

脆弱系统：一个导致量子理论的隐变量贝叶斯框架

Yasmn Navarrete^{1,*} and Sergio Davis^{2,3}

¹Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad, Los Alerces 3024 uoa, Santiago

²Research Center in the Intersection of Plasma Physics, Matter and Complexity (P²mc), Comisin Chilena de Energía Nuclear, Casilla 188-D, Santiago

³Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Andres Bello, Sazie 2212, Santiago

ABSTRACT

对量子理论的理解，即通过新的、基础性的描述来解释非经典关联、测量的非交换性以及其它独特且违背直觉的现象，仍然是我们对物理现象描述的基础挑战之一。在一些提议中，认为量子态本质上是在贝叶斯框架下的知识状态是一种令人着迷的可能性，这归功于其解释力。在这项工作中，通过将贝叶斯概率理论应用于“脆弱”系统（即测量会扰动的系统）来推导出量子理论的形式化方法。复希尔伯特空间、非交换算子和期望值的迹规则都是从使用线性代数解决涉及隐藏变量的经典概率积分方程中自然产生的。也讨论了该理论的非脆弱极限，在这种情况下，所有测量都是可交换的，且理论变得类似于经典统计理论。

1 介绍

量子理论的意义和解释一直是物理学中的一个争议问题，因为它暗示了我们宇宙的非局域性。在 1935 年的开创性论文中，爱因斯坦、波多尔斯基和罗森¹（EPR）断言量子理论是不完整的，因为无法同时预测粒子的位置和速度等互补量。在 EPR 论文²中，爱因斯坦认为如果量子力学提供了“现实”的完整描述，那么动量的不确定性不应成为问题。他相信存在“现实元素”，这些是粒子的性质，即使并非所有这些值都能同时测量（根据海森堡不确定原理），它们也有确定的值。因此，他认为必须存在控制粒子行为的隐藏变量（未定参数），如果已知这些变量，将允许对其状态进行完整描述。

此外，量子纠缠引入了非局域性的概念，这一概念后来通过贝尔定理²进行了讨论。纠缠系统表现出在物理上相隔很远的系统之间的非经典相关性，但这些系统在过去曾相互作用过。这是量子力学中的一个基本现象，并成为该领域的核心特征。由于其非常规和反直觉的性质，纠缠有时被描述为“鬼魅般的超距作用”。换句话说，纠缠粒子的属性是相互关联的，即使它们相隔很远的距离。

当实验显示违反贝尔不等式时，这意味着观察到的纠缠粒子（例如在量子纠缠实验中的）之间的相关性无法用任何同时保持局域性和实在性的理论来解释。这导致结论：如果将量子力学理解为隐变量理论（即决定量子测量结果的额外参数），那么它不可能是一个局域理论。

作为对贝尔不等式实验违反的结果³，可以得出结论：量子理论中纠缠粒子之间的关联无法用同时保持局域性和实在性的任何理论来解释，因此必须以隐藏变量的形式进行表述，并且必须是非局域性理论。为了尝试填补对于量子理论基础理解中的这一空白，已经提出了一些隐藏变量理论^{2,4-7}。

此外，最近在物理和其他领域中，量子理论的数学形式主义在广泛不同背景下的成功应用引起了人们的兴趣。例如，在量子认知⁸、机器学习⁹、信号处理¹⁰、经典流体动力学系统^{11,12}等领域。尽管取得了成功，但将量子理论应用于传统量子领域之外的那些系统的正式理论依据仍然缺乏。

在这项工作中，我们将基于隐藏变量并从贝叶斯概率的应用中构建脆弱的系统¹³（受测量影响的系统）的理论。我们将从基本原则恢复量子理论的形式主义，特别是我们将获得以下结果：

