

DICE: 稀疏视图 CT 重建的扩散共识平衡

Leon Suarez-Rodriguez[‡], Roman Jacome[†], Romario Gualdrón-Hurtado[‡], Ana Mantilla-Dulcey[§],

Henry Arguello[‡] [‡]Department of Systems and Informatics Engineering

[†]Department of Electrical, Electronics, and Telecommunications Engineering

[§]Department of Physics

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 680002

摘要

稀疏视图计算机断层扫描 (CT) 重建由于欠采样, 本质上是一个具有挑战性的病态逆问题。传统迭代方法通过引入手工设计或学习到的先验信息来正则化解但难以捕捉医学图像中存在的复杂结构。相比之下, 扩散模型 (DMs) 最近作为强大的生成先验出现了, 能够准确地建模复杂的图像分布。在这项工作中, 我们介绍了一种名为扩散共识均衡 (DICE) 的框架, 该框架将两代理一致性均衡整合到扩散模型的采样过程中。DICE 在以下两个操作之间交替进行: (i) 数据一致性代理, 通过强制执行测量一致性的近似算子实现; (ii) 先验代理, 在每次采样步骤中由一个扩散模型完成对干净图像的估计。通过迭代地平衡这两个互补的代理, DICE 有效地结合了强大的生成先验能力和测量一致性。实验结果表明, 在 15、30 和 60 视图 (总共 180 视图) 下的均匀和非均匀稀疏视图设置中, DICE 在重建高质量 CT 图像方面显著优于最先进的基线方法, 这不仅展示了其有效性还体现了其鲁棒性。

Index Terms

共识均衡, 扩散模型, 稀疏视图计算机断层扫描, 图像重建。

I. 介绍

计算机断层扫描 (CT) 是一种广泛应用的非侵入性医学成像技术, 获取高质量重建图像对于准确的临床诊断至关重要。然而, 获得这样的图像通常需要大量的 X 射线投影, 增加了辐射暴露和扫描时间 [1]。为了减轻这些限制, 采用了稀疏视图 CT, 显著减少了所需的投影数量 [2]。形式上, 稀疏视图 CT 的采集过程可以表示为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 是欠采样的正弦图, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是待重建的图像, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 对应于欠采样拉东变换的前向算子, 而 $\mathbf{e}$ 表示采集噪声。稀疏采样本质上使得逆问题严重不适定, 导致与观测数据 [3] 一致的解有无穷多个。

为了解决这一问题, 迭代方法将 CT 重建公式化为一个正则化优化问题 [4]–[6], 明确平衡数据保真度与手工设计或学习到的先验信息:

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x})\}, \quad (2)$$

This work was supported by the Agencia Nacional de Hidrocarburos (ANH) and the Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación (MINCIENCIAS), under contract 045-2025.

© 2025 IEEE. Personal use of this material is permitted. Permission from IEEE must be obtained for all other uses, in any current or future media, including reprinting/republishing this material for advertising or promotional purposes, creating new collective works, for resale or redistribution to servers or lists, or reuse of any copyrighted component of this work in other works.

其中 $f(\mathbf{x})$ 强制测量一致性，而 $h(\mathbf{x})$ 是一个正则化项，它结合了关于图像流形的先验信息， λ 是正则化参数。尽管这类方法可以显著提升图像质量，但它们受限于准确建模复杂医学图像分布的能力 [7], [8]。

最近的深度学习进展通过引入强大的数据驱动先验进一步提高了重建质量。这些方法通常分为两类：(i) 即插即用 (PnP) 方法 [6], [9], [10]，将预训练的去噪器集成到迭代方案中，以及 (ii) 完全端到端训练的神经网络，需要配对的数据集，包括欠采样的测量值和相应的干净图像 [11]–[13]。尽管取得了成功，这些策略依赖于大量的训练数据集或在采样场景或噪声条件变化时需要进行显著的重新训练 [11], [14]–[16]。

扩散模型 (DMs) [17]–[20] 最近因其通过迭代加噪-去噪过程模拟复杂图像分布的卓越能力而受到关注。条件化 DMs 意味着使用测量数据指导其生成逆扩散过程，以确保重建结果与测量结果一致，从而在各种逆问题中带来显著性能提升，包括地震成像 [21], [22]、磁共振成像 [8], [23] 以及经典图像恢复任务如去模糊、补全和超分辨率 [24]–[26]。然而，条件化这些模型引入了正确平衡数据一致性与感知真实性的挑战 [27]–[29]。

