

Wohlart 的三环机构: 过约束和不稳定的连杆结构

Andreas Müller

本文重新审视了 Karl Wohlhart 在 2004 年的一篇 ARK 论文中提出的一种三环空间连杆机构（该机构是对 Eddie Baker 在 1980 年提出的双环连杆机构的扩展），并在 Diez-Martínez 等人于 2006 年的另一篇 ARK 论文中进行了分析。

局部分析表明，该连杆具有有限自由度 3（因此是过约束的），而在其参考配置下微分自由度为 5。研究表明其构形空间局部上是一个光滑流形，因此参考配置不是 c -空间奇点。还证明了微分自由度在局部恒定，这使得该连杆结构不稳定（即参考配置不是一个奇异点）。通过计算运动切锥以及对 c -空间的局部逼近，可以更好地进行高阶局部分析。

Key words: 多环连接机构，配置空间，运动奇点，不稳定，高阶分析，运动切锥。

1 介绍

在 [1] 中，Baker 提出了一个两环链接作为示例来演示他的方法在确定任意两个物体的相对扭转以及因此它们在机构中的瞬时相对运动性方面的应用。这个链接也被 Davies [2] 用来展示他关于运动学拓扑的图表示。Fayet [?] 将其扩展到一个三环链接，并用作演示他的方法来确定

Andreas Müller

Johannes Kepler University, Linz, Austria, e-mail: a.mueller@jku.at

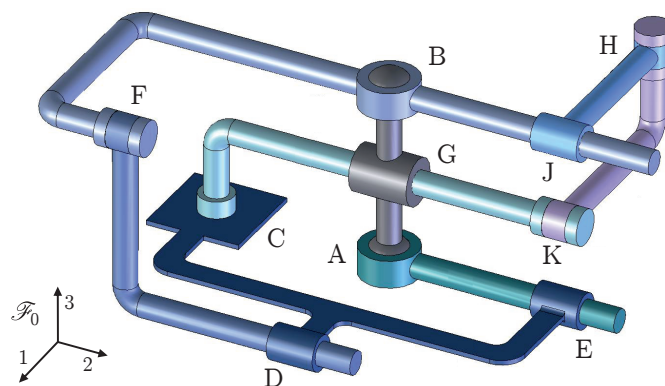


图 1 Fayet 提出的多环链接（CAD 图纸由 Jose Rico 提供）。

“相对螺旋空间”的示例，即由可能的相对扭转定义的 $se(3)$ 的子空间。Wohlhart [16] 提出了一种识别相对扭转的有效方法，后来 Diez-Martínez 等 [3] 提出了确定有限相对运动性的一种方法。在两篇出版物中，都使用了图 1 中所示的 Fayet 链接的一种变体作为示例，并在其所示的参考配置下进行了分析。结果显示，在 [16] 参考配置下微分自由度为 5。在 [?] 中，有限自由度被发现为 3。微分和局部自由度的不同可能表明参考配置是运动学奇点。这个问题尚未得到解决，并将在本文中通过局部机动性分析给出答案。后者确定了图 ?? 中参考配置下的有限机动性和该链接通过此配置进行有限运动时的微分机动性。将表明这个配置是 c 空间中的一个正则点，它不是一个运动学奇点，并且其微分自由度始终为 5，这使得连接体不稳定。如果在正常配置中，机制的微分（瞬时）自由度高于局部（有限）自由度，则该机构是不稳定的。分析利用了运动切锥，它提供了如在 [?, ?, 5, 12] 中介绍的这种局部分析的数学框架，并对 c -空间进行了局部逼近。计算通过关节螺距 [?] 的高阶表达式的封闭形式和递推关系得以实现。包含图 1 中连杆所有计算的 Mathematica[®] 笔记本可以从作者处获得。

