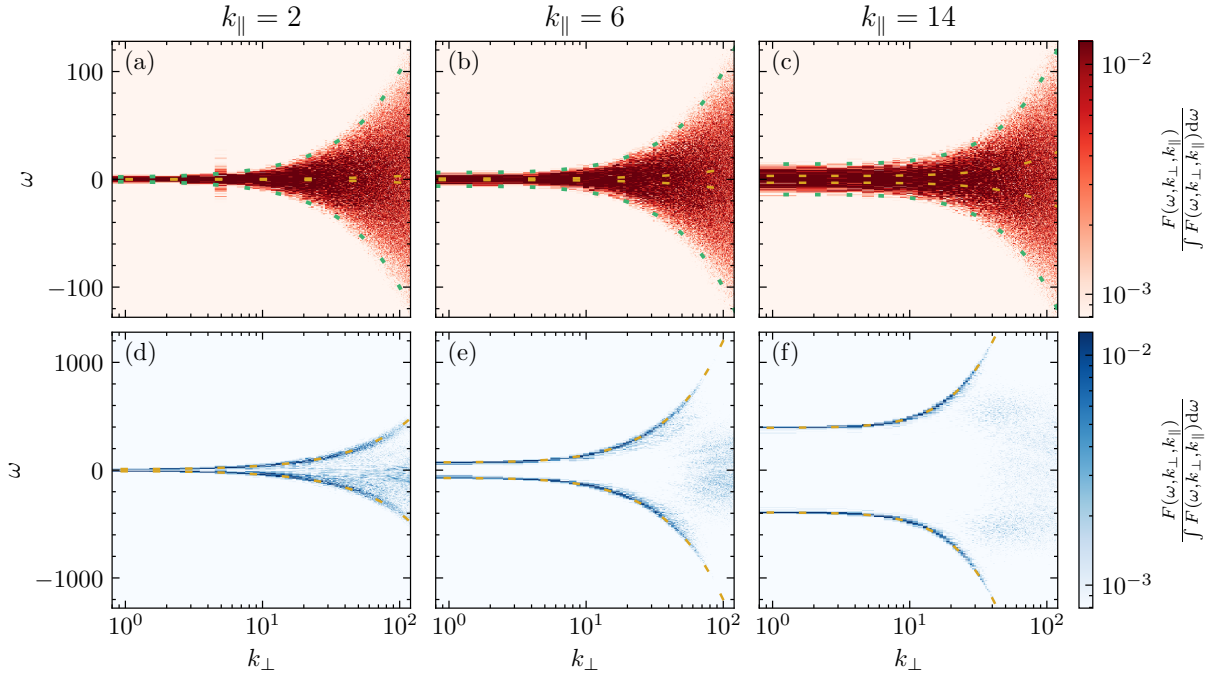


图 3. 时空能量谱 $F(\omega, k_{\perp}, k_{\parallel})$ 对于强 (a-c) 和弱波湍流 (d-f) 的情况, 以及不同的 $k_{\parallel}$ 值为 2 (a,d)、6 (b,e) 和 14 (c,f)。黄色虚线表示奇波的色散关系 $\omega_k = \pm \nu_{\text{odd}} k_{\parallel} k$ 。绿色点线在 (a-c) 中表示相应的涡旋转换频率 $\omega \sim k \sqrt{k E(k)} \sim k$ [58], 这捕获了强湍流的空间-时间谱包络。谱通过其对应的频率空间积分进行归一化, 对于每个 $k_{\perp}, k_{\parallel}$ 。

特波湍流, 湍流则保持在弱状态直到最小尺度, 见图 1。

数值模拟我们通过直接数值模拟 (DNS) 在周期性盒子中使用伪谱代码数值求解具有奇粘性的三维 Navier-Stokes 方程 (1) (也见参考文献 [58])。该系统采用高斯噪声 $\mathbf{f}(\mathbf{k}, t)$ 进行驱动, 该噪声在时间上是 δ 相关的, 并应用于波数 $k_{\text{in}} = 5$ 附近的一个窄带中, 限制在三维流形内。因此我们精确地驱动那些同时具有 $k_{\text{in}} \leq |\mathbf{k}| < k_{\text{in}} + 1$ 和 $k_{\parallel} \neq 0$ 的波数。为了最大化惯性范围的大小, 将粘度项替换为形式为 $\nu_{\alpha} \Delta^{\alpha} \mathbf{u}$ 的超粘度项。我们还引入了一种形式为 $\nu_h \Delta^{-\alpha_h} \mathbf{u}$ 的低粘度项来耗散在二维流形中低波数下发展的逆向通量。模拟中使用的输入参数见表 I (结尾部分)。

