

位置双积分系统中的安全滑模控制

1st Marco A. Gomez

Department of Automatic Control

Cinvestav

Mexico City, Mexico

marco.gomez@cinvestav.mx

2nd Christopher D. Cruz-Ancona

Tecnologico de Monterrey,

School of Engineering and Sciences,

Nuevo Leon, Mexico

christopher.cruz.ancona@tec.mx

摘要—我们解决了双积分器系统鲁棒安全控制设计的问题。我们展示了，当约束仅定义在位置状态时，可以从一个已经安全的简单积分器的动力学中构造出一个安全滑动域。在这个区域内，闭环轨迹对不确定性和干扰保持稳健和安全。此外，我们设计了一个控制器增益，该增益保证了收敛到安全滑动域的同时避免了给定的不安全集合。这个概念最初是为了一阶滑模而开发的，并随后推广到了一个自适应框架中，确保轨迹被限制在一个预先定义的邻近区域内远离滑动域，外部不安全区域。

Index Terms—滑模控制，安全控制，双积分系统

I. 介绍

旨在不同系统类别中的鲁棒性和安全性特性的控制算法设计是过去几十年中的一个核心问题。虽然可以采用几种方法来构建安全控制器，但稳健安全控制器的设计 [1] 仍然是一个尚未完全解决的主要问题。这方面的一个实例是在滑模控制 (SMC) 与基于控制障碍函数 (CBF) 概念的关键安全控制之间的现有差距，这在若干机器人应用中已经证明了其有效性 [2], [3]。填补这一空白的第一步是在 [4], [5] 中提出的，在那里引入了安全滑模 (SSM) 的概念。大致而言，一个 SSM 是一个流形，在其中闭环系统的轨迹在不进入任何不安全集的同时滑动而保持对有界不确定性和扰动的鲁棒性。

在 [5] 中构建 SSM 的方法依赖于一个类似 Lyapunov 函数的梯度，该函数用于 [6] 中的安全控制器设计。该提案面临两个主要问题：(i) 它假设存在（并且需要构造）控制 Lyapunov 函数 (CLF) 和 CBF；以及 (ii) 它要求在状态空间中设计一个预定轨迹以确保闭环轨迹可以到达 SSM 而不进入不安全集合；这意味着，如果没有预先规划的轨迹，则无法保证安全到达阶段。

在这篇笔记中，我们考虑设计鲁棒安全控制器的的问题，该系统由双积分器描述，并具有不确定性和扰动，形式为

$$\ddot{x}(t) = G(\mathbf{x}) ((I + \Delta_b(t, \mathbf{x}))u(t) + \delta(t, \mathbf{x})), t \geq 0, \quad (1)$$

其中 $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 是局部利普希茨且非奇异的， $u(t) \in \mathbb{R}^n$ 是输入函数， $x \in \mathcal{X}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $\dot{x} \in \mathcal{X}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 。相应的状态空间表示为 $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ ，为了使符号更加简洁，我们将 $\mathcal{X}$ 上的任意向量定义为 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{pmatrix}^T$ ，并将对应的初始条件向量定义为 $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0^T & \dot{x}_0^T \end{pmatrix}^T$ 。函数 $\Delta_b : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\delta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 t 中可测并在 $\mathbf{x}$ 中连续，表征不确定性和扰动项。

我们从 [5] 中引入的安全滑动域定义出发，构建一个鲁棒控制器，以确保在滑动和到达阶段 (1) 的位置轨迹的安全性。我们不需要 CLF，只需要为简单积分器获得的安全控制器，这是在 [2] 框架内得到的。

为了更精确，我们现在给出支撑主要结果的定义。此后，从特定初始条件 $\mathbf{x}_0$ 出发的对应状态空间方程 (1) 的解记为 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ 。由于控制器 u 被视为状态的不连续函数，因此这些解按照 Filippov [7] 的意义来理解，即 $\mathbf{x}(t)$ 是一个几乎处处满足相应微分包含的绝对连续函数。

定义 1: 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个维度为 $r < 2n$ 的可微流形，且 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个子集。

- 1) 非空子集 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ ，在 $\mathcal{M}$ 中相对开，是 (1) 的滑动域，如果对于任何 $y \in \mathcal{R}$ 存在 $\epsilon > 0$ 使得，若 $\|\mathbf{x}_0 - y\| < \epsilon$ ， $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ ，则可以找到 $T(\mathbf{x}_0)$ 使得 $\mathbf{x}(T(\mathbf{x}_0)) \in \mathcal{R}$ 和 $\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow y} T(\mathbf{x}_0) = 0$ 。

2) 集合 $\mathcal{R}$ 是关于 $\mathcal{C}$ 对于 (1) 的一个安全滑动域, 如果 $\mathcal{R}$ 是一个滑动域并且 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}$ 对于所有 $t \geq T(\mathbf{x}_0)$ 成立。