2 运动学拓扑

连杆的运动拓扑由非定向（多）图 Γ [2,10] 表示。顶点表示刚体/连杆，边表示（1-DOF）关节。图 ?? 的连杆菲耶特图包含 10 个关节（2 个

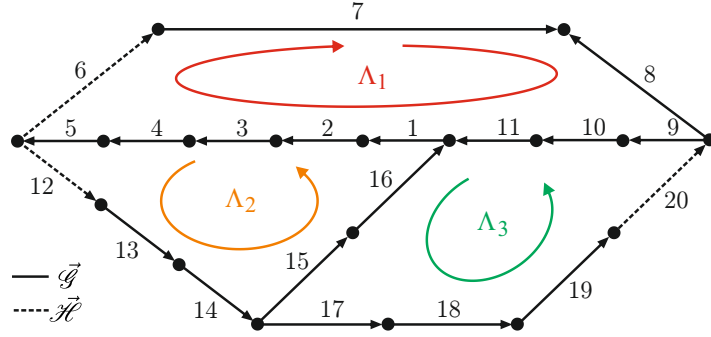


图 2 树 $\vec{\mathcal{G}}$ 、余树 $\vec{\mathcal{H}}$ 和拓扑图 $\vec{\Gamma}$ 中的 FCs Λ_l , 如图 1 所示连接中的。

球形, 4 个柱形, 1 个平面, 3 个回转), 以及 8 个连杆。柱形、球形和平面关节被建模为螺旋关节组合 [3, 16]。因此运动模型由 $n = 20$ 个螺旋关节 (6 个棱柱形, 14 个回转) 和 $N = 17$ 个连杆组成。该拓扑图具有 $\gamma = N - n + 1 = 3$ 个基本回路 (FC), 也称为基本环, 用 $\Lambda_l, l = 1, \dots, \gamma$ 表示。可以引入一个余树 $\mathcal{H}$, 其中每个 γ 个 FC 中恰好包含一条边。消除余树的边得到生成树 $\mathcal{G}$ 。对于运动学建模, 引入了一个相关的有向图 $\vec{\Gamma}$ 。边的方向表示关节变量的极性。这定义了相应的有向树 $\vec{\mathcal{G}}$ 和余树 $\vec{\mathcal{H}}$, 如图 2 所示 (顶点/体标签被省略)。FCs 根据边在遍历 FC 时出现的顺序来诱导一个排序。所有边都与 FCs 对齐, 除了边 15 和 16。

$\vec{\Gamma}$ 的边的对应关系 (即模型中的回转/棱柱关节到连杆的多自由度关节的对应关系如下: 联合 A: 1, 2, 3; B: 9, 10, 11; C: 12, 13, 14; D: 6, 7; E: 4, 5; F: 8; G: 15, 16; H: 18; J: 19, 20; K: 17。

3 运动学模型

拓扑图的边 i 对应一个螺旋关节, 用螺纹坐标向量 $Y_i, i = 1, \dots, n$ 和关节变量 $q_i, i = 1, \dots, n$ 建模。后者汇总在向量 $q \in \mathbb{V}^n = \mathbb{R}^6 \times \mathbb{T}^{14}$ 中。图??示的配置非耶特图用作零参考配置 $q_0 = 0$ 。螺钉坐标向量在此参考配置中确定, 并在位于关节 A 时用空间框架 $\mathcal{F}_0$ 表示 (源自 [3]):

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, Y_2 = Y_5 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \\
Y_3 &= Y_{11} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, Y_4 = Y_6 = Y_{13} = Y_{15} = Y_{19} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\
Y_7 &= (0, 1, 0, 0, 0, 1)^T, Y_8 = (0, 1, 0, -1, 0, 1)^T, Y_9 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\
Y_{10} &= Y_{20} = (0, 1, 0, -1, 0, 0)^T, Y_{12} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\
Y_{14} &= (0, 0, 1, -1, 0, 0)^T, Y_{16} = (0, 1, 0, -1/2, 0, 0)^T \\
Y_{17} &= (0, 1, 0, -1/2, 1, 0)^T, Y_{18} = (0, 0, 1, 1, 1, 0)^T.
\end{aligned}$$

任意配置下的瞬时关节螺钉坐标用 $S_i(q)$ 表示。它们从参考配置中的关节螺距坐标通过将 Y_i 变换到当前配置 [12, 13] 中得出。例如 $S_9(q) = Ad_{\exp(Y_1 q_1) \dots \exp(Y_8 q_8)} Y_9$ ，其中 Ad 是将螺距坐标 [15] 转换的矩阵。事实上，在零参考配置中的 $S_i(0) = Y_i$ 。