数值结果为了诊断是否进入了允许波湍流的条件, 我们在直接数值模拟 (图 2) 中评估所有模式在方程 (2) 中的时间尺度比 χ 。可以看出, 确实, 在图 2 (a) 中的强湍流运行中, 模式倾向于保持在 $\chi \approx 1$ 附近, 而在图 2 (b) 中的弱湍流运行中所有模式都有 $\chi \ll 1$ 。在那里, 最慢的模式有 $\chi \approx 0.1$, 在这个范围内通常可以观察到波主导流动系统中的波浪湍流 [72, 77]。

为了确认我们确实进入了非厄米波湍流的范围, 检查空间-时间能量谱 [72, 78–84] 是至关重要的。为此, 我们计算选定的空间傅里叶模式时间序列 $\hat{\mathbf{u}}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t)$ 的时间傅里叶变换 $\mathcal{F}_t\{\dots\}$, 得到空间-时间谱 $F(\omega, k_{\perp}, k_{\parallel}) \equiv \frac{1}{2} |\mathcal{F}_t\{\hat{\mathbf{u}}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t)\}|^2$ 。结果如图 3 所示。对于强湍流, 这确实显示了一个广泛的活跃模式范围, 其包络线很好地符合涡旋周转频率的比例 $\omega \sim k \sqrt{k E(k)} \sim k$ [58]。对于弱湍流, 另一方面, 在惯性范围内, 动能非常强烈地集中在奇波的色散关系 $\omega_{\text{odd}} = \nu_{\text{odd}} k_{\parallel} k$ 周围。这是明确的迹象, 表明在这种情况下确实达到了弱湍流状态。

时间平均的各向异性动能谱如图 4 所示。在强湍流的情况下, 前面讨论的关键平衡假设预测一个按 $E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \sim k_{\perp}^{-5/3} k_{\parallel}^{-1}$ [6, 57, 62–65] 放缩的各向异性谱。确实, 我们在范围 $k > k_{\text{odd}}$ 中观察到 $\chi \approx \mathcal{O}(1)$ (图 2a), 并检索出假设的临界平衡谱标度 $E \sim k_{\perp}^{-5/3}$ (图 4a)。在弱湍流情况下, 我们发现与方程 (9) 预测的奇波湍流预测 $E \sim k_{\perp}^{-3/2}$ (图 4b) 非常一致, 尽管惯性范围有限 (回想一下, 弱湍流的理论预测仅对 $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ 有效)。最后, 我们确认光谱与垂直方向上的直接级联

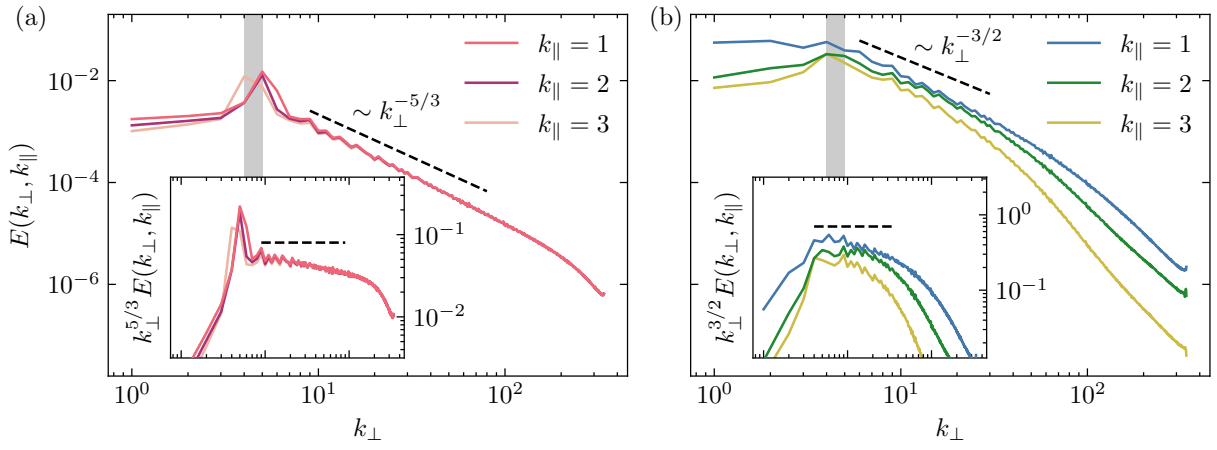


图 4. 各向异性动能谱 $E(k_{\perp}, k_{\parallel})$ 对于强波湍流 (a) 和弱波湍流 (b) 的第一三种模式 $k_{\parallel}$ 。插图显示了各自标度预测补偿后的谱。阴影区域描绘了强迫范围。对于相应的各向同性能量谱, 请参见补充材料。

