凸面上的共轭轨迹

Thomas Waters

摘要. 点在表面上的共轭轨迹是从此点径向发出的测地线包络。在这篇论文中，我们展示了凸面上一般点的共轭轨迹满足旋转指数和尖点数量之间的简单关系。作为结果，我们证明了"四尖点定理"：凸面上一般点的共轭轨迹必须至少有四个尖点。在过程中，我们还证明了一些关于平面上的渐屈线和测地曲率的结果。（注：这是原始论文的修正版，请参阅第 5 页的评论和附录 B）。

1. 介绍

共轭位形是微分几何中的一个经典课题（参见 Jacobi[14]，Poincaré[20]，Blaschke[3] 和 Myers[19]）最近由于 Itoh 和 Kiyohara[11] 对著名 Jacobi 最后几何陈述的证明（图 5figure.5，另见 [12]，[13]，[22]）以及有趣应用的最新发展而再次引起兴趣（例如 [25]，[26]，[4]，[5]）。作者最近的工作 [28] 展示了，随着基点在表面上移动时，共轭轨迹可能会自发地生成或湮灭一对尖点；特别是当两个新的尖点被创建时，也会有一个特定类型的"环路"，这表明尖点的数量和环路的数量之间存在某种关系。当前的工作将进一步探讨这一主题，主要结果是：

Theorem 3. *令 $\mathcal{S}$ 为一个光滑严格凸的曲面，并令 p 为 $\mathcal{S}$ 中的一个典型点。然后 p 的共轭轨迹满足*

$$i = (n-2)/2, \tag{1}$$

，其中 i 是共轭轨迹在 $\mathcal{S}/p$ 中的旋转指标，n 是尖点的数量。

我们将更精确地说明我们所说的"通用"和"旋转指标"的含义在接下来的部分中。值得注意的是，旋转指标的主要兴趣在于，对于规则曲线，i

在规则同伦 [29] 下是不变的；然而一般的包络线不是规则曲线。尽管如此，旋转指标给了我们一种对“拓扑”的感知，参见例如 Arnol'd 的 [1]（如果读者希望我们可以执行一个在尖点附近的“平滑”操作以使包络成为规则的，请参见 [17]）。这个公式对共轭点位施加了限制，特别是我们用它来证明所谓的“四尖定理”。

Theorem 4. *设 $\mathcal{S}$ 是一个光滑的严格凸表面，令 p 是 $\mathcal{S}$ 中的一个普通点。p 的共轭轨迹至少有 4 个尖点。*

本文的一个中心主题是凸面上的共轭点集与简单凸平面曲线的渐屈线之间的类比；在第 2 节中，我们专注于后者并证明了一些与旋转指数相关的结果。在第 3 节中，我们将关注共轭点集，在一些定义之后，我们证明了定理 3thm.3和 4thm.4并推导出了共轭点集的测地曲率公式。据我们所知，定理 1-3 是新的，并且第 3 节中的测地曲率表达式也是新的。定理 4thm.4的证明是全新的，不涉及割点集，并且在第 3 节中定义的“计数”是对 [9] 中一些思想的发展。全文中，$'$ 将表示关于参数的导数。

2. 平面凸曲线的渐伸线

令 $\boldsymbol{\gamma}$ 是一个“平面卵形”，我们指的是一个简单的光滑（C^∞）严格凸的平面曲线（为了定向，我们将 $\boldsymbol{\gamma}$ 的有符号曲率 k_γ 取为负值，请参见下文和图 1figure.1），并令 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的渐屈线（即与 $\boldsymbol{\gamma}$ 正交的直线族的包络，也称为焦散曲线）。渐屈线具有以下众所周知的性质（见 Bruce 和 Giblin 的 [6] 或 Tabachnikov 的 [9]）：$\boldsymbol{\beta}$ 将是一个闭合有界曲线（因为 $k_\gamma \neq 0$）；$\boldsymbol{\beta}$ 由偶数个平滑的“弧”组成，这些弧被对应于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的顶点的尖点分开（如果 $\boldsymbol{\gamma}$ 的顶点是简单的，则为普通尖点）；且 $\boldsymbol{\beta}$ 局部凸，即对于每个规则的 $q \in \boldsymbol{\beta}$，在 $\boldsymbol{\beta}$ 处有一个邻域完全位于 $\boldsymbol{\beta}$ 在 q 的切线的一侧。

2.1. 旋转指数

我们使用局部凸性来定义在 $\boldsymbol{\beta}$ 上的“标准”方向如下：在任何正则点处，沿着 $\boldsymbol{\beta}$ 移动，使得切线位于 $\boldsymbol{\beta}$ 的左侧（改变定义但保持惠特尼 [29] 的意义，见图 1figure.1中的黑箭头）。注意这意味着 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向与 $\boldsymbol{\beta}$ 相反。执行一圈 $\boldsymbol{\beta}$ 后，切向量将逆时针旋转一个 2π 的整数倍；我们将这称为 $\boldsymbol{\beta}$ 的旋转指标 i（在尖点处，切向量旋转 $+\pi$，参见 DoCarmo[7]）。备注：我们使