为了解决这一权衡问题，我们引入了扩散一致性均衡 (DICE)，这是一个结合预训练的扩散先验与测量一致性的原则性重建框架，使用共识均衡 (CE) 框架实现。CE [30]–[32] 是一个无需优化的框架，通过将重建定义为多个独立代理之间的平衡来推广传统的正则化反演，每个代理都促进不同的重建特征。在 DICE 中，我们将 CT 重建表述为 DM 采样过程中两个代理的 CE 问题。具体来说，在以下两者之间：(i) 一个数据一致性代理，通过实施强制测量一致性的近似算子实现；(ii) 一个扩散代理，作为预训练的 DM 在每次采样迭代中执行清洁图像估计。这种集成有效地平衡了数据一致性和扩散先验的强大生成能力，逐步将解决方案引导至高质量重建。实验表明，在均匀和非均匀稀疏视图 CT 场景下，DICE 的表现优于最先进的基线方法，在严重的欠采样条件下实现了更优的图像质量。

II. DICE: 扩散共识平衡

DICE 的目标是恢复一个图像 $\mathbf{x}^*$ ，该图像是同时 (i) 与测量的投影 (1) 一致和 (ii) 对于由训练良好的 $\text{DM}_p(\mathbf{x}^*)$ 学习到的先验分布而言现实可信。为此，我们采用 CE 形式化方法，它允许集成异构映射/代理，如数据保真项、近似算子或学习网络，并寻求一个所有这些映射达成一致的平衡点 [30], [31]。

特别是，我们考虑两个代理：(i) 一个促进测量一致性的邻近算子 $F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，以及 (ii) 一个生成先验 $F_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，它在时间步长 $t \in \{T, \dots, 1\}$ 产生一个干净的图像估计 $\mathbf{x}_{0|t}$ 。这两个代理定义如下：

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{v}_1) = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{s} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{\zeta_t}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{v}_1\|_2^2 \right\}, \\ F_2(\mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}_t}} (\mathbf{v}_2 - \epsilon_{\theta}(\mathbf{v}_2, t) \sqrt{1 - \bar{\alpha}_t}), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\zeta_t = (1 - \bar{\alpha}_t)/\bar{\alpha}_t$ 是一个时间相关的惩罚项，将 CE 更新与 DM 噪声调度 $\{\beta_t\}_{t=1}^T \subset (0, 1)$ 相关联，带有 $\bar{\alpha}_t = \prod_{i=0}^t \alpha_i$ ， $\alpha_t = 1 - \beta_t$ 和 ϵ_{θ} 是 DM 的噪声估计网络 [18]。

直观上，代理 F_1 尝试将解决方案拉到一个与测量值 $\mathbf{y}$ 一致的图像。相比之下，代理 F_2 将解决方案拉到一个在给定时间步长下的去噪或干净图像 $\mathbf{x}_{0|t}$ 。在这两个代理之间取得平衡，在时间步长 t 下产生了一个与测量值一致的干净图像 $\mathbf{x}_{0|t}^*$ 。该图像通过寻找一个平衡点 $(\mathbf{x}_{0|t}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n}$ ，使得：

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}_{0|t}^* + \mathbf{u}_1^*) = \mathbf{x}_{0|t}^*, \\ F_2(\mathbf{x}_{0|t}^* + \mathbf{u}_2^*) = \mathbf{x}_{0|t}^*, \\ \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^* = \tau_1 \mathbf{u}_1^* + \tau_2 \mathbf{u}_2^* = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$ 是代理 F_i 的偏移变量， $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1^{\top}, \mathbf{u}_2^{\top})^{\top} \in \mathbb{R}^{2n}$ 是堆叠的偏移变量，并且 $\tau_i > 0$ 是表示每个代理 F_i 相对强度的正权重，具有 $\tau_1 + \tau_2 = 1$ 。在方程 (4) 中，每个代理 F_i 可以解释为一种将状态 $\mathbf{x}_{0|t} + \mathbf{u}_i$ 移向所有代理达成一致的公共共识点 $\mathbf{x}_{0|t}^*$ 的力，在这一点上所有代理都同意 [31]。

Algorithm 1 骰子：扩散共识平衡

Require: DM 噪声估计网络 ϵ_θ , 测量值 $\mathbf{y}$, 正向模型 $\mathbf{A}$, 共轭梯度下降步骤 P , CE 智能体 $F_1(\mathbf{y}, \mathbf{A}, P)$, 和 $F_2(\epsilon_\theta)$, 松弛参数 $\rho \in (0, 1)$, Mann 迭代次数 K , 和噪声调度 $\{\beta_t\}_{t=1}^T$

- 1: $\mathbf{x}_T \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ▷ Latent initialization
- 2: **for** $t = T, \dots, 1$ **do** ▷ Reverse-diffusion steps
- 3: $\mathbf{v} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix}$ ▷ Initial CE state
- 4: **for** $k = 1, \dots, K$ **do** ▷ Mann iteration
- 5: $\mathbf{v}' \leftarrow (2\mathbf{G} - \mathbf{I})(2\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{v}$
- 6: $\mathbf{v} \leftarrow (1 - \rho)\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}'$
- 7: **end for**
- 8: $\mathbf{x}_{0|t}^* \leftarrow \tau_1 \mathbf{v}_1^* + \tau_2 \mathbf{v}_2^*$
- 9: $\tilde{\mathbf{x}}_{t-1} = \sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}} \mathbf{x}_{0|t}^* + \sqrt{1 - \bar{\alpha}_{t-1}} \mathbf{z}$ ▷ $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$
- 10: **end for**
- 11: $\mathbf{x}^* \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}_0$
- 12: **返回** $\mathbf{x}^*$