用 J_l 表示速度约束 $J_l(q)\dot{q} = 0$ 中的约束雅可比，用于 $FC\Lambda_l, l = 1, \dots, 3$ 。

根据拓扑图的定向，所有 $FC\gamma = 3$ 的总体约束雅可比是 18×20 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} & S_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_9 & S_{10} & S_{11} & 0 & 0 & 0 & -S_{15} & -S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & S_{20} \end{pmatrix} \quad (1)$$

，其中三行对应于 J_l 。该系统中 $6\gamma = 18$ 速度约束因此是 $J(q)\dot{q} = 0$ 。请注意，边 15 和 16 的方向与 Λ_3 相反。

$FC\Lambda_l, l = 1, \dots, \gamma$ 的几何回路闭约束是 $f_l(q) = I$ ，约束映射由指数的乘积表示

$$f_1(q) = \exp(Y_1 q_1) \dots \exp(Y_{11} q_{11}) \quad (2)$$

$$f_2(q) = \exp(Y_1 q_1) \dots \exp(Y_5 q_5) \exp(Y_{12} q_{12}) \dots \exp(Y_{16} q_{16}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
f_3(q) &= \exp(Y_9 q_9) \exp(Y_{10} q_{10}) \exp(Y_{11} q_{11}) \exp(-Y_{16} q_{16}) \exp(-Y_{15} q_{15}) \\
&\quad \cdot \exp(Y_{17} q_{17}) \exp(Y_{18} q_{18}) \exp(Y_{19} q_{19}) \exp(Y_{20} q_{20}) \end{aligned} \quad (4)$$

其中顺序由 FCs 定义，而指数中的符号则由相对于 FCs 的边的方向决定。
c 空间然后是实解析簇

$$V := \{q \in \mathbb{V}^{20} | f_l(q) = I, l = 1, \dots, 3\}. \quad (5)$$

运动分析的主要目标在于确定维度（即自由度）和 V 的拓扑结构（即运动性）。在 $q \in V$ 处的微分自由度是 $\delta_{\text{diff}}(q) = \dim \ker J(q) = n - \text{rank } J(q)$ 。

差动迁移由向量 $x \in \ker J(q)$ 描述。有限局部自由度在 $q \in V$ 处是 V 的局部维度, 表示为 $\delta_{\text{loc}}(q) = \dim_q V$ 。

C-空间奇点是 V 的非光滑点 (其中 V 不是光滑流形)。运动学奇异点是在 V 中 q 任何邻域内微分自由度不恒定的点。C-空间奇点是运动学奇点。反之则不一定成立。约束奇点是约束雅可比矩阵不满秩的点。C-空间和运动学奇点是约束奇点。相反的情况并非如此必然为真 (例如。超约束机构)。

4 通过参考配置的光滑有限运动

连杆的运动对应于 V 中的一条曲线。在给定的配置 $q \in V$ 下, 通过 q 的光滑有限曲线 V 的切线, 即为了平滑运动, 形成运动学切锥 $C_q^K V := \{\sigma | \sigma \in \mathcal{C}_q\} \subset \mathbb{R}^n$, 其中 $\mathcal{C}_q$ 是通过 $q \in V$ [?] V 中的光滑曲线类 CISM Mueller2019。通过关节变量的参数化, 它可以简单地被视为所有速度向量 $\dot{q}$ 的集合的形式定义, 使得 $q(t)$ 是 V 中的一个光滑曲线, 并满足循环约束条件的时间导数任意阶。因此, 它可以通过速度约束 [5, 8, 9] 的高阶导数来定义。表示 $H_l^{(1)}(q, \dot{q}) := J_l(q)\dot{q}$ 和 $H_l^{(i)}(q, \dot{q}, \dots, q^{(i)}) := \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} H_l^{(1)}(q, \dot{q})$, FCA _{l} 的 i 阶约束是

$$H_l^{(i)}(q, \dot{q}, \dots, q^{(i)}) = 0. \quad (6)$$

然后确定运动切锥为

$$C_q^K V = K_q^K \subseteq \dots \subseteq K_q^3 \subseteq K_q^2 \subseteq K_q^1 \quad (7)$$