- 测量后的状态对应于线性变换的不变量。
- 此变换导致希尔伯特空间中一个线性算子的本征值方程。

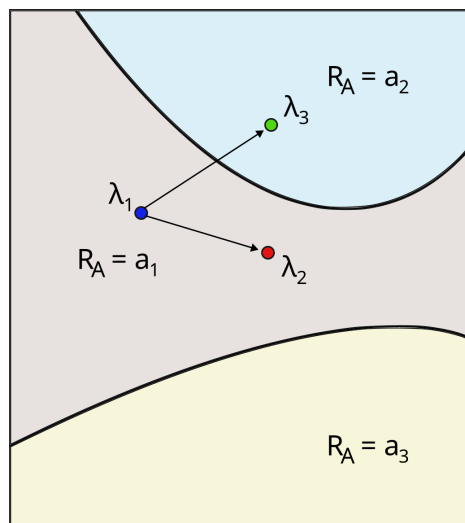


Figure 1. 隐藏变量和函数 $R_A(\lambda)$: 每个区域对应一个与隐藏变量分布相关的可观察值。

- 期望由密度矩阵形式的迹规则给出。

2 脆弱系统

简单来说，脆弱系统是指受测量影响的系统。这将它与非脆弱（经典）系统区分开来，在后者中，测量不会改变其状态（我们将测量视为两个系统之间的相互作用之一获取关于另一个的信息）。

由于任何系统（无论是否脆弱）都包含信息，我们将一个系统视为可以处于不同**内部状态**的“黑箱”，表示为 λ 。一般来说， λ 包含了多个自由度，但在这里我们不会利用其内部结构。系统的内部状态 λ （每次对系统进行测量时都会发生变化）包含了描述系统所需的所有信息。

我们将考虑一个具有多个实值离散可观测量的系统 $A, B, C, \dots$ 。对于每个可观测量 x ，我们将关联一个实函数 R_x 。例如，可观测量 A 可能由实函数 $R_A(\lambda) \in \{a_1, \dots, a_N\}$ 给出一个值。在这种情况下，声明 $a_k = R_A(\lambda)$ 意味着当系统处于其内部状态 λ 时对 A 进行测量产生了值 a_k 。

脆弱系统与非脆弱系统之间关键的区别在于，在脆弱系统中，**访问内部状态 λ 是不可能的**，因为正是这个内部状态被测量所改变。因此，我们不能假设可以在实践中通过评估 R_A 在内部状态 λ 上的结果来获得测量结果，因为每个测量结果都关联一个可能的状态区域 λ ，如图所示。¹

由于状态 λ 的修改依赖于执行测量的环境细节（我们无法准确知晓或控制这些细节），因此测量的结果不可避免地具有随机性，而数学表述则需要概率论。

总结来说，一个脆弱的系统是指 (a) 在测量时会受到修改 (b) 当它被测量时，系统保持在一个“宏观”状态，并且 (c) 其可测量的属性具有有限的结果。

3 概率论

由于我们没有关于内部状态 λ 的确切知识，我们只能为其分配一个概率分布，设为 $P(\lambda|S)$ ，在**我们的知识状态 S** 中。与非脆弱系统不同，在脆弱系统中不存在对应于无限尖峰的知识状态 $\mathcal{J}$ ， $P(\lambda|\mathcal{J}) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ 。我们也不能知道测量将对内部状态 λ 做的确切修改，因此对于可观测量 A ，我们只能分配一个最终内部状态 λ' 在给定初始状态 λ 和已发生 A 测量的情况下转移的概率 $P(\lambda'|\lambda, A)$ 。

通过概率的边缘化规则¹⁴，我们可以看到，在对 A 进行测量之前，如果我们处于知识状态 S ，则测量后的新知

识状态 S' 将由

$$P(\lambda'|S') = \int d\lambda P(\lambda|S)P(\lambda'|\lambda, A) = P(\lambda'|S, A), \quad (1)$$

给出使得 $S' = S \wedge A$ (即之前的 S 状态和已经测量了 A 的事实)。在非脆弱系统的情况下, 内部状态 λ 不会因测量 A 而改变, 因此 $P(\lambda'|\lambda, A) = \delta(\lambda' - \lambda)$, 我们从而得到 $P(\lambda|S') = P(\lambda|S)$ 。