引入状态变量 $\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{0|t} + \mathbf{u}_i$ 的变化 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, 我们得到:

$$F_1(\mathbf{v}_1^*) = F_2(\mathbf{v}_2^*) = \mathbf{x}_{0|t}^*. \quad (5)$$

让我们定义代理 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 的堆叠算子和堆叠加权平均算子 $\mathbf{G}_\tau : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{v}_1) \\ F_2(\mathbf{v}_2) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{G}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_\tau \\ \bar{\mathbf{v}}_\tau \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^\top, \mathbf{v}_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ 是状态的堆叠向量, 而 $\bar{\mathbf{v}}_\tau$ 是状态的加权平均向量, 满足 $\bar{\mathbf{v}}_\tau = \sum_{i=1}^N \tau_i \mathbf{v}_i$.

令 $\hat{\mathbf{x}}_{0|t} \in \mathbb{R}^{2n}$ 包含两个堆叠的向量 $\mathbf{x}_{0|t} \in \mathbb{R}^n$ 的副本。根据这些定义, 方程 (4) 等价于如下系统:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{0|t}^* + \mathbf{u}^*) = \hat{\mathbf{x}}_{0|t}^*, \quad \bar{\mathbf{u}}_\tau^* = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}_\tau^* = ((\bar{\mathbf{u}}_\tau^*)^\top, (\bar{\mathbf{u}}_\tau^*)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ 是堆叠的 $\bar{\mathbf{u}}_\tau^*$ 向量。点 $(\hat{\mathbf{x}}_{0|t}^*, \mathbf{u}^*)$ 是方程 (7) 的解当且仅当 $\mathbf{v}^* = \hat{\mathbf{x}}_{0|t}^* + \mathbf{u}^*$ 满足:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{v}}_\tau^* = \mathbf{x}_{0|t}^*, \\ \mathbf{F}(\mathbf{v}^*) = \mathbf{G}_\tau(\mathbf{v}^*) \\ (2\mathbf{G}_\tau - \mathbf{I})(2\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^* \end{cases} \quad (8)$$

这意味着 $\mathbf{v}^*$ 是 $\Omega = (2\mathbf{G}_\tau - \mathbf{I})(2\mathbf{F} - \mathbf{I})$ [30], [31] 的一个不动点。通过使用 Mann 迭代, 我们可以找到 Ω 的不动点如下:

$$\mathbf{v}^{j+1} = (1 - \rho)\mathbf{v}^j + \rho\Omega(\mathbf{v}^j) \quad 0 < \rho < 1. \quad (9)$$

