

关于正特征下的簇的 GROTHENDIECK 环

KIRTI JOSHI

摘要. 本文证明了两个定理 (1) 设 k 是一个特征为 $p > 0$ 的代数闭域。我证明 (Equation (2.1.1)) 如果 $p > 13$ 或 $p = 11$, 则任何超奇异椭圆曲线的同构类是光滑完整 k -簇和 Bittner 关系环中的零因子。特别是, 该环包含零因子。证明通过建立 (在 Equation (2.2.1) 中) Albanese 簇函子是一个 motivic 测度来进行。(2) 我在 Equation (3.1) 中证明了光滑、完备簇的 étale 基本群 (在任何特征下) 也提供了这一环上的一个 motives 度量。特别是, étale 基本群是复数上簇的 Grothendieck 环上的一个 motives 度量。

目录

1. 介绍	1
2. 第一条定理	3
2.1. 零因子的存在性	3
2.2. 阿尔贝内斯簇函子作为动机测度	3
2.3. 可用于证明 $\mathbb{L}$ 是零因子的关系 $K^0(\mathcal{V}_k)$	5
3. 第二个定理: étale 基本群是一个动机测度	5
References	6

1. 介绍

设 k 是一个特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 是在 k 上的簇的 Grothendieck 环。这是接下来的内容: 对于一个不可约簇 X/k , 记其 k -同构类为 $[X]$, 并考虑由 k -簇的同构类 $[X]$ 生成的自由交换群, 其中乘法定义为簇的乘积: $[X_1][X_2] = [X_1 \times X_2]$ 作为 k -簇的 X_1, X_2 。此构造提供了一个环, 在该环中 $[\emptyset] = 0$ 和 $[\mathrm{Spec}(k)] = 1$ 是乘法单位元。令 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 为由形式为 $[X - Y] = [X] - [Y]$ 的元素生成的理想商, 其中 $X \supseteq Y$ 是 X 的闭合 k -子簇。这使得 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 成为一个具有单位的交换环 (具有 $[\mathrm{Spec}(k)] = 1$), 参见 [Larsen and Lunts, 2001, Bittner] 了解该环的基本性质。

尽管定义的简洁性是 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 的一个最吸引人的特征, 但应该注意到这个环记住的代数几何远少于在代数几何入门课程中学到的内容。因此可以问, 在 k 上的代数几何的哪些部分被 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 记住了? 答案似乎远非简单。

我们还引入另一个相关的环, 记为 $K_{\mathrm{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$, 它是由光滑完备的 k -簇的同构类生成的, 乘法定义为其乘积, 并且关系是 $[\emptyset] = 0$ 和 $[\mathrm{Bl}_Y(X)] - [E] = [X] - [Y]$, 其中 $\mathrm{Bl}_Y(X)$ 是

沿光滑完备的 k -簇 $Y \subset X$ 吹胀光滑完备的 k -簇 X 的结果，而 E 是例外除子（在 [Bittner] 之后，这些关系被称为 Bittner 关系）。

在 [Bittner] 中显示了以下内容：

定理 1.1. 设 k 是一个特征为零的代数闭域。则存在一个自然同构

$$K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm}) \xrightarrow{\cong} K^0(\mathcal{V}_k)$$

由发送 $[X] \mapsto [X]$ 给出。

Equation (1.1) 的证明在 [Bittner] 中给出，如果已知 $\text{char}(k) = p > 0$ ，则该证明同样适用。特别是，若要证明该定理，需要知道弱分解定理对于 [Abramovich et al., 2002] 成立且对于 k 也成立，并且特别地，该定理的证明要求嵌入式奇点消解（参见 [Hironaka, 1964, Abhyankar, 1966]）在所有维度中对 k 成立。

在特征为零的情况下，[Poonen, 2002] 表明 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 不是一个整域。对于非代数闭场上这个断言的证明，请参见 [Kollár, 2005]（感谢 János Kollár 提醒我注意此参考文献）。

据我所知，关于正特征域上簇的 Grothendieck 环是否为域的问题已经存在了一段时间。本文的目的是证明如果 $p > 13$ 或 $p = 11$ ，则 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 不是一个整域（参见 Equation (2.1.1)）。