集合 $\mathcal{R}$ 是 (1) 的滑动流形, 如果 $\mathcal{R}$ 是一个滑动域并且 $\mathcal{R} = \mathcal{M}$ 。上述定义的第一部分在 [8] 中给出, 而第二部分在 [5] 中给出。在整个笔记中, 我们考虑

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{X}_2 = \{(x, \dot{x}) : x \in \mathcal{C}_1, \dot{x} \in \mathcal{X}_2\}.$$

。对于这种情况, 要成为一个安全的安全滑动域, $\mathcal{R}$ 不需要满足在 $\mathcal{X}_2$ 上的约束。例如, 考虑系统 (1), 其中包含 $n = 1$ 和 $\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\}$, 对于任意实数 a 和 b 。一个流形 $\mathcal{S}$ 可以被构造为 $\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \dot{x} + x = 0\}$, 它有一个子集包含在 $\mathcal{C}$ 内; 参见图 1。如果 (1) (在给定控制器的闭环中) 的轨迹能够在有限时间 $T(\mathbf{x}_0)$ 内达到 $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ 的任意一点, 并且在此之后保持在该点, 则 $\mathcal{S}$ 是相对于集合 $\mathcal{C}$ 的安全滑动域。

尽管在这种情况下选择 $\mathcal{S}$ 是常规的, 但在高维状态空间的情况下则并非如此。此外, 请注意, 使用标准滑模控制器时, 初始位置可以满足 $x_0 \in \mathcal{C}_1$, 但在到达阶段对于某些 $t > 0$ 有 $x(t, \mathbf{x}_0) \notin \mathcal{C}_1$ 。

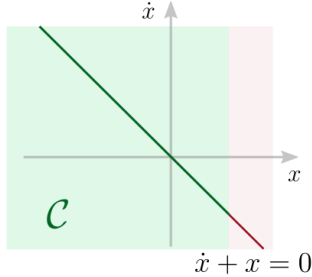


图 1. 一个关于集合 $\mathcal{C}$ 的安全滑动域的简单构造。

根据定义 1, 我们有:

定义 2: 系统 (1) 在 $\mathcal{C}$ 方面是安全的如果 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C} \implies \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C} \forall t \geq 0$ 。

本文的其余部分组织如下。在第 II 节中, 我们展示了主要结果, 即提供了第一阶滑模安全控制, 并将其推广到自适应框架中, 确保轨迹保持在一个预定义的滑动域附近, 而不处于不安全区域之内。在第 III 节中, 我们通过一个数值示例说明理论发现, 并在第 IV 节中的一些最终备注结束。我们采用标准符号并在需要时进行澄清。

我们假设以下关于不确定性和扰动的内容:

假设 1: 存在一个函数 $d: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, 使得 $\|\delta(t, \mathbf{x})\| \leq d(t, \mathbf{x})$ 对于所有的 $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n}$ 成立。

假设 2: 对于某个正实数 γ , $\|\Delta_b(t, \mathbf{x})\| \leq \gamma < 1$ 对所有 $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n}$ 成立。此外, 存在一个已知的 $\mu > -1$ 使得

$$\lambda_{\min} \left(\frac{1}{2} (G(\mathbf{x}) \Delta_b(t, \mathbf{x}) G^{-1}(\mathbf{x}) + (G(\mathbf{x}) \Delta_b(t, \mathbf{x}) G^{-1}(\mathbf{x}))^T) \right) \geq \mu \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n}.$$

II. 位置的鲁棒安全控制设计

结果建立在所提出的流形

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \sigma(\mathbf{x}) = 0\},$$

上, 其中

$$\sigma(\mathbf{x}) = \dot{x} - v(x), \quad (2)$$

而 $v: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是简单积分器 $\dot{x} = v(x)$ 的安全关键控制。正如我们将要 (正式) 证明的那样, 这样的 v 导致 $\mathcal{S}$ 成为一个相对于 $\mathcal{C}$ 的安全滑动域。流形 $\mathcal{S}$ 使人联想到 [9] 的早期工作, 在该工作中, 障碍物避免的势场梯度被考虑而不是 v 。值得一提的是, 使用 CBFs 而不是势场进行障碍物避免的优势, 正如在 [10] 中讨论的那样, 也被所提出的方法继承。

为了完整起见, 我们在此提供 v [2]。

定义 3: [2], [10] 设 $h: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 是二阶连续可微函数, 且 $\mathcal{C}_1$ 是定义为

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathcal{X}_1 : h(x) \geq 0\},$$