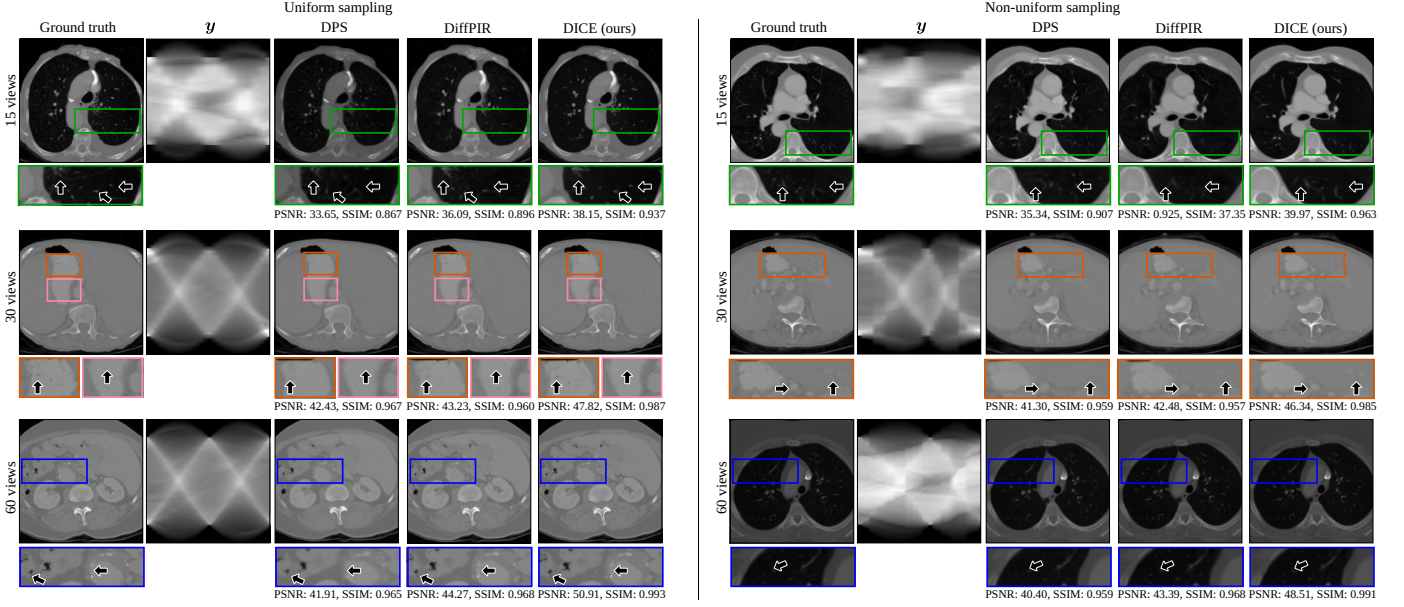


图 1. 均匀和非均匀稀疏视图采样（15、30 和 60 个视图）下 CT 重建的视觉比较，采用 DPS、DiffPIR 和 DICE 方法获得。

一旦达到 $\mathbf{v}^* = ((\mathbf{v}_1^*)^\top, (\mathbf{v}_2^*)^\top)^\top$ ，共识解是 $\mathbf{x}_{0|t}^* = \tau_1 \mathbf{v}_1^* + \tau_2 \mathbf{v}_2^*$ 。

然后，为了获得下一个采样步骤 $\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}$ ，我们通过执行下一步正向扩散过程将 $\mathbf{x}_{0|t}^*$ 重新引入扩散过程：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t-1} = \sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}} \mathbf{x}_{0|t}^* + \sqrt{1 - \bar{\alpha}_{t-1}} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}). \quad (10)$$

这些步骤总结在算法 1 中。所提出的公式通过数据一致性内的协议来估计后验分布 $p(\mathbf{x}_0|\mathbf{y})$ 采样以及去噪 DM。这种方法与 DM 中常见的后验采样方法不同。例如，在 DPS [24] 中，后验采样是通过梯度下降更新将生成的图像投影到数据一致性流形上进行的。另一方面，DiffPIR [25] 将去噪 DM 纳入基于 HQS 的 PnP 框架中，从而解耦了数据保真度和去噪先验。我们的方法提供了一种更灵活的公式化，因为可以将多个促进目标图像不同属性的代理集成到条件采样问题中。

III. 实验

A. 扩散模型训练

我们使用从 $\beta_1 = 1 \times 10^{-4}$ 到 $\beta_T = 0.02$ 的余弦方差计划训练了一个 DM，共有 $T = 1000$ 个噪声步。DM 噪声估计网络 ϵ_θ 经过 1000 个周期的优化，批量大小为 4，使用了 AdamW 优化器 [33] 和学习率为 3×10^{-4} 。我们使用了来自低剂量平行束 (LoDoPaB) -CT 数据集 [34] 的 10,368 个切片，并将其调整为 256×256 大小以训练 DM 模型。测试集包含从 LoDoPaB 数据集的测试集中提取的 170 张图像，该测试集由 3,553 个切片组成。

实现细节：子问题在 F_1 中使用共轭梯度下降法进行了 P 次迭代：

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \zeta_t \mathbf{I}) \mathbf{s} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y} + \zeta_t \mathbf{v}_1. \quad (11)$$

所有实验均在一个配备 NVIDIA RTX 4090 GPU 的 PyTorch 环境中进行。完整代码库将在 <https://github.com/leonsuarez24/DICE> 发布。

表 I

均匀和非均匀稀疏视图 CT 在三种采样场景下的平均重建 PSNR 和 SSIM。最佳结果是**粗体**；次佳结果是下划线的。

采样	方法	15 次浏览 (1/12)		30 次浏览 (1/6)		60 次浏览 (1/3)	
		峰值信噪比↑	结构相似性指数↑	峰值信噪比↑	结构相似性指数↑	峰值信噪比↑	结构相似性指标↑
均匀	FBP [35]	21.69	0.423	26.09	0.601	30.93	0.791
	PnP-FISTA [36]	30.25	0.770	33.81	0.840	38.47	0.918
	DPS [24]	35.95	0.903	38.93	0.938	40.24	0.950
	DiffPIR [25]	<u>37.79</u>	<u>0.921</u>	<u>40.97</u>	<u>0.949</u>	<u>43.20</u>	<u>0.964</u>
	DICE (Ours)	40.51	0.957	44.92	0.979	48.51	0.989
非均匀	FBP [35]	19.82	0.386	23.36	0.549	26.81	0.691
	PnP-FISTA [36]	29.51	0.756	33.37	0.841	37.20	0.908
	DPS [24]	34.74	0.891	38.38	0.934	39.61	0.945
	DiffPIR [25]	<u>37.25</u>	<u>0.918</u>	<u>40.73</u>	<u>0.948</u>	<u>42.95</u>	<u>0.963</u>
	DICE (Ours)	39.54	0.954	44.35	0.978	47.64	0.988