兼容。由于平行方向上的通量非常小, 导致其惯性范围太窄, 因此我们无法通过数值方法测试平行方向上的标度预测。

展望总之, 我们展示了不可压缩奇流体中波湍流的应用。这项工作为其他非厄米系统 (如开放量子系统 [7, 12, 18, 24, 85–89]、具有奇弹性模量的过阻尼弹性 [37]) 中的应用铺平了道路, 这些可以与活性板中的弹性波湍流 [90, 91] 和聚合物溶液 [92–94] 进行比较。

致谢该项工作得到荷兰科学研究组织 (NWO) 通过超级计算机设施 (Snellius) 的支持, 资助号为 2023.026。本出版物是项目 “用智能颗粒塑造湍流” 的一部分, 该项目编号为 OCENW.GROOT.2019.031, 该研究计划属于开放竞争性研究 ENW XL 项目, 并由荷兰科学研究理事会 (NWO) 资助 (部分)。SG 得到西蒙斯基金会的资助 (资助号: 651461, PPC)。M.F. 和 V.V. 感谢法国芝加哥中心通过 FACCTS 拨款提供的支持。V.V. 感谢陆军研究办公室在资助号码 W911NF-22-2-0109 和 W911NF-23-1-0212 的支持, 以及国家科学基金会的资助号 DMR-2118415 的支持, 并通过生命系统中心 (资助号 2317138) 和生物理论与数学研究所 (NITMB), 芝加哥大学材料研究科学与工程中心 (NSF DMR-2011864) 以及陈—扎克伯格倡议的生物理论计划。SG 感谢 V. David 对有用讨论的支持。

* vitelli@uchicago.edu

- [1] V. Zakharov, V. L’Vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence* (Springer Series in Nonlinear Dynamics, Berlin: Springer, 1992, 1992).
- [2] S. Nazarenko, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics, Vol. 825 (Berlin Springer Verlag, 2011).
- [3] S. Galtier, *Physics of Wave Turbulence* (Cambridge University Press, 2023).
- [4] A. C. Newell and B. Rumpf, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59 – 78 (2011).
- [5] S. Galtier and S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 221101 (2017).
- [6] Y. Zhou, *Phys. Rep.* **935**, 1 – 117 (2021).
- [7] N. Hatano and D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 570 – 573 (1996).
- [8] N. Hatano and D. R. Nelson, *Phys. Rev. B* **56**, 8651 – 8673 (1997).
- [9] C. M. Bender and S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
- [10] C. M. Bender, *Rep. Prog. Phys.* **70**, 947 – 1018 (2007).
- [11] D. R. Nelson and N. M. Shnerb, *Phys. Rev. E* **58**, 1383 – 1403 (1998).
- [12] A. Clerk, *SciPost Phys. Lect. Notes*, 44 (2022).
- [13] M.-A. Miri and A. Alù, *Science* **363**, eaar7709 (2019).
- [14] M. G. Silveirinha, *Phys. Rev. B* **99**, 125155 (2019).
- [15] C. Scheibner, W. T. M. Irvine, and V. Vitelli, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 118001 (2020).
- [16] C. Scheibner, A. Souslov, D. Banerjee, P. Surówka, W. T. M. Irvine, and V. Vitelli, *Nat. Phys.* **16**, 475 – 480 (2020).
- [17] A. Ghatak, M. Brandenbourger, J. van Wezel, and C. Coulais, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **117**, 29561