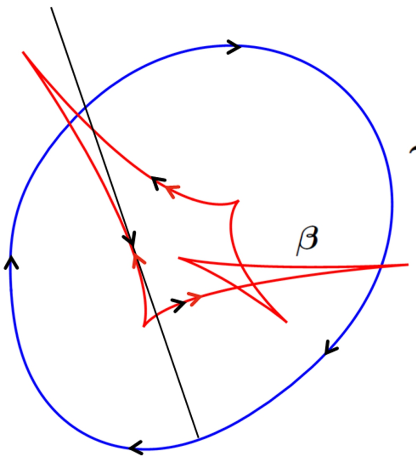

图 1. γ（蓝色）和 $\boldsymbol{\beta}$（红色）在文本中定义的方向。

用术语“旋转指标”以符合 [7],[16],[17]，然而有些作者使用“指标”[1]，“旋转数”[29],[9]，“绕转数”[18],[24] 或“转向数”[2]。

Lemma 1. 一段 γ 在两个顶点之间及其对应的 $\boldsymbol{\beta}$ 的弧具有大小相等但符号相反的总曲率。

证明. 通过“总曲率”我们指的是带符号曲率的弧长积分。设 s 和 σ 分别为 γ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的弧长参数。众所周知，[24] 如果 $R = R(s)$ 是 γ 的曲率半径，则 $\boldsymbol{\beta}$ 的曲率为 $k_\beta = -1/(RR')$ 和 $d\boldsymbol{\beta}/ds = R'\boldsymbol{N}$ 其中 $\boldsymbol{N}$ 是 γ 的单位法向量。因此

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} k_\beta d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{-1}{RR'}\right) R' ds = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{R} ds = -\int_{s_1}^{s_2} k_\gamma ds.$$

□

Theorem 1. 令 γ 为一平面卵形线，$\boldsymbol{\beta}$ 为其渐屈线。$\boldsymbol{\beta}$ 的旋转指数，记为 i，由

$$i = (n-2)/2$$

给出，其中 n 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 的尖点数（或 γ 的顶点数）。

证明. $\boldsymbol{\beta}$ 的旋转指数由 $2\pi i = \int d\phi$ 定义，其中 ϕ 是单位切向量相对于 $\boldsymbol{\beta}$ 形成的角度。某个固定方向，从而

$$2\pi i = \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} k_\beta d\sigma + n\pi$$

，其中 j 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的 n 光滑弧段求和，而 $\boldsymbol{\beta}$ 的 n 角点位于 σ_j。从引理 1 可知，右边的第一项就是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的总曲率，因为 $\boldsymbol{\gamma}$ 是简单、光滑且与 $\boldsymbol{\beta}$ 方向相反的，所以它是 -2π。因此

$$2\pi i = -2\pi + n\pi \qquad \Longrightarrow \qquad i = (n-2)/2. \tag{2}$$

□

这个简单的公式对平面卵形曲线的渐屈线的形式施加了限制，例如如果渐屈线是简单的，则它只能有 4 个尖点（见图 6figure.6示例）。为了下一节的利益，我们将用更一般的术语重新表述这一结果：
想象一条与 $\boldsymbol{\beta}$ 相切的直线以平滑单调的方式沿着渐伸线滚动是有用的；这是由于光滑弧段的局部凸性和尖点的普通性相结合的结果。为了更精确地定义这一点，我们通过将指向 $\boldsymbol{\gamma}$ 的内法线沿法线移动到它与 $\boldsymbol{\beta}$ 相切的位置（见图 1figure.1中的红色箭头），来给 $\boldsymbol{\beta}$ 定义一个“交替”的方向，令 $\boldsymbol{t}$ 为该方向下 $\boldsymbol{\beta}$ 的 (单位) 切向量。由 $\boldsymbol{t}$ 定义的有向切线与某个固定方向形成一个角度 Φ，但重要的是，当我们沿着 $\boldsymbol{\beta}$ 移动时，这个角度以平滑且单调的方式变化。标准定向；事实上，在绕 $\boldsymbol{\beta}$ 一圈后它会改变 -2π (这是因为 Φ 简单地说就是法线与 $\boldsymbol{\gamma}$ 形成的角度，参见图 1figure.1；这种稍微夸张的描述在后面的章节中是必要的)。
$\boldsymbol{\beta}$ 的旋转指标由相对于标准方向的切向量定义。设 $\boldsymbol{T}$ 为这个（单位）切向量，ϕ 为它与固定方向之间的角度。由于在尖点处 $\delta\phi = \pi$，则

$$2\pi i = \sum_{j=1}^{n} (\delta\phi)_j + n\pi$$

其中 $(\delta\phi)_j$ 是第 j 个光滑弧段上的变化。在弧段上，当 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$ 然后是 $\delta\phi = \delta\Phi$，以及在弧段上，当 $\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{t}$ 然后是 $\phi = \Phi + \pi$，所以再次出现 $\delta\phi = \delta\Phi$。因此，

$$2\pi i = \sum_{j=1}^{n} (\delta\Phi)_j + n\pi = -2\pi + n\pi \qquad \Longrightarrow \qquad i = (n-2)/2.$$

实际上这是更一般的情况，在不存在任何生成曲线 $\boldsymbol{\gamma}$ 或局部凸性（对于点 2 需要一些注意而没有 $\boldsymbol{\gamma}$）的情况下：

Theorem 2. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 是一个具有以下性质的闭合有界分段光滑平面曲线：