B. 子采样正弦图的重建

在本实验中，我们定量和定性地分析了重建子采样正弦图的性能。正弦图是使用平行束几何结构模拟的，共有 180 个视角（总角度为 180° ，分辨率为 1° ）。评估了三种均匀和非均匀采集场景：从总共 180 个视图中分别选取 15、30 和 60 个视图，对应的欠采样率分别为 1/12、1/6 和 1/3。这些实验使用了参数 $\tau_1 = 0.5$ 、 $\rho = 0.9$ 和 $K = 5$ 的 Mann 迭代，以及 $P = 5$ 次共轭梯度下降步骤。

我们将 DICE 与滤波反投影 (FBP) [35]、使用 DnCNN [36] 作为深度去噪器的 PnP-FISTA，以及最先进的条件扩散采样方法 DPS [24] 和 DiffPIR [25] 进行了比较。在本实验中，DPS、DiffPIR 和 DICE 使用 $T = 1000$ 进行采样。DiffPIR 的近端步骤使用共轭梯度下降法求解，迭代次数为 100 次。为了评估重建结果，我们采用了峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性指数测量 (SSIM) 这两个定量指标。

图 1 展示了 DPS、DiffPIR 和 DICE 方法在 15、30 和 60 视角的均匀和非均匀采集设置下的重建结果，其中 DICE 的重建效果显著更佳且准确。放大区域显示 DICE 展现出更好的高频重建细节，保留了更精细的信息。表 I 总结了所有方法在测试集中均匀和非均匀采集场景下分别使用 15、30 和 60 视角的平均 PSNR 和 SSIM 重建结果。总体而言，DICE 的重建性能显著优于基线方法。

C. 消融研究

ρ 和 τ_i 的影响：DICE 的参数 ρ 控制 CE 更新的松弛或强度，参数 τ_1 和 $\tau_2 = 1 - \tau_1$ 分别控制代理 F_1 和 F_2 的强度。为了说明它们的效果，图 2 展示了在统一采集场景中使用 15 视角、 $K = 5$ 次 Mann 迭代和 $P = 50$ 步共轭梯度下降步骤的重建结果。从这些重构中可以观察到，最佳的重构结果是通过 $\rho = 0.9$ 和 $\tau_1 = \tau_2 = 0.5$ 得到的，这意味着 Mann 迭代高度依赖当前更新方向，保留了很少来自前一次迭代的信息，并且两个代理 F_1 和 F_2 对重构过程贡献相等，表明在协作方案中影响均衡。