- 29568 (2020).
- [18] Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, *Adv. Phys.* **69**, 249 – 435 (2020).
- [19] Z. Zhang, L. Xu, T. Qu, M. Lei, Z.-K. Lin, X. Ouyang, J.-H. Jiang, and J. Huang, *Nat. Rev. Phys.* **5**, 218 – 235 (2023).
- [20] C. Wang, Z. Fu, W. Mao, J. Qie, A. D. Stone, and L. Yang, *Adv. Opt. Photonics* **15**, 442 (2023).
- [21] R. El-Ganainy, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and S. K. Ozdemir, *Commun. phys.* **2**, 37 (2019).
- [22] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, *Nat. Phys.* **14**, 11 – 19 (2018).
- [23] E. J. Bergholtz, J. C. Budich, and F. K. Kunst, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 015005 (2021).
- [24] Y.-X. Wang and A. A. Clerk, *Phys. Rev. A* **99**, 063834 (2019).
- [25] A. Li, H. Wei, M. Cotrufo, W. Chen, S. Mann, X. Ni, B. Xu, J. Chen, J. Wang, S. Fan, C.-W. Qiu, A. Alù, and L. Chen, *Nat. Nanotechnol.* **18**, 706 – 720 (2023).
- [26] M. Lapine, I. V. Shadrivov, and Y. S. Kivshar, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1093 – 1123 (2014).
- [27] K. Kawabata, K. Shiozaki, and S. Ryu, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 216405 (2021).
- [28] E. Galiffi, R. Tirole, S. Yin, H. Li, S. Vezzoli, P. A. Huidobro, M. G. Silveirinha, R. Sapienza, A. Alù, and J. B. Pendry, *Adv. Photonics* **4**, 10.1117/1.ap.4.1.014002 (2022).
- [29] M. Coppolaro, M. Moccia, V. Caligiuri, G. Castaldi, N. Engheta, and V. Galdi, *ACS Photonics* **7**, 2578 – 2588 (2020).
- [30] E. Rivet, A. Brandstötter, K. G. Makris, H. Lissek, S. Rotter, and R. Fleury, *Nat. Phys.* **14**, 942 – 947 (2018).
- [31] J. Schindler, A. Li, M. C. Zheng, F. M. Ellis, and T. Kottos, *Phys. Rev. A* **84**, 040101 (2011).
- [32] C. M. Bender, B. K. Berntson, D. Parker, and E. Samuel, *Am. J. Phys.* **81**, 173 – 179 (2013).
- [33] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, and D. Kip, *Nat. Phys.* **6**, 192 – 195 (2010).
- [34] C. M. Bender and S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 – 5246 (1998).
- [35] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401 (2002).
- [36] J. Avron, *J. Stat. Phys.* **92**, 543 – 557 (1998).
- [37] M. Fruchart, C. Scheibner, and V. Vitelli, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **14**, 471 – 510 (2023).
- [38] D. Banerjee, A. Souslov, A. G. Abanov, and V. Vitelli, *Nat. Commun.* **8**, 10.1038/s41467-017-01378-7 (2017).
- [39] T. Khain, C. Scheibner, M. Fruchart, and V. Vitelli, *J. Fluid Mech.* **934**, A23 (2022).
- [40] P. Wiegmann and A. G. Abanov, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 034501 (2014).
- [41] M. Han, M. Fruchart, C. Scheibner, S. Vaikuntanathan, J. J. de Pablo, and V. Vitelli, *Nat. Phys.* **17**, 1260 – 1269 (2021).
- [42] M. Fruchart, M. Han, C. Scheibner, and V. Vitelli, The odd ideal gas: Hall viscosity and thermal conductivity from non-hermitian kinetic theory (2022), [arXiv:2202.02037](https://arxiv.org/abs/2202.02037).
- [43] S. Musser, H. Goldman, and T. Senthil, *Phys. Rev. B* **110**, 024515 (2024).
- [44] C. Hoyos and D. T. Son, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 066805 (2012).
- [45] L. V. Delacrétaz and A. Gromov, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 226602 (2017).
- [46] B. Bradlyn, M. Goldstein, and N. Read, *Phys. Rev. B* **86**, 245309 (2012).
- [47] T. Holder, R. Queiroz, and A. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 106801 (2019).
- [48] T. Scaffidi, N. Nandi, B. Schmidt, A. P. Mackenzie, and J. E. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 226601 (2017).
- [49] T. Markovich and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 048001 (2021).
- [50] Y. Hosaka, R. Golestanian, and A. Vtilfan, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 178303 (2023).
- [51] Y. Hosaka, S. Komura, and D. Andelman, *Phys. Rev. E* **103**, 042610 (2021).
- [52] J. J. M. Beenakker and F. R. McCourt, *Annu. Rev. Phys. Chem.* **21**, 47 – 72 (1970).
- [53] A. I. Berdyugin, S. G. Xu, F. M. D. Pellegrino, R. K. Kumar, A. Principi, I. Torre, M. B. Shalom, T. Taniguchi, K. Watanabe, I. V. Grigorieva, M. Polini, A. K. Geim, and D. A. Bandurin, *Science* **364**, 162 – 165 (2019).
- [54] V. Soni, E. S. Bililign, S. Magkiriadou, S. Sacanna, D. Bartolo, M. J. Shelley, and W. T. M. Irvine, *Nat. Phys.* **15**, 1188 – 1194 (2019).
- [55] Y. Zhou, *Phys. Fluids* **7**, 2092 (1995).
- [56] O. Zeman, *Phys. Fluids* **6**, 3221 (1994).
- [57] A. Alexakis and L. Biferale, *Phys. Rep.* **767** – 769, 1 – 101 (2018).
- [58] X. M. de Wit, M. Fruchart, T. Khain, F. Toschi, and