的闭安全集。然后, h 是 $\dot{x}(t) = v(x)$ 的控制屏障函数 (CBF), 如果对于所有 $x \in \partial \mathcal{C}_1$ 都有 $\nabla h(x) \neq 0$ 成立, 并且存在一个扩展类 $\mathcal{K}$ 函数¹ α 使得对于所有 $x \in \mathcal{C}_1$ 都存在 v 满足

$$\dot{h}(x) = \nabla h(x) v(x) \geq -\alpha(h(x)).$$

在标准定义中, h 不需要是二阶连续可微的。这里, 我们假设以保证 $\mathcal{S}$ 的平滑性。给定一个 CBF, 可以通过

$$v^*(x) = \underset{v \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|v - v_{\text{des}}(x)\|^2$$

$$\text{s.t. } \nabla h(x) v \geq -\alpha(h(x)),$$

¹扩展类 $\mathcal{K}$ 函数是一个连续函数 $\alpha: (-b, a) \rightarrow (-\infty, \infty)$, 对于某个严格递增的 $a, b > 0$, 并且 $\alpha(0) = 0$, 参见 [2]。

构造安全控制，其中 v_{des} 是期望速度。QP 具有显式解 [11]

$$v^*(x) = v_{\text{des}}(x) + v_{\text{safe}}(x), \quad (3)$$

其中

$$v_{\text{safe}}(x) = \begin{cases} -\frac{\nabla h(x)^T}{\|\nabla h(x)\|^2} (\nabla h(x) v_{\text{des}}(x) + \alpha(h(x))), & x \in \Psi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

用 $\Psi := \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla h(x) v_{\text{des}}(x) < -\alpha(h(x))\}$ 表示。此后，为简单起见，我们设 $\alpha(h(x)) = \alpha h(x)$ 用 $\alpha > 0$ 表示。如 [11] 所示，控制器 v 在 v_{des} 局部 Lipschitz 连续且 $\nabla h(x) \neq 0$ 对于一个包含 $\mathcal{C}_1$ 的开集 $\mathcal{D}$ 。结果来自 Lipschitz 连续函数的组合性质以及事实， $v_{\text{safe}}(x) = \nu_0(\nu_1(x))\nu_2(x)$ ，其中

$$\begin{aligned} \nu_0(z) &= \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ z, & z < 0 \end{cases}, \\ \nu_1(x) &= \nabla h(x) v_{\text{des}}(x) + \alpha(h(x)), \\ \nu_2(x) &= -\frac{\nabla h(x)^T}{\|\nabla h(x)\|^2}. \end{aligned}$$

$\mathcal{S}$ 的光滑性由 $\nabla h(x) \neq 0$ 在 $\mathcal{D}$ 上保证，并且通过光滑函数近似 ν_0

$$\nu_s(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ \frac{z}{2} (1 - \cos(\frac{z\pi}{s})) & -s < z < 0 \\ z, & z < -s \end{cases},$$

这确实允许我们通过

$$v_{\text{safe}}^s = \nu_s(\nu_1(x))\nu_2(x). \quad (4)$$

近似 v_{safe} 。由于 $\nu_s \rightarrow \nu_0$ 当 $s \rightarrow 0$ ，我们有 $v_{\text{safe}}^s \rightarrow v_{\text{safe}}$ 当 $s \rightarrow 0$ 。对于构造 (2)，我们考虑

$$v(x) = v_{\text{des}}(x) + v_{\text{safe}}^s(x),$$

，其中 s 是一个足够小的参数，使得 $v(x)$ 保证了 $\dot{x}(t) = v(x)$ 相对于 $\mathcal{C}_1$ 的安全性。请注意，流形平滑在 [9] 中也有讨论，尽管是从不同的角度进行的。

本节分为两部分。子节 II-A 介绍了滑模控制算法，该算法确保了系统在扰动下的安全性；并在子节 II-B 中引入了一种自适应框架内的修改控制增益，使得能够放宽假设 1。

A. 安全滑模控制

设控制

$$u(t, \mathbf{x}) = -k(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\|\sigma(\mathbf{x})\|}, \quad (5)$$

其中

$$k(t, \mathbf{x}) = \frac{\kappa + \rho(t, \mathbf{x})}{1 + \mu}, \quad (6)$$

带有 $\kappa > 0$ 和

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \|G(\mathbf{x})\|d(t, \mathbf{x}) + \|\dot{v}(x)\|.$$

定理 1: 假设 1 和假设 2 成立。集合 $\mathcal{S}$ 是 (1) 在与 (5) 形成闭环时的安全滑动域，条件是 $T(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{2}\|\sigma(\mathbf{x}_0)\|}{\kappa}$ 。证明。我们首先证明 $\mathcal{S}$ 是一个滑动域，然后证明它也是安全的。设李雅普诺夫函数

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^T(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}).$$

由于

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\mathbf{x}) &= \ddot{x} - \dot{v}(x) \\ &= G(\mathbf{x})((I + \Delta_b(t, \mathbf{x}))u + \delta(t, \mathbf{x})) - \dot{v}(x) \\ &= -k(t, \mathbf{x}) \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\|\sigma(\mathbf{x})\|} \\ &\quad - k(t, \mathbf{x})G(\mathbf{x})\Delta_b(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\|\sigma(\mathbf{x})\|} + \delta_0(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