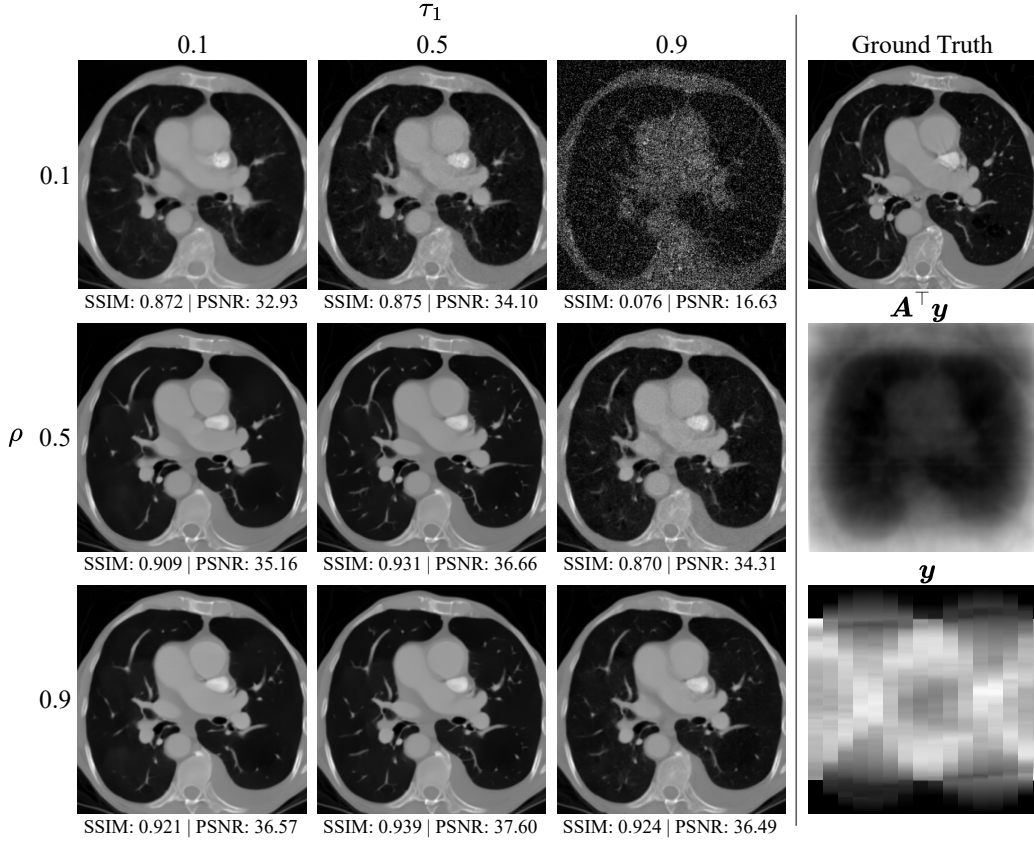


图 2. 参数的影响: 代理强度 F_1, τ_1 , 以及松弛参数的强度 ρ 。

K 和 P 的影响: 我们分析了 Mann 迭代次数 K 和共轭梯度步骤数 P 对算法 1 中重建质量的影响。图 3 绘制了在使用参数 $\rho = 0.9$ 和 $\tau_1 = 0.5$ 的情况下, 采用统一角度获取场景下 30 个视角的 20 幅图像的不同配置下的平均 PSNR。结果表明, 在 $K = 5$ 次 Mann 迭代后, 重建结果收敛, 而增加共轭梯度步骤的数量仅带来微小的改进。超过 $K = 5$ 后, PSNR 波动, 可能是因为相对较大的松弛参数 ρ 引入了不稳定性。

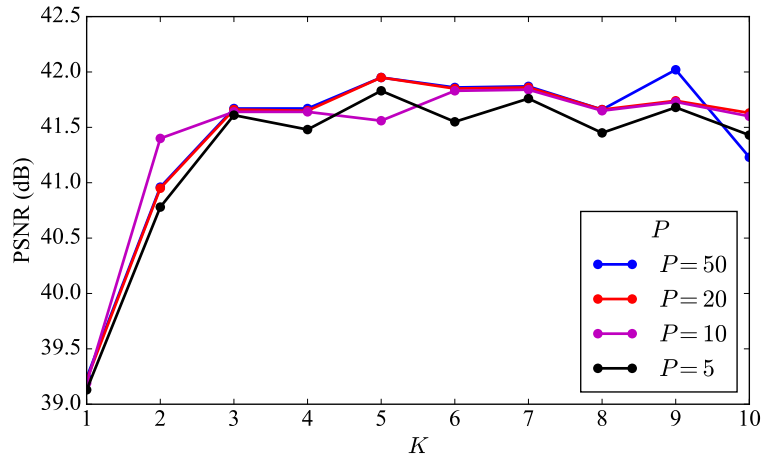


图 3. 参数的影响: Mann 迭代 K 和共轭梯度下降步长 P 。

跳过时间步: 然而, 尽管 DICE 显著提高了重建性能, 但由于在每个扩散采样步骤中解决一个 CE 问题, 它引入了额外的采样时间。因此, 我们使用较少数量的采样步骤分析了 DICE 的性能, $T \in \{50, 100, 200, 500, 1000\}$ 。图 4 显示了对于具有统一采集设置为 30 视图的测试集图像, 每个 T 值下的平均 PSNR 和每幅图像的采样时间, 以及相应的 DiffPIR 基线。结果显示, 对于 $T \geq 100$ DICE 在重建性能上显著优于 DiffPIR 基线, 但在时间步长 $T = 100$ 和 $T = 200$ 时采样时间略有增加; 然而, 在 $T = 50$ 时, 其性能下降。

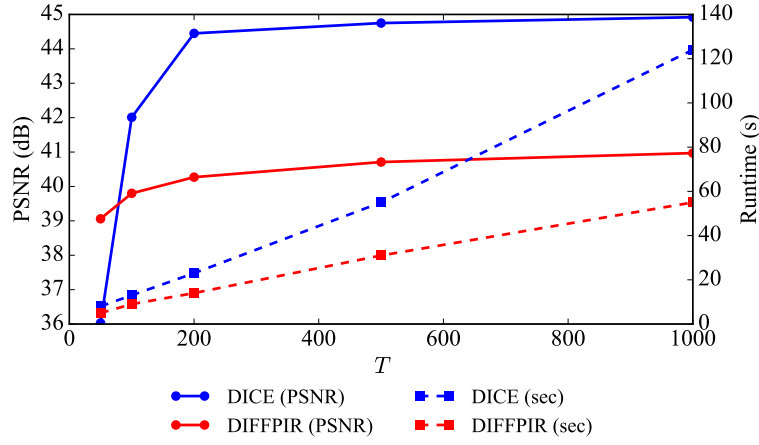


图 4. 跳过时间步的影响

IV. 结论与未来工作

该工作提出了一个框架 *DICE*: 扩散共识平衡, 将 DM 的条件生成过程表述为两个代理之间的共识均衡问题: (i) 数据一致性代理, 由近似映射给出; (ii) 生成先验代理, 由去噪步骤给出。使用高欠采样率下的稀疏视图 CT 进行的模拟展示了所提方法的鲁棒性, 提供了高质量的重建结果, 并超越了最先进的基线。未来的工作将利用 *DICE* 的灵活性无缝集成多种先验 (如学习到的图像去噪器、恢复网络和经典稀疏模型), 扩展该框架以解决其他科学成像逆问题, 例如 MRI 和地球物理成像, 并将其推广到其他扩散条件策略。