其中 K_q^i 是一个在 x 中定义的锥, 表示为

$$K_q^i := \{x | \exists y, z, \dots \in \mathbb{R}^{20} : H_l^{(1)}(q, x) = 0, H_l^{(2)}(q, x, y) = 0, H_l^{(3)}(q, x, y, z) = 0, \dots, H_l^{(i)}(q, x, y, z, \dots) = 0, l = 1, 2, 3\}. \quad (8)$$

序列 (7) 以有限的 κ 结束, 这特定于连杆并取决于配置。该公式的关键点在于高阶映射 $H_l^{(i)}$ 可以通过简单的向量操作 [12, 13] 以封闭形式或递归方式计算得出。Mathematica[®] 的实现可在 [11] 获取。

运动切锥提供了在 c-空间奇点 q 处相交的流形的局部描述。因此它允许识别运动分歧, 包括非横截相交 [?]. 计算表明, 一阶和二阶锥分别是 5 维和 3 维向量空间:

$$\begin{aligned}
K_{q_0}^1 = \{x \in \mathbb{R}^{20} \mid & x_1 = 0, x_2 = u, x_3 = v, x_4 = 0, x_5 = w + 2v, x_6 = -v, x_7 = w/2, \\
& x_8 = r, x_9 = -v, x_{10} = s, x_{11} = w + 2v, x_{12} = -s, x_{13} = -w - u - 2v, \\
& x_{14} = -w - 2v, x_{15} = -r + s, x_{16} = w + 2v, x_{17} = v, \\
& x_{18} = -w - v - r + s, x_{19} = -w, x_{20} = w; \ r, s, u, v, w \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{q_0}^2 = \{x \in \mathbb{R}^{20} \mid & x_1 = 0, x_2 = -u, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = r, \\
& x_9 = 0, x_{10} = s, x_{11} = 0, x_{12} = -x_{10}, x_{13} = u, x_{14} = 0, x_{15} = -r + s, \\
& x_{16} = 0, x_{17} = 0, x_{18} = -r + s, x_{19} = 0, x_{20} = 0; \ r, s, u \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

这表明在 q_0 处，连杆可以执行 5 维的一阶运动，因此微分自由度是 $\delta_{\text{diff}}(q_0) = \dim K_{q_0}^1 V = 5$ 。高阶锥体是 $K_{q_0}^i = K_{q_0}^2, i \geq 3$ ，因此是 $C_{q_0}^K V = K_{q_0}^2$ 。这表明恰好有一个流形通过 q_0 。因此，连杆允许定义良好的三维平滑运动，但没有分叉，局部有限自由度具有下限 $\delta_{\text{loc}}(q_0) \geq \dim C_{q_0}^K V = 3$ 。如果 q_0 属于 V （更高维度）的子簇，则自由度可能高于 3，并且不允许平滑运动，例如尖点。后者不能通过动力学切锥体（或基于约束项高阶导数的任何分析）来捕捉。这在第 6 节中进行了讨论。

5 平滑有限运动中的微分迁移率

局部有限运动的分析未能揭示通过 q_0 时的微分移动性。还需要确定 i) 连杆在通过 q_0 进行有限运动时的微分自由度，以及 ii) 微分自由度是否在 q_0 附近的 V 中局部恒定。前者允许得出连杆是否不稳定。后者对于断定 q_0 是否为运动学奇点至关重要。最近认识到（尽管这一现象已经为人所知很长时间了），即使 c-空间是一个光滑流形 [14]，机制也可能表现出运动学奇点。

用 $J_{\alpha\beta}$ 表示 J 的 $k \times k$ 子矩阵，包含元素 J_{ij} 根据索引集 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \alpha_{i-1} < \alpha_i$ 和 $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}, \beta_{j-1} < \beta_j$ 。 $\alpha\beta$ -子式 J 的阶数为 k ，然后是 $m_{\alpha\beta}(q) := \det J_{\alpha\beta}(q)$ 。其 i 阶导数用 $M_{\alpha\beta}^{(i)}(q, \dot{q}, \dots, q^{(i)}) := \frac{d^i}{dt^i} m_{\alpha\beta}(q)$ 表示。约束雅可比矩阵秩小于 k 的点集可以通过 $[?]k$ -子式定义 JMR2018, CISM Mueller2019

$$\begin{aligned}
L_k := \{q \in \mathbb{V}^{20} \mid & f_l(q) = I, m_{\alpha\beta}(q) = 0, l = 1, 2, 3 \\
& \forall |\alpha| = |\beta| = k, \alpha \subseteq \{1, \dots, 6\}, \beta \subseteq \{1, \dots, n\}\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