我们将考虑测量 A 得到值 a_k 的情况, 即当我们固定了此设置的点时。贝叶斯定理¹⁴ 告诉我们我们的知识状态必须符合概率规则,

$$P(\lambda|a_k) = \frac{P(a_k|\lambda)P(\lambda|\mathcal{I}_0)}{P(a_k|\mathcal{I}_0)}, \quad (2)$$

其中 $\mathcal{I}_0$ 是初始知识状态。所以我们有

$$P(a_k|\mathcal{I}_0) = \int d\lambda P(\lambda|\mathcal{I}_0)\delta(R_A(\lambda), a_k). \quad (3)$$

这表明我们的状态是对 R_A 的完全了解。我们将假设内部状态 $P(\lambda|\mathcal{I}_0)$ 的先验概率是均匀的, 然后公式 2 简化为

$$P(\lambda|a_k) = \frac{\delta(R_A(\lambda), a_k)}{\Omega_A(a_k)} = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_A(a_k)} & \text{if } R_A(\lambda) = a_k, \\ 0 & \text{if } R_A(\lambda) \neq a_k. \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\Omega_A(a_k) = \int d\lambda \delta(R_A(\lambda), a_k)$ 是给定 R_A 值的内部状态密度。 $P(\lambda|a_k)$ 禁止所有带有 $R_A \neq a_k$ 的 λ 值意味着, 在没有任何干扰的情况下, 对同一可观测量 A 进行连续两次测量将产生相同的输出 a_k 。由此可推断, 测量后的知识状态必须是方程 1 给出的变换 $S \rightarrow S'$ 的不变量 (即 “本征函数”)。也就是说, 如果我们定义 $g_k(\lambda) := P(\lambda|a_k)$ 为知识状态, 在测量 A 后得到结果 a_k , 我们必须有 g_k 不受该变换的影响, 所以

$$g_k(\lambda') = \int d\lambda g_k(\lambda)P(\lambda'|\lambda, A). \quad (5)$$

显然, 对于非脆弱系统中的所有 $g_k(\lambda)$, 公式 5 自动成立, 如 $P(\lambda'|\lambda, A) = \delta(\lambda' - \lambda)$ 。通常, 只有有限数量的函数 g_k 是公式 5 的解。

4 用完整基表示

在本节中, 我们介绍了线性代数中的符号使用方法, 以便将符号带入量子理论的自然语言。我们可以如下构造概率 $P(\lambda|S)$ 的一个完整且正交的标准基 $\{\phi_1(\lambda), \dots, \phi_N(\lambda)\}$ 。我们引入一个新的可观测量 E , 其可能的结果为 $e_1, \dots, e_N$ 。然后, 使用边缘化规则并根据公式 4 将 $P(\lambda|e_k)$ 替换为 E 而不是 A , 我们得到,

$$P(\lambda|S) = \sum_{k=1}^N P(\lambda|e_k)P(e_k|S) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta(R_E(\lambda), e_k)}{\Omega_E(e_k)} P(e_k|S). \quad (6)$$

现在我们定义基函数

$$\phi_i(\lambda) := \frac{\delta(R_E(\lambda), e_i)}{\sqrt{\Omega_E(e_i)}}, \quad (7)$$

尽管这不是唯一可能的选择: 我们可以提出不同的正交归一化函数 (例如复数函数)。采用方程 7 $P(\lambda|S)$ 中给出的表达式, 用系数 v_i 在此基础上表示, 即

$$P(\lambda|S) = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i(\lambda). \quad (8)$$

这固定了系数 $v_i = P(e_i|S)/\sqrt{\Omega_E(e_i)}$ 根据等式 6。由于函数 $R_E(\lambda)$ 是单值的, $\phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda) = 0$ 对于任何 λ 如果 $i \neq j$ 。此外, $\phi_i(\lambda)^2 = P(\lambda|e_i)$, 因此该基是标准正交的, 即

$$\int d\lambda \phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda) = \delta_{ij}. \quad (9)$$