1. $\boldsymbol{\beta}$ 具有由 n 个普通尖点分隔的偶数个光滑弧。

2. 交替定向切线在相对于标准定向遍历 $\boldsymbol{\beta}$ 时完成一次顺时针旋转。

则 $\boldsymbol{\beta}$ 的旋转指数满足 $i=(n-2)/2$。

恰好，平面卵形的渐屈线满足这些条件。实际上我们可以将其推广到具有 $k_\gamma \neq 0$ 的平面曲线的渐屈线，这些是不简单的：术语 $\sum(\delta\phi)_j$ 仅仅是垂直于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的法线的旋转，所以如果 I 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的旋绕数，则

$$i=(n+2I)/2。\tag{3}$$

例如，考虑一个非简单蚶线的著名渐屈线，其中 $i=-1, I=-2, n=2$（参见附录中的图 6figure.6）。

读者注： 在本文的原始版本中，有一个标题为“没有光滑环路”的第 2.2 节，声称不可能存在相交的拐点的光滑弧段。与巴塞罗那自治大学的同事交流后（2025 年 3 月），证明了这些声明是错误的。更多细节，包括对“没有光滑环路”声明的反例，在附录 B 中给出，但请注意这不影响本节和下一节中的其他结果的有效性。

---

3. 共轭轨迹

令 $\mathcal{S}$ 为一个光滑的严格凸曲面，令 p 为 $\mathcal{S}$ 中的一点。p 在 $\mathcal{S}$ 中的共轭轨迹，记为 C_p，是源自 p 的测地线的包络；换句话说，C_p 是沿从 p 径向发出的所有测地线上与 p 共轭的所有点的集合。我们选择 $\mathcal{S}$ 为严格凸的，因此从 p 发出的所有测地线在有限距离内都会达到与 p 共轭的点；确实，如果 K 是 $\mathcal{S}$ 的高斯曲率，则（使用斯特姆比较定理，见 [3],[15]）共轭点必须在不早于 $\pi/\sqrt{K_{max}}$ 且不晚于 $\pi/\sqrt{K_{min}}$ 的地方被达到（相对于最大/最小值）。$\mathcal{S}$ 作为一个整体。遵循 Myers 的 [19]，我们做出以下定义：在 $T_p\mathcal{S}$ 中固定一个方向，径向测地线在 p 处的（单位）切向量与这个方向形成角度 ψ，并且这条径向测地线在一个距离 R 之后达到共轭点。我们将 $R=R(\psi)$ 称为“距离函数”（另一个术语是“焦点半径”，见 [25]），它在 $T_p\mathcal{S}$ 中定义的极曲线称为“距离曲线”（参见图 2figure.2）。距离曲线位于半径为 $(\pi/\sqrt{K_{max}}, \pi/\sqrt{K_{min}})$ 的圆环内，并且是一条光滑闭合曲线（相

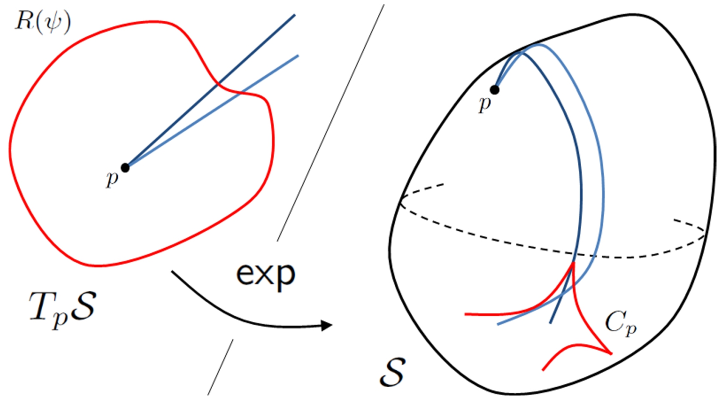

图 2. $T_p\mathcal{S}$ 中的距离曲线及其在指数映射下的 $\mathcal{S}$ 中的图像：p 和 C_p 的共轭轨迹。

对于 p 是星形的)；这条曲线的指数映射（即共轭点集）是尖点状的（参见图 2figure.2)。

关于点 p 的共轭位置，以下事实是众所周知的（例如参见 [8] 或 [28])：设 $\mathbf{\Gamma}_\psi(s)$ 为单位速度测地线，$\mathbf{\Gamma}_\psi(0) = p$ 和 $\mathbf{\Gamma}'_\psi(0)$ 形成一个相对于的角度 ψ。在 $T_p\mathcal{S}$ 中的一些固定方向上，我们定义指数映射为 $X : T_p\mathcal{S} \to \mathcal{S} : X(s,\psi) = \mathbf{\Gamma}_\psi(s)$。雅可比场 $\boldsymbol{J} = \partial X/\partial\psi$ 满足雅可比方程，我们可以将其写成标量形式如下（一般来说一切依赖于 s,ψ，但为了简洁起见我们仅在必要时标注函数依赖关系)：令 $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N})$ 为单位切向量且垂直于 $\mathbf{\Gamma}_\psi(s)$，我们写出 $\boldsymbol{J} = \xi\boldsymbol{N} + \eta\boldsymbol{T}$，并且可以不失一般性地取 $\eta = 0$。(见 [28])；然后 ξ 满足标量 Jacobi 方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} + K\xi = 0 \tag{4}$$