参考文献

- [1] A. P. Varghese, S. Naik, S. Asrar Up Haq Andrabi, A. Luharia, and S. Tivaskar, “Enhancing radiological diagnosis: A comprehensive review of image quality assessment and optimization strategies,” *Cureus*, vol. 16, no. 6, p. e63016, Jun. 2024.
- [2] M. Li, H. Yang, and H. Kudo, “An accurate iterative reconstruction algorithm for sparse objects: application to 3D blood vessel reconstruction from a limited number of projections,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 47, no. 15, pp. 2599–2609, Aug. 2002.
- [3] H. Kudo, T. Suzuki, and E. A. Rashed, “Image reconstruction for sparse-view CT and interior CT-introduction to compressed sensing and differentiated backprojection,” *Quant. Imaging Med. Surg.*, vol. 3, no. 3, pp. 147–161, Jun. 2013.
- [4] E. Y. Sidky and X. Pan, “Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 53, no. 17, pp. 4777–4807, Sep. 2008.
- [5] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint,” *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 57, no. 11, pp. 1413–1457, Nov. 2004.
- [6] S. V. Venkatakrishnan, C. A. Bouman, and B. Wohlberg, “Plug-and-play priors for model based reconstruction,” in *2013 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*, 2013, pp. 945–948.
- [7] A. Habring and M. Holler, “Neural-network-based regularization methods for inverse problems in imaging,” *GAMM-Mitteilungen*, vol. 47, no. 4, Nov. 2024.
- [8] A. Jalal, M. Arvinte, G. Daras, E. Price, A. G. Dimakis, and J. Tamir, “Robust compressed sensing mri with deep generative priors,” in *Advances in Neural Information Processing Systems*, M. Ranzato, A. Beygelzimer, Y. Dauphin, P. Liang, and J. W. Vaughan, Eds., vol. 34. Curran Associates, Inc., 2021, pp. 14938–14954. [Online]. Available: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2021/file/7d6044e95a16761171b130dcb476a43e-Paper.pdf
- [9] S. H. Chan, X. Wang, and O. A. Elgendy, “Plug-and-play admm for image restoration: Fixed-point convergence and applications,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 3, no. 1, pp. 84–98, 2017.
- [10] K. Zhang, Y. Li, W. Zuo, L. Zhang, L. Van Gool, and R. Timofte, “Plug-and-play image restoration with deep denoiser prior,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 44, no. 10, pp. 6360–6376, 2022.
- [11] K. H. Jin, M. T. McCann, E. Froustey, and M. Unser, “Deep convolutional neural network for inverse problems in imaging,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 26, no. 9, pp. 4509–4522, 2017.
- [12] Y. Han and J. C. Ye, “Framing u-net via deep convolutional framelets: Application to sparse-view ct,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 37, no. 6, pp. 1418–1429, 2018.