其中 $\delta_0(t, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})\delta(t, \mathbf{x}) - \dot{v}(x)$ ，时间导数 V 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma) &= \sigma^T(\mathbf{x})\dot{\sigma}(\mathbf{x}) \\ &= -k(t, \mathbf{x})\|\sigma(\mathbf{x})\| \\ &\quad - k(t, \mathbf{x})\sigma^T(\mathbf{x})G(\mathbf{x})\Delta_b(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\|\sigma(\mathbf{x})\|} \\ &\quad + \sigma^T(\mathbf{x})\delta_0(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

对于任何矩阵 R ，有 $\sigma^T(\mathbf{x})R\sigma(\mathbf{x}) = \sigma^T(\mathbf{x})R^T\sigma(\mathbf{x})$ ，

$$\begin{aligned} \sigma^T(\mathbf{x})G(\mathbf{x})\Delta_b(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^T(\mathbf{x})(G(\mathbf{x})\Delta_b(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x}) \\ &\quad + (G(\mathbf{x})\Delta_b(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x}))^T)\sigma(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

根据 Rayleigh-Ritz 不等式可得

$$\dot{V}(\sigma) \leq -\|\sigma(\mathbf{x})\|(k(t, \mathbf{x})(1 + \mu) - \rho(t, \mathbf{x})) = -\kappa\|\sigma(\mathbf{x})\|. \quad (7)$$

上述微分不等式的解为

$$2 \left(V^{\frac{1}{2}}(\sigma(\mathbf{x}(t))) - V^{\frac{1}{2}}(\sigma(\mathbf{x}_0)) \right) \leq -\kappa t$$

从而得出

$$0 \leq \|\sigma(\mathbf{x}(t))\| \leq \|\sigma(\mathbf{x}_0)\| - \frac{\kappa}{\sqrt{2}}t. \quad (8)$$

由 σ 的连续性, 对于任何 $\delta_s > 0$ 存在 $\varepsilon_s > 0$ 使得对于任意 $y \in \mathcal{S}$,

$$\|\mathbf{x}_0 - y\| < \varepsilon_s \Rightarrow \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \sigma(y)\| = \|\sigma(\mathbf{x}_0)\| < \delta_s. \quad (9)$$

从 (9)、 $T(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{2}\|\sigma(\mathbf{x}_0)\|}{\kappa} < \frac{\sqrt{2}\delta_s}{\kappa}$ 以及 (8), 得出

$$0 \leq \|\sigma(\mathbf{x}(t))\| \leq \delta_s - \delta_s = 0$$

对 $t \geq T(\mathbf{x}_0)$ 成立, 因此 $\|\sigma(\mathbf{x}(t))\| = 0$ 对于 $t \geq T(\mathbf{x}_0)$ 也成立。由 (9) 再次可知, 对于任意的 $\delta'_s > 0$, 存在 $\varepsilon_s > 0$ 使得

$$\|\mathbf{x}_0 - y\| < \varepsilon_s \Rightarrow |T(\mathbf{x}_0)| < \delta'_s,$$

其中 $\delta'_s = \frac{\sqrt{2}}{\kappa}\delta_s$, 且 δ_s 是任意的, 意味着 $T(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0$ 当 $\mathbf{x}_0 \rightarrow y$ 。最后, 在 $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ 上, 系统动力学满足 $\dot{x} = v(x)$, 通过构造 v 可以推导出 $x(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}_1$, 等价于 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}$, 对于所有的 $t \geq T(\mathbf{x}_0)$ 均成立。■

当轨迹在 $\mathcal{S}$ 上是安全和鲁棒的, 在到达阶段则无法对其做出任何陈述。在以下命题中, 我们展示了控制 (5) 中的常数 κ 可以被调整以保证收敛到安全滑模域的安全性。

命题 1: 设假设 1 和假设 2 成立, 并假定 h 的梯度在由 $\eta := \max_{x \in \mathcal{X}_1} \|\nabla h(x)\|$ 定义的 $\mathcal{X}_1$ 上存在最大值。如果

$$\kappa = \frac{\alpha}{2}\|\sigma(\mathbf{x}_0)\| + \alpha_c\eta, \quad (10)$$

其中 α 是从 (3) 和

$$\alpha_c = \frac{\|\sigma(\mathbf{x}_0)\|^2 + \beta}{2h(x_0)},$$

的构造中取的一个常数, 并且对于任何 $\beta > 0$, 那么 (1) 在闭环与 (5) 下的轨迹满足 $x(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}_1$ 对于 $t \in [0, T(\mathbf{x}_0))$ 对于任意 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ 。

证明。 我们从 [3] 和考虑函数

$$h_c(\mathbf{x}, \sigma) = -V(\sigma) + \alpha_c h(x) = -\frac{1}{2}\|\sigma(\mathbf{x})\|^2 + \alpha_c h(x),$$