我的结果（即 Equation (2.1.1)）为这个问题提供了一个规范且甚至优雅的答案（而且这个答案在所有上述特征中都是一致的）。我的方法与 [Poonen, 2002] 在以下方面不同：[Larsen and Lunts, 2001] 中的一个关键结果在特性 $p > 0$ 下不可用，该结果是 [Poonen, 2002] 所需的；这一困难通过使用环 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 来规避，这个环据推测与 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 同构（前提是所有维度下的嵌入奇点消解可用）；对于 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ ，构建动机测度（如 Albanese 测度）更为简单；另一个创新是我使用 Pierre Deligne 的一个定理来在 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 中构建关系。

令 $\mathbb{L} = [A^1] \in K^0(\mathcal{V}_k)$ 为仿射直线的同构类在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 中。在 [Borisov, 2014] 中显示（假设 $k = \mathbb{C}$ ）， $\mathbb{L}$ 是 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 中的一个零因子。在 Section 2.3 中，我观察到存在一个无限的自然候选关系集合在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 中表明 $\mathbb{L}$ 是一个零因子（对于任何具有 $\text{char}(k) = p > 0$ 的域 k ）。但是目前我不知道如何证明这一点（请参阅 Section 2.3 以获得更精确的陈述）。

在 Equation (3.1) 中，我证明了一个光滑、完备的簇（任意特征）的 étale 基本群提供了环 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 上的一个动机测度。特别是，étale 基本群是复数上簇的 Grothendieck 环 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 上的一个动机测度。可以将这一结果视为（某些）代数簇 étale 基本群的反 Abel 性质的一种代数表现。

感谢拉维·瓦凯尔在亚利桑那冬季学校 (AWS 2015) 中围绕 Grothendieck 环 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 进行的一系列启发性讲座，这为本文的撰写奠定了基础。同样感谢数理解析研究所 (RIMS, 京都) 和望月新一在 2018 年春季访问 RIMS 期间接待我，并回答了与他构建 Albanese 多重结构相关的问题。

2. 第一条定理

2.1. **零因子的存在性.** 本笔记的主要定理如下:

定理 2.1.1. 令 k 是一个特征为 $p > 0$ 的代数闭域。若 $p > 13$ 或 $p = 11$, 则任何超奇异椭圆曲线的同构类是 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 中的零因子。特别是, $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 包含零因子。

证明. 令 AV_k 表示在 k 上的阿贝尔簇的同构类构成的乘法幺半群, 并且令 $\mathbb{Z}[AV_k]$ 表示幺半群环。为了证明这个定理, 我构造了一个自然同态 (阿尔贝斯动机测度)

$$\text{Alb} : K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm}) \rightarrow \mathbb{Z}[AV_k]$$

, 由 $[X] \rightarrow [\text{Alb}(X)]$ 给出。这个构造是下面的 Equation (2.2.1) 的内容。现在让我证明 Equation (2.1.1), 假设这个同态的构造 (见 Equation (2.2.1))。

回顾 [Silverman, 1986, Chapter V, Theorem 4.1(c)], 在特征为 $p > 0$ 的代数闭域上存在确切的

$$(2.1.2) \quad \delta_p = \left\lfloor \frac{p-1}{12} \right\rfloor + \varepsilon_p$$

个超奇异椭圆曲线同构类, 参见 [Silverman, 1986, Chapter 5] 中关于 ε_p 的定义, 并且要注意 $\delta_p \geq 2$ 当且仅当 $p > 13$ 或 $p = 11$ 。

假设 $\delta_p \geq 2$ 。设 E_1/k 是任意一个超奇异椭圆曲线, 并且设 E_2/k 是任何不与 E_1 同构的超奇异椭圆曲线。那么根据 Pierre Deligne 的一个美妙定理 (参见 [Katsura and Oort, 1987]), 存在一个同构 $E_1 \times E_1 \simeq E_1 \times E_2$ 。因此有

$$(2.1.3) \quad [E_1 \times E_1] = [E_1] \cdot [E_1] = [E_1] \cdot [E_2] = [E_1 \times E_2].$$

在 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 中。特别是我们有

$$(2.1.4) \quad [E_1] \cdot ([E_1] - [E_2]) = 0.$$

注意到 $[E_1], [E_1] - [E_2]$ 的像是非零的在 $\mathbb{Z}[AV_k]$ 中, 因此可以看出 $[E_1], [E_1] - [E_2] \neq 0 \in K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 所以它们都是在 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 中的零因子。特别地, $[E_1]$ 是在 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 中的一个零因子, 如所声称的。这证明了 Equation (2.1.1)。□