其中 K 沿径向测地线评估，偏导数强调 Jacobi 场沿径向测地线变化，也从一个径向测地线到另一个发生变化。初始条件为 $\xi(0,\psi) = 0, \xi_{,s}(0,\psi) = 1$ 时，ξ 的第一个非平凡零点与 p 共轭。因此，距离曲线由 $\xi(R(\psi),\psi) = 0$ 隐式定义，在 $\mathcal{S}$ 中的共轭轨迹是 $X(R(\psi),\psi)$。令 $\boldsymbol{\beta}(\psi) : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{S}$ 表示这个参数化 C_p，则

$$\boldsymbol{\beta}' = R'(\psi)\boldsymbol{T}(R(\psi),\psi). \tag{5}$$

当 R 稳定时，$\boldsymbol{\beta}$ 不是正则的，它有一个尖点（见图 2figure.2)。

值得注意的是，最后一个表达式告诉我们以下内容：R 是 C_p 的弧长参数；C_p 的一段弧的长度仅仅是连续两个驻点值之间 R 的差，并且因为 R 生

存在一个圆环中，这可以限定 C_p 的总长度；如果我们给 C_p 赋予交替符号的长度，则其总长度为零；最后，“字符串”构造的渐屈线扩展到共轭轨迹（在 ψ_1 沿切向测地线移动一定距离 ρ，在 ψ_2 沿切向测地线移动距离 $\rho + R(\psi_2) - R(\psi_1)$；对于某些 ρ，渐屈线将是一个点，p）。

3.1. 旋转指数

在 [28] 中，作者通过考虑指数映射的高阶导数推导出了共轭点集局部结构的一个表达式，这里我们重现该公式：设 q 是对应于 $\psi = \psi_0$ 的共轭点集上的一个点，并假设 R 在 ψ_0 处有一个 A_l 奇异性，这意味着 R 的前 l 个导数消失但第 $(l+1)$ 个导数不消失。然后在共轭轨迹参数化中，主导行为在 $\psi = \psi_0 + \delta\psi$ 处是

$$\boldsymbol{T}\left[R^{(l+1)}\frac{\delta\psi^{l+1}}{(l+1)!} + \dots\right] + \boldsymbol{N}\left[(l+1)R^{(l+1)}\xi_{\_,}s\frac{\delta\psi^{l+2}}{(l+2)!} + \dots\right]. \quad (6)$$

我们将回到 $\xi_{,s}$ 项，当我们查看 C_p 的测地曲率时（参见 (7equation.7)），目前我们只需要 $\xi_{,s} < 0$。从这个表达式中我们可以看到如果 $R' \neq 0$（即一个 A_0 奇点的 (R) 那么局部地 C_p 是朝向 $\boldsymbol{N}$ 开口的抛物线 如果 $R' < 0$ 和 $-\boldsymbol{N}$ 如果 $R' > 0$(即在正则点处 C_p 是局部凸的)，并且如果 $R' = 0$（但 $R'' \neq 0$，一个 A_1 奇点）那么 C_p 有一个普通的（半立方抛物线）尖点。我们将点 p 在 $\mathcal{S}$ 中描述为“通用的”，如果距离函数 R 至多有 A_1 个奇点。

众所周知，曲面上曲线的旋转指数可以通过该曲面坐标补丁中其原像的旋转指数来定义，实际上 Hopf 的 umlaufsatz 正是这样做的（参见 [7] 或 [17]）。同样众所周知，在正则同伦的意义下，球面上的每条闭曲线的旋转指数为 0 或 1[18]。为了我们的目的，这丢失了太多关于曲线的信息，因此（跟随 Arnol'd[1] 的定义）我们将共轭点集的旋转指数 C_p 定义为在去掉点 p 的曲面 $\mathcal{S}$ 上的旋转指数，这等同于将曲线投影到平面上并找出该曲线的旋转指数；我们将基本上证明这个投影后的曲线满足定理 2thm.2。

冒着让读者困惑的风险，我们将 $\boldsymbol{\beta}$ 如下定向：在 $q \in \boldsymbol{\beta}$ 处，我们以这样的方式移动，使得从 p 出发的径向测地线，其共轭点位于 q，相对于 $\boldsymbol{\beta}$ 在右侧。$\mathcal{S}$ 的外法线（这利用了 $\boldsymbol{\beta}$ 的局部凸性；或者，当从上方观察 p 时，ψ 在顺时针方向上增加，参见图 5figure.5）；这样投影曲线的方向就与前一节一致，并且椭球体上的 C_p 具有 $i = 1$。此外，如果从 p 出发的径向测地线在 q 处有共轭点，我们将把部分 $[p, q]$ 称为“测地线段”。

Theorem 3. 令 $\mathcal{S}$ 为一个光滑严格凸曲面，并且令 p 为 $\mathcal{S}$ 中的一个典型点。然后，p 的共轭轨迹满足 $i=(n-2)/2$，其中 i 是共轭轨迹在 $\mathcal{S}/p$ 中的旋转指数，而 n 是尖点的数量。

证明. 我们已经知道了一般点 p 在 $\mathcal{S}$ 中的共轭轨迹的局部结构：由普通尖点分隔的光滑弧。令 Π 是如下定义的投影：从 p 径向投射到与 p 处平行的 $\mathcal{S}$ 的唯一支撑平面。由于 $\mathcal{S}$ 是光滑且凸的，这个投影 $\Pi:\mathcal{S}/p\to\mathbb{R}^2$ 是一个同胚。令 $\boldsymbol{\alpha}=\Pi(\boldsymbol{\beta})$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一条由普通尖点隔开的具有偶数个光滑弧段的分段光滑曲线。如果，在完成一圈 $\boldsymbol{\alpha}$ 后，切线转过 $2\pi I$，那么根据第 2 节我们有 $i=(n+2I)/2$，其中 i 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的旋转指数（因此也是 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\mathcal{S}/p$ 中的旋转指数），而 n 是到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的尖点数（同时也是 $\boldsymbol{\beta}$ 的）。唯一剩下要证明的是 $I=-1$。