其中 α_c 是这样的使得 $h_c(\mathbf{x}_0, \sigma(\mathbf{x}_0)) > 0$ 。我们证明 $t \mapsto h_c(\mathbf{x}(t), \sigma(\mathbf{x}(t)))$ 是递增的。首先要注意以下内容成立:

$$\begin{aligned} \alpha_c \nabla h(x) (\sigma(\mathbf{x}) + v(x)) &\geq -\alpha_c \eta \|\sigma(\mathbf{x})\| - \alpha_c \nabla h(x) v(x) \\ &\geq -\alpha_c \eta \|\sigma(\mathbf{x})\| - \alpha_c \alpha h(x) \\ &= -\alpha_c \eta \|\sigma(\mathbf{x})\| - \alpha (h_c(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\|\sigma(\mathbf{x})\|^2) \end{aligned}$$

其中第一行由

$$\nabla h(x) \sigma(\mathbf{x}) \geq -\|\nabla h(x)\| \|\sigma(\mathbf{x})\| \geq -\eta \|\sigma(\mathbf{x})\|,$$

推导得出, 第二行由 $\nabla h(x) v(x) \geq -\alpha h(x)$ (通过 v 的构造) 得出, 第三行由 h_c 的定义得出。 h_c 的时间导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{h}_c(\mathbf{x}, \sigma) &= -\dot{V}(\sigma) + \alpha_c \nabla h(x) \dot{x} \\ &\geq \kappa \|\sigma(\mathbf{x})\| + \alpha_c \nabla h(x) (\sigma(\mathbf{x}) + v(x)), \\ &\geq (\kappa - \alpha_c \eta) \|\sigma(\mathbf{x})\| - \alpha V(\sigma) - \alpha h_c(\mathbf{x}, \sigma) \\ &= \frac{\alpha}{2} \|\sigma(\mathbf{x}_0)\| \|\sigma(\mathbf{x})\| - \frac{\alpha}{2} \|\sigma(\mathbf{x})\|^2 - \alpha h_c(\mathbf{x}, \sigma) \\ &\geq -\alpha h_c(\mathbf{x}, \sigma), \end{aligned}$$

其中第二行是从 $\dot{V}(\sigma) \leq -\kappa \|\sigma(\mathbf{x})\|$ 这一事实得出的, 参见定理 1 的证明, 以及定义 $\sigma(\mathbf{x})$; 第三个来自 (11), 第四个来自 κ 在 (10) 中的定义, 最后一个来自 $\|\sigma(\mathbf{x}_0)\| \geq \|\sigma(\mathbf{x})\|$ 。由于 $h_c(\mathbf{x}_0, \sigma(\mathbf{x}_0)) > 0$, $\dot{h}_c(\mathbf{x}, \sigma) \geq -\alpha h_c(\mathbf{x}, \sigma)$ 意味着对于所有 $t \geq 0$ 都有 $h_c(\mathbf{x}(t), \sigma(\mathbf{x}(t))) \geq 0$ 。根据 h_c 的定义, 我们有

$$h(x(t)) \geq \frac{1}{\alpha_c} V(\sigma(\mathbf{x}(t))) \geq 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (13)$$

这完成了证明。■

下一个推论直接从定理 1 和 (13) 得出。

推论 1: 令假设 1 和假设 2 成立。系统 (1) 在与 (5) 闭环且增益为 (10) 的情况下, 相对于 $\mathcal{C}$ 是安全的。

一些评论是必要的。首先, 注意到通过控制 (5) 确保了安全到达阶段, 并且 (10) 也是如此。我们强调在滑模控制的背景下实现一个安全到达阶段是一个不平凡的任务。在 [5] 中, 提出了一种类似规划轨迹的解决方案来解决这个问题。仔细观察可以看出, 无论是初始条件远离 $\mathcal{S}$ 还是接近 $\partial\mathcal{C}_1$, κ 都会很大。正如后面给出的例子所示, 这个控制参数是保守的 (较大), 因为即使使用较小值也能在初始条件不远离安全滑模域的情况下实现安全到达阶段。

其次, 由于简化阶动态在 $\mathcal{C}_1$ 边界上可能存在虚假平衡, 因此无法保证闭环系统的全局渐近稳定性。然而, 可以通过构建简单积分器的安全和稳定控制器 v 来构造流形 $\mathcal{S}$; 参见例如 [12]。

$$2\dot{V}(\sigma) \leq 0 \text{ 对任意正数 } \kappa, \text{ 则 } \frac{1}{2}\|\sigma(x)\|^2 = V(\sigma(x)) \leq V(\sigma(x_0)) =$$

B. 自适应增益

虽然控制 (5) 提供了对 $\mathcal{S}$ 扰动的精确补偿, 但它有两个缺点: (i) 控制信号的抖振, 以及 (ii) 需要通过假设 1 来确定扰动项的上限。接下来, 我们提供一个基于障碍函数的增益来调整第一个并放宽第二个³。