- [13] Z. Zhang, X. Liang, X. Dong, Y. Xie, and G. Cao, "A sparse-view ct reconstruction method based on combination of densenet and deconvolution," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 37, no. 6, pp. 1407–1417, 2018.
- [14] H. Chen, Y. Zhang, Y. Chen, J. Zhang, W. Zhang, H. Sun, Y. Lv, P. Liao, J. Zhou, and G. Wang, "Learn: Learned experts' assessment-based reconstruction network for sparse-data ct," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 37, no. 6, pp. 1333–1347, 2018.
- [15] W. Wu, D. Hu, C. Niu, H. Yu, V. Vardhanabhuti, and G. Wang, "Drone: Dual-domain residual-based optimization network for sparse-view ct reconstruction," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 40, no. 11, pp. 3002–3014, 2021.
- [16] Q. Zhang, Z. Hu, C. Jiang, H. Zheng, Y. Ge, and D. Liang, "Artifact removal using a hybrid-domain convolutional neural network for limited-angle computed tomography imaging," *Physics in Medicine & Biology*, vol. 65, no. 15, p. 155010, jul 2020. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6560/ab9066>
- [17] J. Sohl-Dickstein, E. Weiss, N. Maheswaranathan, and S. Ganguli, "Deep unsupervised learning using nonequilibrium thermodynamics," in *Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning*, ser. Proceedings of Machine Learning Research, F. Bach and D. Blei, Eds., vol. 37. Lille, France: PMLR, 07–09 Jul 2015, pp. 2256–2265. [Online]. Available: <https://proceedings.mlr.press/v37/sohl-dickstein15.html>
- [18] J. Ho, A. Jain, and P. Abbeel, "Denoising diffusion probabilistic models," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M. Balcan, and H. Lin, Eds., vol. 33. Curran Associates, Inc., 2020, pp. 6840–6851. [Online]. Available: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2020/file/4c5bcfec8584af0d967f1ab10179ca4b-Paper.pdf
- [19] J. Song, C. Meng, and S. Ermon, "Denoising diffusion implicit models," in *International Conference on Learning Representations*, 2021. [Online]. Available: <https://openreview.net/forum?id=St1giarCHLP>
- [20] Y. Song, J. Sohl-Dickstein, D. P. Kingma, A. Kumar, S. Ermon, and B. Poole, "Score-based generative modeling through stochastic differential equations," in *International Conference on Learning Representations*, 2021. [Online]. Available: <https://openreview.net/forum?id=PXTIG12RRHS>
- [21] P. Goyes-Peñañiel, U. S. Kamilov, and H. Arguello, "Cddip: Constrained diffusion-driven deep image prior for seismic data reconstruction," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 22, pp. 1–5, 2025.
- [22] L. Rodríguez-López, P. Goyes-Peñañiel, L. Galvis, and H. Arguello, "Constrained diffusion for seismic data reconstruction using deep image and generative prior," vol. 2025, no. 1, pp. 1–5, 2025. [Online]. Available: <https://www.earthdoc.org/content/papers/10.3997/2214-4609.2025101342>
- [23] H. Chung and J. C. Ye, "Score-based diffusion models for accelerated mri," *Medical Image Analysis*, vol. 80, p. 102479, 2022. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1361841522001268>
- [24] H. Chung, J. Kim, M. T. Mccann, M. L. Klasky, and J. C. Ye, "Diffusion posterior sampling for general noisy inverse problems," *arXiv preprint arXiv:2209.14687*, 2022.
- [25] Y. Zhu, K. Zhang, J. Liang, J. Cao, B. Wen, R. Timofte, and L. Van Gool, "Denoising diffusion models for plug-and-play image restoration," in *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) Workshops*, June 2023, pp. 1219–1229.
- [26] B. Kavar, M. Elad, S. Ermon, and J. Song, "Denoising diffusion restoration models," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, S. Koyejo, S. Mohamed, A. Agarwal, D. Belgrave, K. Cho, and A. Oh, Eds., vol. 35. Curran Associates, Inc., 2022, pp. 23 593–23 606. [Online]. Available: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2022/file/95504595b6169131b6ed6cd72eb05616-Paper-Conference.pdf
- [27] B. Song, S. M. Kwon, Z. Zhang, X. Hu, Q. Qu, and L. Shen, "Solving inverse problems with latent diffusion models via hard data consistency," in *The Twelfth International Conference on Learning Representations*, 2024. [Online]. Available: <https://openreview.net/forum?id=j8hdRqOUhN>
- [28] H. Chen, Z. Hao, and L. Xiao, "Deep data consistency: a fast and robust diffusion model-based solver for inverse problems," *arXiv preprint arXiv:2405.10748*, 2024.
- [29] Y. Blau and T. Michaeli, "The perception-distortion tradeoff," in *2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2018, pp. 6228–6237.
- [30] G. T. Buzzard, S. H. Chan, S. Sreehari, and C. A. Bouman, "Plug-and-play unplugged: Optimization-free reconstruction using consensus equilibrium," *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 11, no. 3, pp. 2001–2020, Jan. 2018.
- [31] C. A. Bouman, *Foundations of computational imaging*, ser. Other Titles in Applied Mathematics. New York, NY: Society for Industrial & Applied Mathematics, Aug. 2022.

- [32] P. Goyes-Peñafiel, E. Vargas, C. V. Correa, W. Agudelo, B. Wohlberg, and H. Arguello, “A consensus equilibrium approach for 3-d land seismic shots recovery,” *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 19, pp. 1–5, 2022.
- [33] I. Loshchilov and F. Hutter, “Decoupled weight decay regularization,” in *International Conference on Learning Representations*, 2019. [Online]. Available: <https://openreview.net/forum?id=Bkg6RiCqY7>
- [34] J. Leuschner, M. Schmidt, D. O. Baguer, and P. Maass, “LoDoPaB-CT, a benchmark dataset for low-dose computed tomography reconstruction,” *Sci. Data*, vol. 8, no. 1, p. 109, Apr. 2021.
- [35] R. Schofield, L. King, U. Tayal, I. Castellano, J. Stirrup, F. Pontana, J. Earls, and E. Nicol, “Image reconstruction: Part 1—understanding filtered back projection, noise and image acquisition,” *Journal of cardiovascular computed tomography*, vol. 14, no. 3, pp. 219–225, 2020.
- [36] K. Zhang, W. Zuo, Y. Chen, D. Meng, and L. Zhang, “Beyond a gaussian denoiser: Residual learning of deep cnn for image denoising,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 26, no. 7, pp. 3142–3155, 2017.