感兴趣的是一类秩小于 k 的有限光滑运动。切线到这样的运动通过 $q \in V$ 形成运动学切锥到 L_k ，由序列确定

$$C_q^K L_k = K_q^{k,\kappa} \subset \dots \subset K_q^{k,3} \subset K_q^{k,2} \subset K_q^{k,1} \quad (10)$$

定义的 i 阶锥体由约束和子式的 i 阶导数定义

$$\begin{aligned} K_q^{k,i} := \{x | \exists y, z, \dots \in \mathbb{R}^{20} : H_l^{(1)}(q, x) = H_l^{(2)}(q, x, y) = \dots = H_l^{(i)}(q, x, y, z, \dots) = 0, \\ M_{\alpha\beta}^{(1)}(q, x) = M_{\alpha\beta}^{(2)}(q, x, y) = \dots = M_{\alpha\beta}^{(i)}(q, x, y, z, \dots) = 0, \\ \forall \alpha \subseteq \{1, \dots, 6\}, \beta \subseteq \{1, \dots, n\}, |\alpha| = |\beta| = k, l = 1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (11)$$

通过简单的向量运算 [13] 可以高效地计算子式的导数, 也可作为 Mathematica[®] 实现 [11]。

在参考配置 q_0 中, 雅可比行列式具有 $\text{rank } J(q_0) = 15$, 而其秩不能高于 $3 \cdot 6 = 18$ 。因此必须研究 $L_k, k = 16, 17, 18$ 。计算结果显示, (6) 的解的所有阶数为 $k = 16, 17, 18$ 和 $M_{\alpha\beta}^{(i)} = 0, |\alpha| = |\beta| = 16, 17, 18$ 的子式的导数均为零。得出结论, 对于通过 q_0 的任何平滑运动, 雅可比矩阵局部秩恒为 15。因此该连杆具有局部恒定的微分自由度 $\delta_{\text{diff}}(q) = n - \text{rank } J(q) = 20 - 15 = 5, q \in U(q_0) \cap V$ 。由于其微分自由度和局部自由度永久不同, 该联结是 $\delta_{\text{diff}} - \delta_{\text{loc}} = 2$ 阶的不稳定。

6 配置空间的局部近似

上述分析没有捕捉到无法实现平滑运动的奇点, 参考配置 q_0 可能仍然是一个奇点, 在该奇点处 V 不是局部流形的交集。这种情况发生在死点/运动反转点 (也称为静止奇点)。在这些配置中, c -空间不是流形的交集, 因此无法在该点定义切线, 例如在尖点 [7, 12] 处。这可以通过使用约束映射在 q 处的 k 阶泰勒级数展开来对 c -空间 V 进行局部逼近来进行验证

$$f_l(q+x) = f_l(q) + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} d^k f_{l,q}(x). \quad (12)$$

由于 $f_l(q) = I$, 对于 $q \in V$, 在 q 处的 V 的 k 阶逼近由

$$V_q^k := \{x \in \mathbb{R}^n | df_{l,q}(x) + \frac{1}{2} d^2 f_{l,q}(x) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f_{l,q}(x) = 0, l = 1, \dots, 3\}. \quad (13)$$

给出。差分 $d^k f_{l,q}$ 的一个有效的递归和显式表达式已在 [?] 报告, 穆勒-MMT2019, CISS 穆勒 2019, 并且可以在 [11] 中找到 Mathematica[®] 实现。

计算结果为 $V_{q_0}^1 = K_{q_0}^1$ 和 $V_{q_0}^2 = K_{q_0}^2$ ，这证实了该连接只能执行平滑的三维运动。

7 结论

研究表明，在参考配置中，Wohlhart 提出的三环连杆 [16] 具有有限局部自由度 3，局部常数微分自由度 5，并且参考配置是规则的。因此，该连杆可以执行有限的三维平滑运动。由于在所有规则点处微分自由度超过局部自由度，它是二阶颤动的。