- V. Vitelli, *Nature* **627**, 515 – 521 (2024).
- [59] S. Chen, X. M. De Wit, M. Fruchart, F. Toschi, and V. Vitelli, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 144002 (2024).
- [60] P. Anderson, *Basic Notions Of Condensed Matter Physics* (CRC Press, 2018).
- [61] M. Fruchart, R. Hanai, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, *Nature* **592**, 363 – 369 (2021).
- [62] J. C. Higdon, *Astrophys. J.* **285**, 109 (1984).
- [63] P. Goldreich and S. Sridhar, *Astrophys. J.* **438**, 763 (1995).
- [64] S. V. Nazarenko and A. A. Schekochihin, *J. Fluid Mech.* **677**, 134 – 153 (2011).
- [65] S. Oughton and W. H. Matthaeus, *Astrophys. J.* **897**, 37 (2020).
- [66] O. Shaltiel, A. Salhov, O. Gat, and E. Sharon, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 224001 (2024).
- [67] D. Benney and P. Saffman, *Proc. R. Soc. Lond. A* **289**, 301 – 320 (1966).
- [68] V. Zakharov and N. Filonenko, *J. Applied Mech. Tech. Phys.* **8**, 37 (1967).
- [69] A. Newell, *Rev. Geophys.* **6**, 1 – 31 (1968).
- [70] S. Galtier, *Phys. Rev. E* **68**, 015301 (2003).
- [71] C. Lamriben, P.-P. Cortet, and F. Moisy, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 024503 (2011).
- [72] V. David, S. Galtier, and R. Meyrand, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 085201 (2024).
- [73] S. Galtier, *C. R. Phys.* **25**, 433 – 455 (2024).
- [74] S. Galtier, *J. Plasma Phys.* **89**, 905890205 (2023).
- [75] Y. Zhou, W. Matthaeus, and P. Dmitruk, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1015 – 1035 (2004).
- [76] S. Nazarenko and A. Schekochihin, *J. Fluid Mech.* **677**, 134 (2011).
- [77] R. Meyrand, K. Kiyani, O. Gürçan, and S. Galtier, *Phys. Rev. X* **8**, 031066 (2018).
- [78] P. Cobelli, P. Petitjeans, A. Maurel, V. Pagneux, and N. Mordant, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 204301 (2009).
- [79] E. Yarom and E. Sharon, *Nat. Phys.* **10**, 510 (2014).
- [80] T. Le Reun, B. Favier, and M. Le Bars, *Europhys. Lett.* **132**, 64002 (2020).
- [81] S. Galtier and S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 131101 (2021).
- [82] E. Falcon and N. Mordant, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **54**, 1 (2022).
- [83] A. Griffin, G. Krstulovic, V. L’vov, and S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 224501 (2022).
- [84] E. A. Kochurin and E. A. Kuznetsov, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 207201 (2024).
- [85] J.-Y. Chen, D. T. Son, M. A. Stephanov, H.-U. Yee, and Y. Yin, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 182302 (2014).
- [86] J.-Y. Chen, D. T. Son, and M. A. Stephanov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 021601 (2015).
- [87] X.-G. Huang, *Rep. Prog. Phys.* **79**, 076302 (2016).
- [88] S. Sayyad, J. D. Hannukainen, and A. G. Grushin, *Phys. Rev. Res.* **4**, 042004 (2022).
- [89] W. Nie, T. Shi, Y.-x. Liu, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 103602 (2023).
- [90] M. Fossati, C. Scheibner, M. Fruchart, and V. Vitelli, *Phys. Rev. E* **109**, 024608 (2024).
- [91] G. Salbreux and F. Jülicher, *Phys. Rev. E* **96**, 032404 (2017).
- [92] S. Chibbaro and C. Josserand, *Phys. Rev. E* **94**, 011101 (2016).
- [93] A. Varshney and V. Steinberg, *Nat. Commun.* **10**, 652 (2019).
- [94] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica, *Phys. D: Nonlinear Phenom.* **347**, 42 – 73 (2017).
- [95] E. Monsalve, M. Brunet, B. Gallet, and P.-P. Cortet, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 254502 (2020).
- [96] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **59**, 745 – 752 (1973).
- [97] F. Waleffe, *Phys. Fluids A* **4**, 350 – 363 (1992).
- [98] L. Turner, *J. Fluid Mech.* **408**, 205 – 238 (2000).
- [99] S. Galtier, *J. Plasma Phys.* **72**, 721 – 769 (2006).
- [100] S. Galtier, *J. Fluid Mech.* **757**, 114 – 154 (2014).