将也用此基展开 $P(\lambda'|S')$ 为

$$P(\lambda'|S') = \sum_{j=1}^N w_j \phi_j(\lambda'), \quad (10)$$

我们可以分别用向量 $v = (v_1, \dots, v_N)$ 和 $w = (w_1, \dots, w_N)$ 表示知识状态 S 和 S' 。我们在附录 A 中证明了方程 1 等价于矩阵方程

$$w = \mathbb{T}_A \cdot v, \quad (11)$$

其分量为

$$w_k = \sum_{i=1}^N T_{ki}^{(A)} v_i, \quad (12)$$

其中我们定义了矩阵 $\mathbb{T}_A$ 的元素

$$T_{ij}^{(A)} = \int d\lambda d\lambda' \phi_i(\lambda') P(\lambda'|\lambda, A) \phi_j(\lambda). \quad (13)$$

变换的不动点, 即函数 $g_k(\lambda)$, 现在编码为特征向量 u_k (特征值为 1) 使得 $u_k = \mathbb{T}_A \cdot u_k$ 。矩阵 $\mathbb{T}_A$ 是允许我们获得可观测量 A 的系统不动点的变换。另一方面, 我们可以得到一个类似的算子 $\mathbb{A}$, 它导致必要的变换以使其特征值为测量结果。矩阵元 A_{ij} 由下式给出 (见附录 B),

$$A_{ij} = \int d\lambda d\lambda' R_A(\lambda) \phi_i(\lambda') P(\lambda'|\lambda, A) \phi_j(\lambda), \quad (14)$$

这使得我们可以将本征值问题写为

$$a_i u_i = \mathbb{A} \cdot u_i. \quad (15)$$

矩阵元素 A_{ij} 是实数, 因为函数 $R_A(\lambda)$ 和基函数 $\{\phi_i(\lambda)\}$ 都是实的。然而, 一般来说, 在任意复数基底 $\{\psi_i(\lambda)\}$ 中表达本征值问题可能更为方便, 因为一个实矩阵可以有复本征向量: 复本征向量通常与复本征值¹⁵一同出现, 因此

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^N a_i u_i u_i^T \rightarrow \sum_{i=1}^N a_i c_i c_i^{*T}. \quad (16)$$

其中 c_k 是一个维度为 N 的复数向量, 即在复数基底 $\{\psi_i\}$ 中 $\phi_k(\lambda)$ 的系数。在此复表示中, 矩阵 $\mathbb{T}_A$ 是酉的, 而 $\mathbb{A}$ 是厄米特的。

5 密度矩阵形式主义

在本节中, 我们将描述密度矩阵的形式主义, 以便表达并证明量子力学中的期望值是如何根据概率论的观点通过其公式得到的。回忆一下, 在冯·诺伊曼¹⁶量子理论的表述中, 与可观测量 A 相关的厄米算子 $\hat{A}$ 的期望值由迹规则给出,

$$\langle \hat{A} \rangle := \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A}), \quad (17)$$

其中 $\hat{\rho}$ 是一个密度算符。在我们的案例中，对于任意的知识状态 S ，我们可以将测量的期望值 A 写为

$$\langle R_A \rangle_S = \int d\lambda R_A(\lambda) P(\lambda|S) = \sum_{i=1}^N a_i P(a_i|S), \quad (18)$$

其中，在最后一个等式中我们使用了 $\int d\lambda R_A(\lambda) P(\lambda|a_i) = a_i$ 。现在，认识到 $\{a_i\}$ 是矩阵 $\mathbb{A}$ 的特征值，如方程 34 所给，对应的特征向量为 u_i ，我们可以将它们写成 $a_i = (u_i)^T \mathbb{A} u_i$ 或者，等价地，我们可以使用 $\mathbb{A}$ 的谱表示，即

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^N a_i u_i (u_i)^T.$$

这在统计学中被称为二次型¹⁷。

然后，在状态 S 下的期望是

$$\langle R_A \rangle_S = \sum_{i=1}^N p_i (u_i)^T \mathbb{A} u_i = \sum_{l,m} \rho_{ml} A_{lm} = \text{Tr}(\rho \mathbb{A}), \quad (19)$$