对于 $\varepsilon > 0$, 我们定义

$$\mathcal{S}_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \|\sigma(\mathbf{x})\| < \varepsilon\},$$

这对应所谓的实际滑动流形, 以及集合

$$\mathcal{C}_\gamma := \{x \in \mathcal{X}_1 : h_\gamma(x) = h(x) + \gamma \geq 0\},$$

其中 $\gamma > 0$ 。显然, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_\gamma$ 。

我们考虑控制

$$u(t, \mathbf{x}) = k_\varepsilon(t, \mathbf{x})G^{-1}(\mathbf{x})\frac{\sigma(\mathbf{x})}{\|\sigma(\mathbf{x})\|}, \quad (14)$$

其中

$$k_\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} k(t, \mathbf{x}), & t \leq \tau \\ k_b(\|\sigma(\mathbf{x}(t))\|), & t > \tau. \end{cases}$$

这里 $k(t, \mathbf{x})$ 由 (6) 给出, 其中 (10), $k_b(r) = \frac{r}{\varepsilon - r}$ 和 $\tau > 0$ 是满足 $\|\sigma(\mathbf{x}(\tau))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 的最小数字。增益 k_b 是作为自适应滑模控制的一部分引入的, 在 [13] 中。接下来的结果建立在下一个引理的基础上, 直接从 [13], [14] 推导得出。

引理 1: 假设条件 2 成立且系统 (1) 处于与 (14) 的闭环中。对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 如果存在某个 $\tau > 0$ 使得 $\|\sigma(\mathbf{x}(\tau))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 则对所有 $t \geq \tau$ 成立 $\|\sigma(\mathbf{x}(t))\| < \varepsilon$ 。

我们接下来放弃假设 1, 以 $d(t, \mathbf{x})$ 过高估计 $\|\delta(t, x)\|$ 为代价, 在增益 $k(t, \mathbf{x})$ 中。我们有以下结果:

定理 2: 令假设 2 成立, 对于给定的 $\gamma > 0$, 令 $\varepsilon > 0$ 满足 $\varepsilon \leq \frac{\alpha\gamma}{\eta}$ 。系统 (1) 与 (14) 闭环回路是关于 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\gamma \times \mathcal{X}_2$ 安全的。

证明。 根据在 (14) 中增益的定义, 根据初始条件有两种可能的情况: (i) $\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{S}_{\varepsilon/2} = \{\|\sigma(\mathbf{x}_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ 或 (ii) $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_{\varepsilon/2}$ 。不失一般性, 我们假设情况 (i), 这意味着在 (14) 中的控制增益在初始时刻以 $k(t, \mathbf{x})$ 运行。首先请注意, 任何在闭合回路中与 (14) 相连的 (1) 轨迹都会收敛到域 $\mathcal{S}_{\varepsilon/2}$ 。这一点可以从不等式 (8) 右侧得出。确实,

$$\|\sigma(\mathbf{x}(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ for } t = \tau := \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \left(\|\sigma(\mathbf{x}_0)\| - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

³ 基于障碍函数的增益在自适应框架 [13] 中的概念不得与安全控制背景下使用的 CBF 概念相混淆。

因此, 根据引理 1, 对于所有 $t \geq \tau$ 都有 $\|\sigma(\mathbf{x}(t))\| \leq \varepsilon$, 即对于所有 $t \geq \tau$ 都有 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon$ 。我们分两部分证明系统是安全的。 $\mathcal{C}$, 等价于对于所有 $t \geq 0$ 均有 $x(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}_\gamma$ 。对于 $t \in [0, \tau]$: 我们定义

$$h_{c\gamma}(\mathbf{x}, \sigma) = -V(\sigma) + \alpha_c h_\gamma(x) = h_c(\mathbf{x}, \sigma) + \alpha_c \gamma,$$

根据命题 1 中对 α_c 的定义, 它满足 $h_{c\gamma}(\mathbf{x}_0, \sigma(\mathbf{x}_0)) > 0$, 并采用命题 1 证明中的相同论点。事实上, 从 (12),

$$\begin{aligned} \dot{h}_{c\gamma}(\mathbf{x}, \sigma) &= \dot{h}_c(\mathbf{x}, \sigma) \\ &\geq (\kappa - \alpha_c \eta) \|\sigma(\mathbf{x})\| - \frac{\alpha}{2} \|\sigma(\mathbf{x})\|^2 - \alpha h_c(x, \sigma) \\ &= (\kappa - \alpha_c \eta) \|\sigma(\mathbf{x})\| - \frac{\alpha}{2} \|\sigma(\mathbf{x})\|^2 \\ &\quad - \alpha h_{c\gamma}(\mathbf{x}, \sigma) + \alpha \alpha_c \gamma \\ &\geq -\alpha h_{c\gamma}(\mathbf{x}, \sigma), \quad t \in [0, \tau], \end{aligned}$$