结尾事项

弱波湍流理论

波湍流理论主要由三个步骤组成（详见补充材料以获取详细推导）。第一步关键步骤是推导波动幅度方程 (4)，其中相互作用系数为（在各向异性极限下，即

$$k_{\perp} \gg k_{\parallel}$$

$$L_{kpq}^{ss_p s_q} \equiv \frac{\mathbf{e}_{\parallel} \cdot (\mathbf{p}_{\perp} \times \mathbf{q}_{\perp})}{8k_{\perp} p_{\perp} q_{\perp}} (s_p p_{\perp} - s_q q_{\perp}) (s k_{\perp} + s_p p_{\perp} + s_q q_{\perp}).$$

波动幅度方程描述了弱振幅奇波的缓慢演化。我们注意到，当波矢量 $\mathbf{p}_{\perp}$ 和 $\mathbf{q}_{\perp}$ 共线时，或者当波数 $p_{\perp}$ 和

表 I. 用于本工作中模拟的输入参数。提供的有模拟立方体的尺寸 L , 强迫波数 k_{in} , 动能注入率 ϵ , 奇粘度 ν_{odd} , 相应的奇波数 k_{odd} , 具有幂 α_h 的低粘度 ν_h , 具有幂 α 的高粘度 ν_α , 积分时间步长 dt 和空间分辨率 $N_x \times N_y \times N_z$ 。

	L	k_{in}	ϵ	ν_{odd}	k_{odd}	ν_h	α_h	ν_α	α	dt	$N_x \times N_y \times N_z$
Strong turbulence	2π	5	0.11	0.015	13.4	0	N/A	1.5×10^{-14}	3	2×10^{-5}	$1024 \times 1024 \times 256$
Weak turbulence	2π	5	0.11	2.0	0.34	0.2	2	4.0×10^{-15}	3	5×10^{-6}	$1024 \times 1024 \times 128$

$q_\perp$ 相等且它们各自的方向极性 s_p 、 s_q 也相等时, (二次) 非线性耦合消失。有趣的是, 这些性质也出现在惯性波湍流 [70, 95] 中, 并且更一般地, 在手性波 [96–100] 中也是如此。

第二个关键步骤是推导运动方程。这描述了由三波相互作用的共振条件 (5) 所支配的动力学的长时间统计行为。假设统计均匀且各向异性的湍流, 并且不存在动能螺旋度, 使用多重时间尺度技术导致