与 $p_i = P(a_i|S)$ 相关。与知识状态 S 相关联的密度矩阵 ρ 定义为

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i u_i u_i^T. \quad (20)$$

这是一个恰当定义的密度矩阵，因为 p_i 是离散命题的概率，非负且总和为 1。我们可以看到，在每一个系统中，我们都可以将其属性的期望值写为方程 (19) 中的二次形式，并导致非交换算符。可以被认为是脆弱的系统。

6 结论

我们已经证明，具有离散性质的脆弱系统可以用真正的量子理论进行分析，包括非交换算符¹⁸和在复希尔伯特空间中的密度矩阵形式。由于贝叶斯信念程度受到推理规则的限制，而贝叶斯主义的一个目标是寻找将信息转化为概率分配的方法¹⁹，另一方面，关于量子系统的任何主观知识状态都可以用一个密度算符 ρ 来概括。换句话说，量子系统测量结果的概率可以表示为密度算符和对应于执行的测量的投影算符乘积的迹。

我们的推导表明，有可能将量子理论的大部分内容，如果不是全部的话，归结为一个公理：系统在被测量时会受到扰动。这一见解可能有助于开发隐变量理论中违反贝尔定理的必要或充分条件。事实上，目标是描述随着观察而改变的系統，在这个意义上，量子力学是该理论的一个特例，因此我们的框架不依赖于所研究现象的尺度。

这不仅为自然界似乎可以用量子理论来描述这一事实提供了强有力的概率论依据，而且还开启了利用量子理论结构作为推理工具的可能性，应用于物理学之外的脆弱系统问题中，如生物学、数据分析²⁰、动态系统¹¹等其他领域。例如，在自创生系统²¹具有自我修改特性的情况下，可以将此工具应用到生物模型中。还有另一个有趣的可能性是将我们的结果作为量子认知⁸这一新理念的形式化依据，在这个理念中，研究对象是人类逻辑和决策，以及在行为心理学领域，通过观察个体自身来改变其行为。

A 获得线性变换矩阵 $\mathbb{T}_A$

我们将基函数 $\{\phi_i\}$ 引入方程 7，因此我们可以将方程 1 写作

$$\sum_{j=1}^n w_j \phi_j(\lambda') = \int d\lambda \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A). \quad (21)$$

将方程 21 的两边乘以 $\phi_k(\lambda')$ 并在 λ' 上积分，我们得到

$$\sum_{j=1}^n w_j \int d\lambda' \phi_j(\lambda') \phi_k(\lambda') = \sum_{i=1}^n v_i \int d\lambda d\lambda' \phi_i(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A) \phi_k(\lambda'). \quad (22)$$

现在，使用正交归一性条件（公式 9），公式 22 的左侧简化为

$$\sum_{j=1}^n w_j \int d\lambda' \phi_j(\lambda') \phi_k(\lambda') = w_k, \quad (23)$$

然后可以写成如下形式，

$$w_k = \sum_{i=1}^n v_i \int d\lambda d\lambda' \phi_i(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A) \phi_k(\lambda'). \quad (24)$$

定义矩阵元素 $\mathbb{T}_A$ 为

$$T_{ij}^{(A)} = \int d\lambda d\lambda' \phi_i(\lambda') P(\lambda'|\lambda, A) \phi_j(\lambda), \quad (25)$$

我们可以轻易地得到与方程 1 对应的矩阵方程，即

$$w_k = \sum_{i=1}^n T_{ki}^{(A)} v_i. \quad (26)$$

B 矩阵的特征值方程 $\mathbb{A}$

对于此，我们使用数量：

$$Q(\lambda') := \int d\lambda R_A(\lambda) P(\lambda|S) P(\lambda'|\lambda, A), \quad (27)$$

使得对于 $S = a_k$, $P(\lambda|S) = P(\lambda|a_k) = g_k(\lambda)$ 。根据公式 4，如果 $R_A(\lambda) \neq a_k$ ，则 λ 的概率为零。考虑到这一点，我们看到对于 $P(\lambda|S) = g_k(\lambda)$ 必须满足

$$Q(\lambda') = a_k \int d\lambda g_k(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A) = a_k g_k(\lambda'), \quad (28)$$