设 C_ϵ 是以 p 为中心，半径为 ϵ 的 $\mathcal{S}$ 中的一个小测地圆。$\Pi(C_\epsilon)$ 将是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单曲线，它随着 $\epsilon\to 0$ 逼近一个（大的）圆。在 Π 下的测地线段的投影给出了一条在 $\mathbb{R}^2$ 中的半无限曲线，该曲线在一个唯一的点处与 $\Pi(C_\epsilon)$ 相交。对于每个 $q\in\boldsymbol{\beta}$，我们将 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^2$ 在 $q'=\Pi(q)$ 处的切线与 $\Pi(C_\epsilon)$ 和投影测地线段 $[p,q]$ 的交点识别为同一点。此识别是一对一且连续的，因为在绕 p 旋转时我们只遍历一次 $\Pi(C_\epsilon)$，因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 的切线旋转了一次，从而得到 $I=\pm 1$。一个简单的图表将显示带有先前定义的方向的 $I=-1$。

□

这个定理的一个直接推论将是证明雅可比最后几何陈述的另一种途径：如果我们能够表明椭球面上任意一点的共轭点集具有旋转指标 1，那么必定恰好有 4 个尖点。

3.2. 计数线段

在本节中，我们将描述一种将正整数分配给 $\mathcal{S}$ 的区域（发展 [24] 中的思想）的方法，以便为计算 C_p 的旋转指数提供一个方便的计算方法。我们将使用这一点以及前一节的结果来证明“四尖点定理”：凸表面上一点的共轭轨迹必须至少有 4 个尖点。在脚注中，Myers[19] 提到了 Blaschke[3]（用德语），而后者则将此证明归功于 Carathéodory（另见 [10] 的第 206 页）。我们在 $\mathcal{S}$ 中 $\boldsymbol{\beta}$ 的补集上定义以下内容（我们将这称为“计数”）：

$$m(o):\mathcal{S}/\{\boldsymbol{\beta}\cup p\}\to\mathbb{N}/0$$

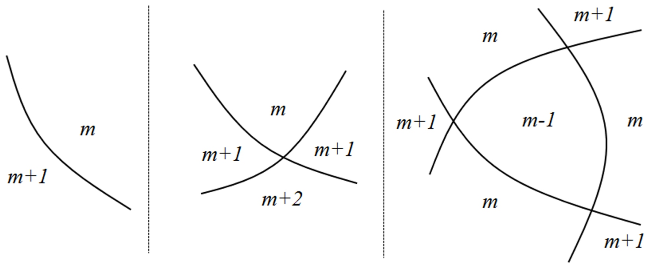

图 3. ‘计数’ 从一个 $\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$ 的组件传递到另一个时如何变化。

是通过点 $o\in\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$ 的测地线段的数量（我们还排除了 p，因为在那里的计数是无穷大）。计数在每个 $\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$ 的分量上是常数，它从不等于零（见 [19]），它在包含 p 的 $\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$ 的分量中等于 1（参见图 4figure.4和 5figure.5 的示例），并且在前一子节的投影下保持不变。当 o 从 $\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$（或 $\mathbb{R}^2/\boldsymbol{\alpha}$）的一个区域移动到另一个区域时，计数会按照图 3figure.3中所示的规则发生变化；我们从 (6equation.6) 中描述的 $\boldsymbol{\beta}$ 的局部凸结构中得知这一点。
我们注意到另一种定义计数的方法：距离曲线内部的指数映射将覆盖 $\mathcal{S}$，并且一些点会被覆盖多次；一个点 $o\in\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$ 被此映射覆盖的次数是 $m(o)$。这种替代表述可能在高斯-博内类型的构造 [21] 中是有用的。
我们可以使用计数来描述麦克因太尔和凯恩斯提出的计算 $\boldsymbol{\beta}$ 的旋转指数的方法 [18]。在他们的论文中，他们证明了以下内容（我们已将他们的陈述调整以适应当前情况）：

定理 1 (麦金特里和凯尔斯). 将每个区域编号为 $\mathcal{S}/\boldsymbol{\beta}$ 的计数，令 S_m 为编号为 $\geq m$ 的区域的闭包的并集，并且 χ_m 是 S_m 的欧拉特征。然后 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\mathcal{S}/p$ 中的旋转指数是

$$i=\sum_{m\geq 2}\chi_m.$$

图 4figure.4中的示例是典型的：区域 S_m 通常是圆盘或不相交的圆盘并集，因此其欧拉特征数为 ≥ 1。如果是这种情况，旋转指数将是 ≥ 1，因此通过定理 3thm.3，n 不能是 2。然而，也有可能 S_m 是圆盘减去圆盘，即，它们可能有“孔”。

Lemma 2. 对于区域 S_m 中的每一个孔，都存在一个圆盘。

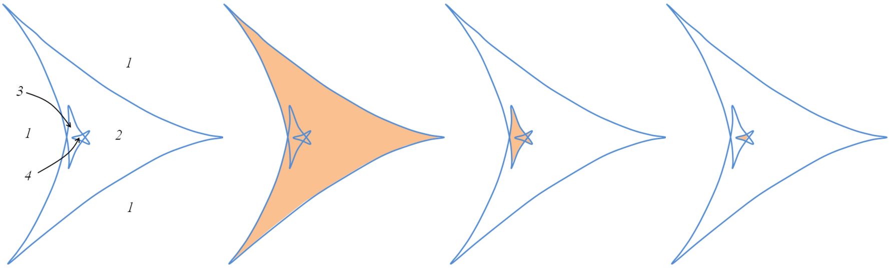

图 4. 最左边是一个典型的共轭点集（取自 [28]），某些区域中标记了数量；然后是被阴影覆盖的 S_2, S_3 和 S_4，每个都是圆盘且具有欧拉特征数 1。因此旋转指数为 3，曲线如预期有 8 个尖点。