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial t} = & \frac{\epsilon^2 k_\parallel}{128 \nu_{\text{odd}}} \sum_{s s_p s_q} \int_{\Delta_\perp} \left(\frac{\sin \theta_k}{k_\perp} \right) \frac{1}{k_\perp p_\perp q_\perp} \left(\frac{s_p p_\perp - s_q q_\perp}{k_\parallel} \right)^2 (s k_\perp + s_p p_\perp + s_q q_\perp)^2 \\ & \times [\omega_k E_p E_q + \omega_p E_k E_q + \omega_q E_k E_p] \delta(\Omega_{kpq}) \delta(k_\parallel + p_\parallel + q_\parallel) dp_\perp dq_\perp dp_\parallel dq_\parallel, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $E_k \equiv E(k_\perp, k_\parallel)$, θ_k 是三角形 $\mathbf{k}_\perp + \mathbf{p}_\perp + \mathbf{q}_\perp = \mathbf{0}$ 中与 $\mathbf{k}_\perp$ 相对的角度, 而 $\Delta_\perp$ 是限制在共振条件下的积分域。密度谱定义为 $e^s(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \langle a_k^s a_{k'}^s \rangle$, 其中 $\langle \rangle$ 是集合平均。在没有动能螺旋度的情况下, $e^+ = e^- \equiv e$ 能量谱变为 $E(\mathbf{k}) = 2e(\mathbf{k})$ 。表达式 (11) 是奇波湍流的动力学方程。这是一个渐近精确的方程, 不描述慢模态 ($k_\parallel = 0$), 这意味着强湍流。

第三个关键步骤是推导物理属性, 其中最重要的是 KZ 谱。这个精确解是通过将 $E_k = A k_\perp^n k_\parallel^m$ 引入表达式 (11) 获得的。使用 Zakharov 变换 [3] 并假设平稳性, 我们找到 $n = -3/2$ 和 $m = -1/2$ 。可以通过分析能量通量的符号来得到级联方向。忽略平行方向上的

通量, 我们得到 $\partial E_k / \partial t = -\partial \Pi_\perp(k_\perp, k_\parallel) / \partial k_\perp$ 。使用动力学方程, 我们找到 $\Pi_\perp^{KZ} = \frac{\epsilon^2 A^2}{384 \nu_{\text{odd}}} \frac{1}{k_\parallel} I_\perp$, 与

$$\begin{aligned} I_\perp \equiv & \sum_{s s_p s_q} \int_{\Delta_\perp} \sin \theta_k (s_q \tilde{q}_\perp - s_p \tilde{p}_\perp)^2 (s + s_p \tilde{p}_\perp + s_q \tilde{q}_\perp)^2 \\ & \times \tilde{p}_\perp^{-5/2} \tilde{q}_\perp^{-5/2} \tilde{p}_\parallel^{-1/2} \tilde{q}_\parallel^{-1/2} (\tilde{p}_\parallel \ln \tilde{p}_\perp + \tilde{q}_\parallel \ln \tilde{q}_\perp) \\ & \times \left(1 + \tilde{p}_\perp^{5/2} \tilde{p}_\parallel^{3/2} + \tilde{q}_\perp^{5/2} \tilde{q}_\parallel^{3/2} \right) \delta(s + s_p \tilde{p}_\perp \tilde{p}_\parallel + s_q \tilde{q}_\perp \tilde{q}_\parallel) \\ & \times \delta(1 + \tilde{p}_\parallel + \tilde{q}_\parallel) d\tilde{p}_\perp d\tilde{q}_\perp d\tilde{p}_\parallel d\tilde{q}_\parallel, \end{aligned} \quad (12)$$

以及与 $\tilde{p}_i \equiv p_i/k_i$ 和 $\tilde{q}_i \equiv q_i/k_i$ ($i = \perp, \parallel$)。对 $I_\perp$ 符号的数值评估显示, 垂直能量通量为正, 因此这种能量级联是直接的。

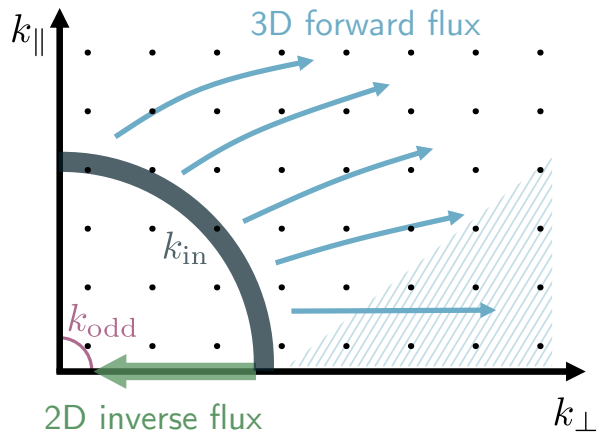


图 5. 弱湍流情况下在 $(k_{\perp}, k_{\parallel})$ 空间中的主要通量示意图（见图 1b）。波涡动导致了这里描绘的三维正向通量。用虚线蓝色标出的是推导 KZ 谱的区域 $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ 。