备注 2.1.5. 更一般地说, Deligne 的定理 (参见 [Katsura and Oort, 1987]) 断言如果 $n \geq 2$ 和 $E_1, \dots, E_{2n}$ 是任意超奇异椭圆曲线, 则 $E_1 \times \dots \times E_n \simeq E_{n+1} \times \dots \times E_{2n}$ 。因此, 这个定理在 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 中提供了更多的关系。

2.2. **阿尔贝内斯簇函子作为动机测度.** 以下定理构建了在 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 上的阿贝尔动机测度, 绕过了由 [Larsen and Lunts, 2001] 提出的在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 上构造动机测度的更深层次的方法, 该方法关键依赖于 (嵌入式) 奇点消解。

定理 2.2.1. 令 k 是一个任意特征的代数闭域。令 AV_k 是阿贝尔 k -簇的同构类的乘法么半群，并且令 $\mathbb{Z}[AV_k]$ 是么半群环。那么存在一个自然态射

$$\text{Alb} : K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm}) \rightarrow \mathbb{Z}[AV_k]$$

，它由 $[X] \rightarrow [\text{Alb}(X)]$ 给出。特别是如果 k 的特征为零，那么 Alb 是 k 多重集上的 *Grothendieck* 环的 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 的一个 *motivic* 测度。

证明. 回忆一下，如果 X 是一个光滑的、完备的 k -簇，则 $\text{Alb}(X)$ 是一个阿贝尔簇，等于簇 X 的约化 Picard 方案 $\text{Pic}(X)_{\text{red}}$ 的对偶。为了理解任意域上任意特征的任意簇的 Albanese 簇的性质，读者可能会发现 [Ramachandran, 2001] 和 [Mochizuki, Appendix, Page 66] 有用。

显然， $[X] \rightarrow [\text{Alb}(X)] \in AV_k$ 可以在线性上扩展（与 $[\emptyset] \mapsto 0$ ）来定义由光滑、完备的 k -簇的同构类生成的自由交换群之间的群同态。通过 Equation (2.2.3)，对于完备的 k -簇，有 $[X] \times [Y] = [X \times_k Y] \mapsto [\text{Alb}(X \times_k Y)] = [\text{Alb}(X)] \times [\text{Alb}(Y)]$ 。因此该映射保持乘法。由 Equation (2.2.2) $[\text{Alb}(X')] = [\text{Alb}(X)]$ 和 $[\text{Alb}(Y')] = [\text{Alb}(Y)]$ 。因此元素 $[X'] - [X] - ([E] - [Y])$ 映射到 $[\text{Alb}(X')] - [\text{Alb}(X)] - ([\text{Alb}(E)] - [\text{Alb}(Y)]) = 0$ 。因此这个同态保持乘法和 Bittner 关系，故此同态通过商环 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$ 因子分解。从而得到诱导的态射 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm}) \rightarrow \mathbb{Z}[AV_k]$ 。最后一个断言现在由 Equation (1.1) 推出。□

引理 2.2.2. 假设 k 是代数闭的，并且 $Y \subset X$ 是光滑、完备的 k 多重族。令 $X' = \text{Bl}_Y(X)$ 和 $Y' = E \subset X'$ 是例外除子。然后有一个自然同构

$$\text{Alb}(X') \simeq \text{Alb}(X)$$

和

$$\text{Alb}(Y') \simeq \text{Alb}(Y).$$

证明. 证明来自于一个众所周知的事实：如果 A 是一个阿贝尔簇，那么不存在从射影空间 $\mathbb{P}^m \rightarrow A$ [Mumford] 到它的非常数态射。假设 $A' = \text{Alb}(X')$ 和 $A = \text{Alb}(X)$ 。由于从射影空间到阿贝尔簇不存在非常数态射，自同构态射 $X' \rightarrow A'$ 可以分解为 $X' \rightarrow X \rightarrow A'$ ，并且通过阿尔班塞簇 A 的通用性质， X 也可以分解为 $X' \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow A'$ 。特别地，这意味着从 X' 到阿贝尔簇的任何态射都必须通过 A 因此 A 是 X' 的阿尔班塞簇所以 $A = A'$ 同样可以看出 $\text{Alb}(Y') = \text{Alb}(Y)$ 。□