这表明每当 $x_0 \in \mathcal{C}_\gamma$ 时, $h_{c\gamma}(\mathbf{x}, \sigma) \geq 0$ 成立, 并进而得出对于 $t \in [0, \tau]$ 有 $x(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}_\gamma$ 。对于 $t \geq \tau$: 那 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon$ 对于所有 $t \geq \tau$ 等价于

$$\dot{x} = v(x) + \xi(\mathbf{x}), \quad \|\xi(\mathbf{x}(t))\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq \tau.$$

因此, 对于所有 $t \geq \tau$,

$$\begin{aligned} \dot{h}_\gamma(x) &= \nabla h(x) \dot{x} \\ &= \nabla h(x) v(x) + \nabla h(x) \xi, \\ &\geq -\alpha h(x) - \eta \varepsilon \\ &= -\alpha (h_\gamma(x) - \gamma) - \eta \varepsilon \\ &\geq -\alpha h_\gamma(x) + \alpha \gamma - \eta \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon \leq \frac{\alpha\gamma}{\eta}$, 那么 $\dot{h}_\gamma(x) \geq -\alpha h_\gamma(x)$, 且 $h_\gamma(x(t)) \geq 0$, 即 $x(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}_\gamma$, 对于所有 $t \geq \tau$ 。■

III. 数值模拟

令系统 (1) 与 $n = 2$ 和 $G(\mathbf{x}) = I$ 。我们考虑控制障碍函数

$$h(x) = \|x - \mathbf{x}_{\text{un}}\|^2 - r^2,$$

其中 $\mathbf{x}_{\text{un}} \in \mathbb{R}^2$ 是不安全区域的中心位置, 该区域由半径为 r 的圆表示, 因此安全集是

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathcal{X}_1 : h(x) = \|x - \mathbf{x}_{\text{un}}\|^2 - r^2 \geq 0\},$$

, 其中 $\mathcal{X}_1 = [-3, 6] \times [0, 6]$ 。令 $v_{\text{des}}(x) = -(x - x_{\text{goal}})$, 其中 $x_{\text{goal}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$ 。安全控制器由 (3) 推导得出, 与

$\nabla h(x) = 2(x - x_{\text{un}})^T$ 和 $\alpha = 1$ 相关。我们用函数 v_{safe}^s 和 $s = 0.5$ 对 v_{safe} 进行平滑处理，并用函数 $\Delta_b(t, \mathbf{x}) = 0.25 \sin(x) \mathbf{1}_{2 \times 2}$ 和 $\delta(t, \mathbf{x}) = 5 \sin(5t) \mathbf{1}_{2 \times 1}$ 模拟干扰。障碍物被认为具有中心 $x_{\text{un}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ 和半径 $r = 1$ 。

a) 安全的 SMC: 控制器 (5) 是通过增益 (6) 和 (10) 构建的，其中 $\beta = 0.1$, $\eta = 6.4031$, $d(t, \mathbf{x}) = \|\delta(t, \mathbf{x})\|$ 和 $\mu = -0.5$ 。图 2 显示了模拟结果。对于 $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\kappa = 4.0277$ ，但没有报告的模拟表明安全到达阶段适用于小于该值的情况。控制信号在 $t = 2.5$ 秒附近的超调是由光滑函数 ν^s 的参数 s 的小值引起的。

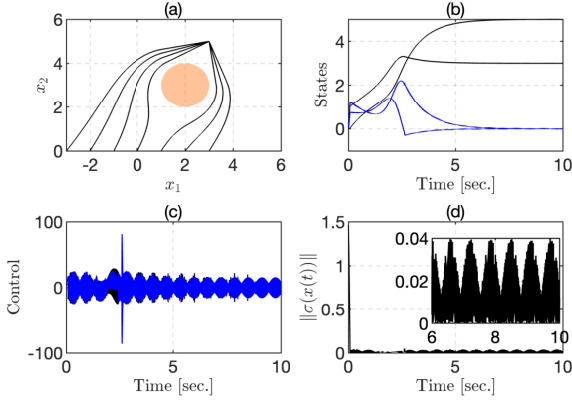


图 2. (a) 平面 (x_1, x_2) 中, (1) 在闭环中与 (5) 的位置轨迹, 针对几种初始条件。浅橙色对应于 $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{C}_1$; (b) 初始条件 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 下的状态随时间演变: 位置以黑色表示, 速度以蓝色表示; (c) 初始条件 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 下的控制信号; (d) 初始条件 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 下的滑动变量随时间演变。

b) 自适应增益: 我们现在通过设置 $\gamma = 0.5$ 来模拟控制 (14), 这给出了 $\varepsilon = 0.0781$ 。我们假设相同的输入扰动 $\Delta_b(t, \mathbf{x})$ 和

$$\delta(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 5 \sin(10t) \mathbf{1}_{2 \times 1} & t \leq 4 \\ 9 \sin(10t) \mathbf{1}_{2 \times 1} & t > 4. \end{cases}$$