该连杆机构也是过约束的。任意给定拓扑的空间连杆机构的通用（拓扑）自由度由切比雪夫-库茨巴赫-格律布勒公式给出，可以表示为 $\delta_{\text{top}} = \sum_{i \in I} \delta_i - 6\gamma = n - 6\gamma$ 。应用于这个连杆机构时，通用自由度是 $\delta_{\text{top}} = 20 - 6 \cdot 3 = 2$ ，因此它是过约束一度。

总之，参考配置是一种约束奇点，但不是运动学奇点或 c 空间奇点。需要注意的是，[4] 中图 4 所示的三环链接（在 [16] 中重复为图 3）显示出类似的有趣性质。所呈现的分析仅揭示了参考配置下的可动性（尽管该配置是任意选择的）。全局分析将不得不求助于代数公式，并使用几何代数中的工具。

Acknowledgements 这项工作得到了奥地利 COMET-K2 计划框架内 LCM K2 共生机电中心的支持。

References

1. Baker, J.E.: On relative freedom between links in kinematic chains with cross-jointing. *Mechanism and Machine Theory* 15(5), 397 – 413 (1980)
2. Davies, T.: Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory* 16(3), 171 – 183 (1981)
3. Diez-Martínez, C.R., Rico, J.M., Cervantes-Sánchez, J.J., Gallardo, J.: Mobility and connectivity in multiloop linkages. In: J. Lennarčič, B. Roth (eds.) *Advances in Robot Kinematics*, pp. 455–464. Springer Netherlands (2006)

4. Fayet, M.: Mécanismes multi-boucles—i détermination des espaces de torseurs cinématiques dans un mécanisme multi-boucles quelconque. *Mech. Mach. Theory* 30(2), 201 – 217 (1995)
5. Lerbet, J.: Analytic geometry and singularities of mechanisms. *ZAMM, Z. angew. Math. Mech.* 78(10b), 687–694 (1999)
6. Lopez-Custodio, P., Müller, A., Kang, X., Dai, J.: Tangential intersection of branches of motion. *Mech. Mach. Theory* 147 (2020)
7. Lopez-Custodio, P., Müller, A., Rico, J., Dai, J.: A synthesis method for 1-dof mechanisms with a cusp in the configuration space. *Mech. Mach. Theory* 132, 154–175 (2019)
8. Müller, A.: Local kinematic analysis of closed-loop linkages -mobility, singularities, and shakiness. *ASME J. of Mech. and Rob.* 8 (2016)
9. Müller, A.: Higher-order analysis of kinematic singularities of lower pair linkages and serial manipulators. *ASME J. Mech. Rob.* 10(1) (2018)
10. Müller, A.: Topology, kinematics, and constraints of multi-loop linkages. *Robotica* 36(11), 1641–1663 (2018)
11. Müller, A.: Data for: An overview of formulae for the higher-order kinematics of lower-pair chains with applications in robotics and mechanism theory. *Mendeley Data*, v1 (2019)
12. Müller, A.: Local investigation of mobility and singularities of linkages. In: A. Müller, D. Zlatanov (eds.) *Singular Configurations of Mechanisms and Manipulators*, CISM 589. Springer (2019)
13. Müller, A.: An overview of formulae for the higher-order kinematics of lower-pair chains with applications in robotics and mechanism theory. *Mech. Mach. Theory* 142 (2019)
14. Müller, A., Li, Z.: Mechanism singularities revisited from an algebraic viewpoint. In: 43rd Mechanisms and Robotics Conference (MR) / ASME International Design Engineering Technical Conferences (IDETC), Anaheim, CA, USA (August 18-21, 2019)
15. Selig, J.: *Geometric Fundamentals of Robotics*. Springer (2005)
16. Wohlhart, K.: Screw spaces and connectivities in multiloop linkages. In: J. Lenarčič, C. Galletti (eds.) *On Advances in Robot Kinematics*, pp. 97–104. Springer Netherlands (2004)