引理 2.2.3. 令 X_1, X_2 为两个光滑的、完整的 k -簇。那么

$$\text{Alb}(X_1 \times_k X_2) \simeq \text{Alb}(X_1) \times \text{Alb}(X_2).$$

证明. 这立即来自于阿尔班塞簇的泛性质。□

2.3. 可用于证明 $\mathbb{L}$ 是零因子的关系 $K^0(\mathcal{V}_k)$. 由 [Asanuma, 1987, Gupta, 2013] 存在一个显著的明确定义的光滑仿射代数集合 A/k , 明确给出为 $A = k[x, y, z, w]/(x^m y + z^{p^e} + w + w^{sp})$ 其中 e, m, s 是正整数, 使得 $p^e \nmid sp, sp \nmid p^e$, 并且具有以下显著性质:

$$(2.3.1) \quad \text{Spec}(A) \times_k \mathcal{A}^1 \simeq \mathcal{A}^4$$

$$(2.3.2) \quad \text{Spec}(A) \not\simeq \mathcal{A}^3.$$

这个例子表明在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 中存在关系

$$(2.3.3) \quad [\text{Spec}(A)] \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^4 = ([\text{Spec}(A)] - \mathbb{L}^3) \cdot \mathbb{L} = 0.$$

特别是, 如果 $\mathbb{L}$ 是零因子

$$[\text{Spec}(A)] - \mathbb{L}^3 \neq 0.$$

但我不知道如何证明 $[\text{Spec}(A)] \neq \mathbb{L}^3$ 在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 中. 事实上, 假设 A, A' 是两个这样的代数, 参数 e, m, s 的值不同, 使得 $\text{Spec}(A), \text{Spec}(A')$ 不作为方案同构, 则只需证明 $[\text{Spec}(A)] \neq [\text{Spec}(A')]$ 在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ 中成立, 因为还存在关系

$$[\text{Spec}(A)] \cdot \mathbb{L} = \mathbb{L}^4 = [\text{Spec}(A')] \cdot \mathbb{L}.$$

。但再次说明, 我不知道如何证明 $[\text{Spec}(A)] \neq [\text{Spec}(A')]$ 在 $K^0(\mathcal{V}_k)$ (或 $K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm})$) 中成立。

3. 第二个定理: ÉTALE 基本群是一个动机测度

在本节中, 基础域 k 假定为代数闭的任意特征值, 并且通过代数簇的基本群, 我指的是它的 étale 基本群 (参见 [Grothendieck, 1971, Exposé X]). 众所周知, 这是一个 profinite 群 (见 [Grothendieck, 1971]). 设 X/k 是一个域上的光滑完备簇. 那么众所周知, X/k 的 étale 基本群的同构类与用来计算基本群的基础点的选择无关, 我将在记号中省略基础点. 在此笔记中我记录了以下备注:

定理 3.1. 令 k 是一个任意特征的代数闭域. 令 $\mathcal{P}$ 是 profinite 群同构类的乘法么半群. 然后, 将一个连通的、光滑的、完备的簇 X/k 映射到其 étale 基本群 $\pi_1(X/k)$ 的映射扩展为一个环同态:

$$\Pi : K_{\text{bl}}^0(\mathcal{CV}_k^{sm}) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{P}].$$

特别是, 如果 k 是特征零, 则 $X \mapsto \pi_1(X/k)$ 扩展为一个环同态

$$\Pi : K^0(\mathcal{V}_k) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{P}].$$

因此 étale 基本群是一个动机测度。

备注 3.2. 由于 Grothendieck 的非 Abel 纲领 (以及 A. Tamagawa、S. Mochizuki 等人所取得的结果) 表明, étale 基本群之间的同构应该 (在许多有趣的情况下) 源自于方案之间的 $\mathbb{Z}$ -同构, 人们可以 (大致地) 将同态 Π 及其核视为测量 k -簇的非 Abel 性质的一种代数方法。