在初始时刻, 增益 $k_\varepsilon(t, \mathbf{x})$ 被认为是 $k(t, \mathbf{x})$, 其中常数为 $d(t, \mathbf{x}) = 20$, 这高估了 δ 的边界, 假设其未知。模拟结果如图 3 所示。

IV. 结论

我们介绍了两种用于由双积分器表示的系统的关键安全位置的鲁棒控制算法, 在滑模控制框架内。所提出的方法为多个研究方向提供了起点, 例如: 安全高阶滑模控制和具有输入饱和的安全滑模控制。此外, 它们可能特别相关, 比如在机器人学中当机器人的模型不完

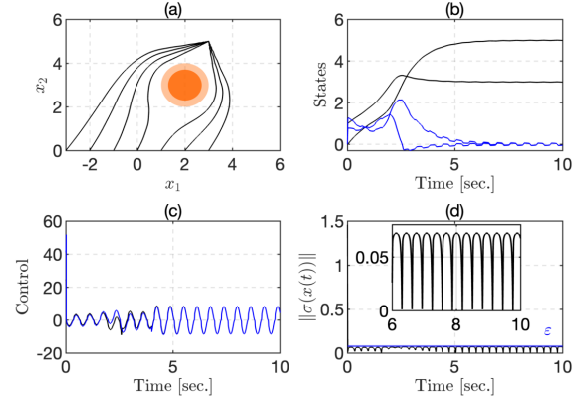


图 3. (a) 在平面 (x_1, x_2) 中, (1) 的位置轨迹与 (5) 形成闭环的几个初始条件。浅橙色对应于 $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{C}_1$, 深橙色对应于 $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{C}_\gamma$; (b) 初始条件 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 的状态随时间演化: 位置用黑色表示, 速度用蓝色表示; (c) 初始条件 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 的控制信号; (d) 初始条件 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 的滑模变量随时间演化。

全已知时 [3] 的鲁棒障碍物规避。在存在多个障碍物的情况下, 可以通过始终选择设计 v 时的最近障碍物来推广该方法, 这导致了一个非光滑的 CBF [15]。

参考文献

- [1] S. Kolathaya and A. D. Ames. Input-to-state safety with control barrier functions. *IEEE Control Systems Letters*, 3(1):108–113, 2018.
- [2] Aaron D Ames, Xiangru Xu, Jessy W Grizzle, and Paulo Tabuada. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(8):3861–3876, 2016.
- [3] T. G. Molnar, R. K. Cosner, A. Singletary, W. Ubellacker, and A. D. Ames. Model-free safety-critical control for robotic systems. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 7(2):944–951, 2021.
- [4] M. A. Gomez, C. D. Cruz-Ancona, and L. Fridman. Safe sliding mode control. In *2022 19th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–6. IEEE, 2022.
- [5] M. A. Gomez, C. D. Cruz-Ancona, and L. Fridman. On the notion of safe sliding mode control. *Under review*.
- [6] M. Z. Romdlony and B. Jayawardhana. Stabilization with guaranteed safety using control Lyapunov-barrier function. *Automatica*, 66:39–47, 2016.
- [7] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] V. Utkin, A. Poznyak, Y. V Orlov, and A. Polyakov. *Road map for sliding mode control design*. Springer, 2020.
- [9] J. Guldner and V. I. Utkin. Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(2):247–254, 1995.

- [10] A. Singletary, K. Klingebiel, J. Bourne, A. Browning, P. Tokumaru, and A. Ames. Comparative analysis of control barrier functions and artificial potential fields for obstacle avoidance. In *2021 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 8129–8136. IEEE, 2021.
- [11] X. Xu, P. Tabuada, J. W. Grizzle, and A. D Ames. Robustness of control barrier functions for safety critical control. *IFAC-PapersOnLine*, 48(27):54–61, 2015.
- [12] M. F Reis, A. P. Aguiar, and P. Tabuada. Control barrier function-based quadratic programs introduce undesirable asymptotically stable equilibria. *IEEE Control Systems Letters*, 5(2):731–736, 2020.
- [13] Hussein Obeid, Leonid M Fridman, Salah Laghrouche, and Mohamed Harmouche. Barrier function-based adaptive sliding mode control. *Automatica*, 93:540–544, 2018.
- [14] C. D. Cruz-Ancona, L. Fridman, H. Obeid, S. Laghrouche, and C. A Pérez-Pinacho. A uniform reaching phase strategy in adaptive sliding mode control. *Automatica*, 150:110854, 2023.
- [15] P. Glotfelter, J. Cortés, and M. Egerstedt. A nonsmooth approach to controller synthesis for boolean specifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(11):5160–5174, 2020.