证明. 假设有一个区域 S_m，其中有一个孔；孔内的计数必须是 $m-1$（参见图 3figure.3右侧的示例）。孔的边界必须包含 $\boldsymbol{\beta}$ 的自交点，因为 $\boldsymbol{\beta}$ 是连通的，并且内部相对于内部的任何点都是星形的，这是由于 $\boldsymbol{\beta}$ 的局部凸性。如果存在自交点，则必须有一个子区域 S_m 具有计数 $m+1$。这个区域要么是一个圆盘，这种情况下我们就完成了任务，要么它也有一个孔。如果它有一个孔，那么应用相同的推理还必须存在一个具有计数 $m+2$ 的区域，等等。最终必须存在一个没有孔的区域，这就是我们所需要的圆盘。 $\square$

Theorem 4. *令 $\mathcal{S}$ 是一个光滑严格凸曲面，令 p 是 $\mathcal{S}$ 中的一个一般点。p 的共轭点集必须至少有 4 个尖点。*

证明. 根据定理 3thm.3，我们必须排除 $\boldsymbol{\beta}$ 具有旋转指数为 0 的情况（如果 p 是典型的，则 R 必须具有偶数且非零的驻点数量，这排除了 $n = 0, 1, 3$）。但是根据引理 3，区域 S_m 的欧拉特征和必须是 ≥ 1，因此旋转指数不能为 0，并且尖点的数量不能为 2。 $\square$

3.3. 测地曲率

鉴于这一点与讨论相关，但似乎在文献中缺失，我们推导出伴随点的测地曲率表达式。回忆从 (5equation.5) 可知，$\boldsymbol{\beta}(\psi)$ 的单位切向量是 $\boldsymbol{T}(R(\psi),\psi) = \frac{\partial X}{\partial s}(R(\psi),\psi)$，因此 ψ 导数是

$$\frac{D}{d\psi}\boldsymbol{T}(R(\psi),\psi) = \frac{D\boldsymbol{T}}{\partial s}R' + \frac{D}{\partial\psi}\frac{\partial X}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial\psi} = \frac{D}{\partial s}\boldsymbol{J}$$

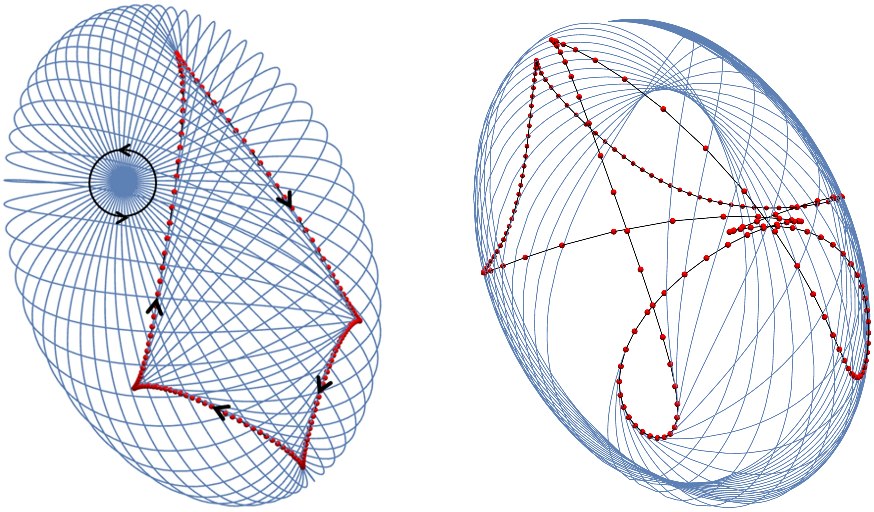

图 5. 示例的 C_p^1（左）和 C_p^3（右）在三轴椭球体上。请注意左侧由 Itoh Kiyohara 定理预测的四个尖点，以及右侧的平滑环路。蓝色线条是测地线，黑色线条是共轭轨迹，红色圆点是共轭点。

，因为根据测地线的定义 $D\boldsymbol{T}/\partial s = 0$。如果 $\boldsymbol{J} = \xi\boldsymbol{N}$，则 $D\boldsymbol{J}/\partial s = \xi_{,s}\boldsymbol{N}$。现在令 σ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的弧长，测地曲率 [16] 的 Frenet 方程给出

$$\frac{D}{d\sigma}\boldsymbol{T} = \frac{d\psi}{d\sigma}\frac{D}{d\psi}\boldsymbol{T} = \frac{1}{R'}\xi_{,s}\boldsymbol{N} = k_g\boldsymbol{N}$$

，从而有

$$k\_g(\psi) = \frac{\xi_{,s}(R(\psi),\psi)}{R'(\psi)}。 \tag{7}$$

这解释了 $\xi_{,s}$ 项在 (6equation.6) 中的出现。我们注意到 $\xi_{,s}(R(\psi),\psi)$ 永不为零（因此 k_g 也永不为零）：由于 R 是由 $\xi(R(\psi),\psi) = 0$ 定义的，那么 $\xi_{,s}(R(\psi),\psi) = 0$ 和 Jacobi 方程 (4equation.4) 将会暗示 $\xi \equiv 0$。由于 $\xi_{,s}(0,\psi) = 1$ 和 $s = R(\psi)$ 是 ξ 的首先非平凡零点，我们有 $\xi_{,s}(R(\psi),\psi) < 0$。该公式同样适用于 C_p^j（j 共轭点的轨迹至 p）如果我们简单地将 R 调整为 j 的非平凡零点 ξ（注意 $\xi_{,s}$ 的符号将从 C_p^j 交替到 C_p^{j+1}）。另一表达式通过关于 ψ 对 $\boldsymbol{J}(R(\psi),\psi) = 0$ 进行微分而得到（参见 [25] 中的“焦点微分方程”）给出 $k_g = -\xi_2(R(\psi),\psi)/(R')^2$（参见 [28] 以获取 ξ_2 的定义）。注意 k_g 在 (7equation.7) 中的符号取决于 R 在弧度 C_p 上是递减还是递增，从而在正负之间交替；而根据定理 3thm.3前面定义的方向，在第 3.1