基于方程的不动点，其中第二个等式是因为公式 5。最后，公式 27 给出了

$$a_k g_k(\lambda') = \int d\lambda R_A(\lambda) g_k(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A). \quad (29)$$

此时我们可以将 g_k 用基底 $\{\phi_i\}$ 在两边表示，得到

$$a_k \sum_{l=1}^n u_l \phi_l(\lambda') = \sum_{j=1}^n u_j \int d\lambda R_A(\lambda) \phi_j(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A). \quad (30)$$

其中

$$g_k(\lambda) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(\lambda). \quad (31)$$

将两边乘以 $\phi_i(\lambda')$ 并在 λ' 上积分，我们得到

$$\int d\lambda' a_k \sum_{l=1}^n u_l \phi_l(\lambda') \phi_i(\lambda') = \int d\lambda' \sum_{j=1}^n u_j \int d\lambda R_A(\lambda) \phi_j(\lambda) P(\lambda'|\lambda, A) \phi_i(\lambda'), \quad (32)$$

因此， A_{ij} 的元素由以下给出：

$$A_{ij} = \int d\lambda d\lambda' R_A(\lambda) \phi_i(\lambda') P(\lambda'|\lambda, A) \phi_j(\lambda), \quad (33)$$

并且在左侧使用正交性之后，我们可以最终得到本征值问题

$$\mathbb{A} \cdot u_i = a_i u_i. \quad (34)$$

References

1. Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47**, 777–780 (1935).
2. Bell, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* **1**, 195–200 (1964).
3. Hensen, B., Bernien, H., Dréau, A. E. & et al, A. R. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometers. *Nature* **526**, 682 (2015).
4. Genovese, M. Research on hidden variable theories: A review of recent progresses. *Phys. Rep.* **413**, 319–396 (2005).
5. Albert, D. Z. *Quantum Mechanics and Experience* (Harvard Up, 1992).
6. Bohm, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
7. Redhead, M. Incompleteness, non locality and realism. a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics. *Revue Philos. de la France Et de l'Etranger* **180**, 712–713 (1987).
8. Trueblood, J. S. & Busemeyer, J. R. A quantum probability account of order effects in inference. *Cogn. Sci.* **35**, 1518–1552 (2011).
9. Ciliberto, C. et al. Quantum machine learning: a classical perspective. *Proc. Royal Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **474**, 20170551 (2018).
10. Congedo, M. *EEG Source Analysis*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble (2013).
11. Bush, J. W. M. Pilot-wave hydrodynamics. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **47**, 269–292 (2015).
12. Bush, J. W. M. & Oza, A. U. Hydrodynamic quantum analogs. *Reports on Prog. Phys.* **84**, 017001 (2020).
13. Navarrete, Y. & Davis, S. Quantum mutual information, fragile systems and emergence. *Entropy* **24**, 1676 (2022).
14. Sivia, D. S. & Skilling, J. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial* (Oxford University Press, 2006).
15. Horn, R. A. & Johnson, C. R. *Matrix Analysis* (Cambridge University Press, 1990).
16. von Neumann, J. *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, 1955).
17. Mathai, A. M. & Provost, S. B. *Quadratic forms in random variables* (Taylor and Francis, 1992).
18. Navarrete, Y. & Davis, S. Non-commutative Bayesian expectation and its connection to quantum theory. *AIP Conf. Proc.* **2731**, 050005 (2023).
19. Caves, C. M., Fuchs, C. A. & Schack, R. Quantum probabilities as Bayesian probabilities. *Phys. Rev. A* **65**, 022305 (2002).
20. Warmuth, M. K. & Kuzmin, D. Bayesian generalized probability calculus for density matrices. *Mach. Learn.* **78**, 63–101 (2009).
21. Varela, F., Maturana, H. & Uribe, R. Autopoiesis: The organization of living systems, its characterization and a model. *Biosystems* **5**, 187–196 (1974).

致谢

作者衷心感谢 ANID FONDECYT 1220651 的资金支持。