证明. 对于一个有限完备群 P , 令 $[P]$ 表示它的同构类。由 Equation (1.1) 可知, 只需证明如果 X/k 是一个光滑、恰当、连通的簇, 并且 $Y \subset X$ 是 X 的一个光滑子簇, $E \subset \mathrm{Bl}_Y(X)$ 是 $\mathrm{Bl}_Y(X) \rightarrow X$ 的例外除子, 则对于基本群而言, 以下条件成立:

$$\pi_1(\mathrm{Bl}_Y(X)/k) \simeq \pi_1(X/k),$$

和 $\pi_1(E/k) \simeq \pi_1(Y/k)$ 以及

$$\pi_1(X_1 \times_k X_2) \simeq \pi_1(X_1/k) \times \pi_1(X_2/k).$$

对于第一个条件, 可以通过将 Y 约化为连通的情况来证明, 因为 $\mathrm{Bl}_Y(X)$ 可以通过相继对 Y 的连通分支进行爆破得到。由于态射 $\mathrm{Bl}_Y(X) \rightarrow X$ 是双有理的, 可以利用 [Grothendieck, 1971, Exposé X, Corollary 3.4] 推出 $\pi_1(\mathrm{Bl}_Y(X)/k) \simeq \pi_1(X/k)$ 。注意, $E \rightarrow Y$ 是一个在 Y 上的射影丛, 并且由于所有 $n \geq 1$ 的 $\mathbb{P}^n$ 都是单连通的, 通过 [Grothendieck, 1971, Exposé X, Corollary 1.4] 可以看出 $\pi_1(E/k) \simeq \pi_1(Y/k)$ 。乘积关系由 [Grothendieck, 1971, Exposé X, Corollary 1.7] 得出。因此, 有以下同构类的等式:

$$[\pi_1(\mathrm{Bl}_Y(X)/k)] = [\pi_1(X/k)],$$

$$[\pi_1(E/k)] = [\pi_1(Y/k)],$$

$$[\pi_1(X_1 \times_k X_2)] = [\pi_1(X_1/k)] \times [\pi_1(X_2/k)].$$

由此可见, 从前两个方程可以看出映射 $X \mapsto [\pi_1(X/k)]$ 满足 Bittner 关系

$$[\pi_1(\mathrm{Bl}_Y(X)/k)] - [\pi_1(E/k)] = [\pi_1(X/k)] - [\pi_1(Y/k)]$$

显然成立。这证明了定理。 □

REFERENCES

- Shreeram Shankar Abhyankar. *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*. Pure and Applied Math. Academic Press, New York, 1966.
- Dan Abramovich, Kalle Karu, Kenji Matsuki, and Jaroslaw Włodarczyk. Torification and factorization of birational maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3):531–572, 2002.
- T. Asanuma. Polynomial fibre rings of algebras over Noetherian rings. *Inventiones Math.*, 1987.
- Franziska Bittner. The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero. volume(number):pages. URL <https://arxiv.org/abs/math/0111062v1>.
- Lev Borisov. The class of the affine line is a zero-divisor in the Grothendieck ring. *Preprint: arXiv:1412.6194*, 2014.

- A. Grothendieck. *Revêtement étale et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61*. Number 224 in Springer Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1971.
- Neena Gupta. On the cancellation problem for the affine space $\mathbb{A}^3$ in characteristic p . *Invent. Math.*, 2013.
- Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, i, ii. 79:109–203, 205–326, 1964.
- Toshiyuki Katsura and Frans Oort. Families of supersingular abelian surfaces. *Compositio Math.*, 1987.
- János Kollár. Conics in the Grothendieck ring. *Adv. Math.*, 198(1):27–35, 2005.
- Michael Larsen and Valery Lunts. Motivic measures and stable birational geometry. 2001. URL <http://arXiv.org/abs/math/0110255v1>.
- Shinichi Mochizuki. Topics in Anabelian Geometry I: Generalities. *Preprint*: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki>.
- D. Mumford. *Abelian varieties*. Oxford University Press, Bombay.
- Bjorn Poonen. The Grothendieck ring of varieties is not a domain. *Math. Res. Lett.*, 2002.
- Niranjan Ramachandran. Duality of Albanese and Picard 1-Motives. *K-Theory*, 2001.
- Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1986. ISBN 0-387-96203-4. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1920-8>.

MATH. DEPARTMENT, UNIVERSITY OF ARIZONA, 617 N SANTA RITA, TUCSON 85721-0089, USA.