节中 k_g 严格为正；这是因为 (7equation.7) 是相对于径向测地线的切线定义了 C_p 上的一个交替定向，类似于第 2.1 节中描述的情况。
虽然在 (7equation.7) 中，当 R 静止时测地曲率发散（正如我们已经知道的），总曲率

$$\int k_g d\sigma = \int \left(\frac{\xi_{,s}}{R'}\right) R' d\psi = \int \xi_{,s}(R(\psi), \psi) d\psi$$

并不依赖于 R。在球面 $\xi_{,s}(R(\psi), \psi) = -1$ 上，因此在一个扰动的球面上，我们可能会期望共轭轨迹的一段弧的总曲率接近于 R 为驻点时 ψ 值的差异，这暗示了 $\int k_g d\sigma$ 的一个上限。然而，远离球面时，共轭轨迹的弧似乎可以变得非常弯曲。

4. 结论

我们不能简单地绘制一条具有偶数个弧段和尖点的平面曲线并声称它是某个平面卵形线的渐屈线；存在几何（局部凸性，交替长度之和为零）和拓扑（旋转指数）上的限制，正如我们所展示的。同样，我们也展示了在光滑严格凸表面上的一般点的共轭位形的几何与拓扑上也存在限制，并且这些限制导致可以被利用的结构。
本文中的结果有许多值得考虑的推广。我们已经提到过“更高”的共轭点集 C_p^j，可能存在一个公式来推广 (1equation.1)。此外，提醒读者，p 的共轭点集是与以 p 为中心的测地圆正交的测地线包络（在这种情况下，“焦散”这个词可能更合适）。对于小半径而言，测地圆是简单的，并且可能存在简单曲线在凸表面上的焦散也满足 (1equation.1) 的情况，而非简单曲线则导致 (3equation.3)（可能要求这些曲线自身具有 $k_g \neq 0$），然而初步实验表明这种情境出人意料地复杂。最后，我们仅考虑了凸表面，然而表达式如 (1equation.1) 很可能适用于具有 $K < 0$ 的球面，只要负高斯曲率区域不包含任何闭地线（例如，与“哑铃”形的 [23] 相比，球谐表面 [27]）。

References

[1] V. I. Arnol'd. The geometry of spherical curves and the algebra of quaternions. *Russian Math. Surveys*, 50(1):1–68, 1995.

[2] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry: manifolds, curves, and surfaces*. Springer-Verlag, 1988.

[3] W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie, I: Elementare Differentialgeometrie*. Springer, 1930.

[4] B. Bonnard and J.-B. Caillau. Geodesic flow of the averaged controlled Kepler equation. *Forum Mathematicum*, 21(5):797–814, 2009.

[5] B. Bonnard, J.-B. Caillau, R. Sinclair, and M. Tanaka. Conjugate and cut loci of a two-spere of revolution with application to optimal control. *Ann. Inst. Henri Poincaré (C)*, 26(4):1081–1098, 2009.

[6] J. W. Bruce and P. J. Giblin. *Curves and singularities*. Cambridge University Press, 1992.

[7] M. P. DoCarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[8] M. P. DoCarmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.

[9] D. Fuchs and S. Tabachnikov. *Mathematical Omnibus: thirty lectures on classic Mathematics*. American Mathematical Society, 2010.

[10] M. Georgiadou. *Constantin Carathéodory; mathematics and politics in turbulent times*. Springer, 2004.

[11] J.-I. Itoh and K. Kiyohara. The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids. *Manuscripta Mathematica*, 114(2):247–264, 2004.

[12] J.-I. Itoh and K. Kiyohara. The cut loci on ellipsoids and certain Liouville manifolds. *Asian J. Math.*, 14(2):257–290, 2010.

[13] J.-I. Itoh and K. Kiyohara. Cut loci and conjugate loci on Liouville surfaces. *Manuscripta Mathematica*, 136(1-2):115–141, 2011.

[14] C. G. J. Jacobi. *Vorlesungen über dynamik*. Gehalten an der Universität zu Königsberg im Wintersemester 1842-1843 und nach einem von C. W. Borchart ausgearbeiteten hefte. hrsg. von A. Clebsch.

[15] W. Klingenberg. *Riemannian Geometry*. De Gruyter, 1995.

[16] W. Kühnel. *Differential Geometry: curves - surfaces - manifolds*. American Mathematical Society, 2006.

[17] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature*. Springer-Verlag, 1997.

[18] M. McIntyre and G. Cairns. A new formula for winding number. *Geometriae Dedicata*, 46:149–160, 1993.

[19] S. B. Myers. Connections between differential geometry and topology, I: simply connected surfaces. *Duke Math. J.*, 1(3):376–391, 1935.

[20] H. Poincaré. Sur les lignes geodésiques des surfaces convexes. *Trans. Am. Math. Soc.*, 17:237–274, 1905.

[21] P. Røgen. Gauss-Bonnet's theorem and closed Frenet frames. *Geometriae Dedicata*, 73:295–315, 1998.

[22] R. Sinclair. On the last geometric statement of Jacobi. *Experimental Mathematics*, 12(4):477–485, 2003.

[23] R. Sinclair and M. Tanaka. The cut locus of a two-sphere of revolution and Toponogov's comparison theorem. *Tohoku Math. J.*, 59:379–399, 2007.

[24] S. Tabachnikov. *Geometry and Billiards.* American Mathematical Society, 2005.

[25] H. Thielhelm, A. Vais, D. Brandes, and F-E. Wolter. Connecting geodesics on smooth surfaces. *Vis. Comput.*, 28(6-8):529–539, 2012.

[26] H. Thielhelm, A. Vais, and F-E. Wolter. Geodesic bifurcation on smooth surfaces. *Vis. Comput.*, 31(2):187–204, 2015.

[27] T. J. Waters. Regular and irregular geodesics on spherical harmonic surfaces. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(5):543–552, 2012.

[28] T. J. Waters. Bifurcations of the conjugate locus. *Journal of Geometry and Physics*, 119:1–8, 2017.

[29] H. Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, 4:276–284, 1937.

附录 A. 额外的图表

附录 B. 光滑环路的存在性

在本文的原始版本中，声称一个平面卵形曲线的渐屈线不能有光滑的环，我们指的是两相邻尖点之间的弧与自身相交。为了证明这一点，声称一个 2π-周期函数，其傅里叶级数从第二谐波开始，在任何长度为 π 的区间内必须有一个零点。与巴塞罗那自治大学的 Bruna 教授、Cufi 和 Reventos 教授（2025 年 3 月）的通信表明这两个主张是错误的。

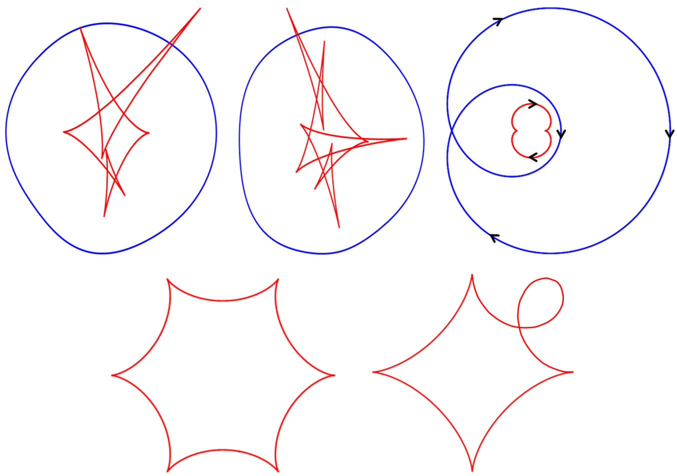

图 6. 顶部一行：平面曲线的渐屈线示例。图 1figure.1的左侧，以及上方的左中部分，分别按照 (2equation.2) 有 $(i,n)=(2,6),(3,8),(4,10)$；右侧则按照 (3equation.3) 有 $(i,n,I)=(-1,2,-2)$。底部一行：这些曲线不能是凸面上任意点的共轭轨迹，或是平面卵形线的渐屈线。

他们的方法是构造具有所需属性的分段函数作为支撑函数 [24]，然后将傅里叶级数拟合到这些函数上。例如，下面的

$$-7\cos(2t)+10\cos(4t)-\frac{4096}{105\pi}\sin(3t)+\frac{4096\sin(5t)}{315\pi}$$

是一个 2π-周期性函数，其傅里叶级数从第二个谐波开始，但所有四个零点都在区间 $(0,\pi)$ 内，因此在大于 π 的区间内没有零点，从而反驳了上述提到的第二项声明。

此外，如果我们取分段函数

$$\begin{cases} t+\frac{3}{4}\left(1-\sin\left(\frac{4}{3}t\right)\right)+40 & 0<t<\frac{3\pi}{2} \\ -3t+\frac{109}{108}\sin(4t)-\frac{7}{54}\sin(8t)+6\pi+\frac{3}{4}+40 & \frac{3\pi}{2}<t<2\pi \end{cases}$$

并为其拟合一个傅里叶级数（约 20 项），然后将此作为支持函数生成光滑的平面卵形及其相关的回转线，我们得到图 7figure.7中的曲线，从而推翻了第一个主张。

Thomas Waters

T. Waters, Department of Mathematics, University of Portsmouth, England PO13HF,
thomas.waters@port.ac.uk

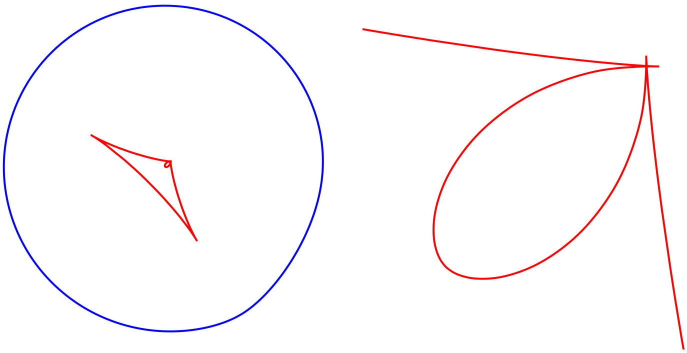

图 7. 左侧是一个光滑的（C^∞）闭合凸平面曲线及其渐屈线；右侧是放大后的视图，显示具有平滑环圈的渐屈线。