

关于 WERMUTH 的交换算子指数定理的注记

KRZYSZTOF SZCZYGIELSKI

摘要. 我们应用 Wermuth 关于交换算子指数的定理来证明如果 $A, B \in B(X)$, X 是 Banach 空间且 A 具有 $2\pi i$ -同余自由谱, 则 $e^A B = B e^A$ 当且仅当 $AB = BA$. 我们利用这一观察为 Chaban 和 Mortad 的类似结果提供了另一种证明方法, 适用于 X 是 Hilbert 空间的情况。

1. 介绍. WERMUTH 定理

众所周知, 如果非交换单位 Banach 代数中的两个元素 a 和 b 可交换, 则它们的指数 e^a 和 e^b 也彼此可交换。尽管一般情况下逆命题是错误的, E. Wermuth 证明了如果 A 和 B 是在 Banach 空间上的有界算子, 并且满足附加条件即它们具有 $2\pi i$ -同余自由谱, 则相反方向的蕴含关系也成立。

定义 1. 令 $S \subset \mathbb{C}$ 和令 $z \in \mathbb{C}$ 为任意选择的。我们说 S 是 z -同余自由当且仅当不存在两个不同的元素 $s_1, s_2 \in S$ 使得 $s_1 = s_2 \pmod{z}$ 成立。等价地,

$$\forall s_1, s_2 \in S : s_1 - s_2 \neq kz, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1.1)$$

令 $B(X)$ 是 Banach 空间 X 上所有有界线性自同态的 Banach 代数。Wermuth 定理对算子对 $A, B \in B(X)$ 成立, 并涉及两个谱 $\sigma(A), \sigma(B)$ 的 $2\pi i$ -合同自由度, 可以表述如下:

定理 1 (沃尔默特). 令 $A, B \in B(X)$, 并使 $\sigma(A), \sigma(B) \subset \mathbb{C}$ 均为 $2\pi i$ -合同自由。然后, $e^A e^B = e^B e^A$ 当且仅当 $AB = BA$ 。

原始的 [1]Wermuth 定理涉及有限维矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$, 然后被推广到任意 Banach 空间 X 的情况 [2] 和 $B(X)$ 。后来, 关于非交换单位代数中指数 (或其函数) 的可交换性的若干结果出现了 (见例如)。[3–7]), 无论是否明确使用 $2\pi i$ -同余自由假设; 特别地, Chaban 和 Mortad 在 [8] 中对于 Hilbert 空间 H 的 C^* -代数 $B(H)$ 的一个情况下得到了有趣的结果, 大致说如果 $A \in B(H)$ 是具有良好谱的正规算子, 则 $e^A B = B e^A$ 当且仅当 $AB = BA$ 。在这篇论文中, 我们在巴拿赫空间框架下制定了类似的结果, 见第 2 节。这使我们能够在第 3 节给出 Chaban 和 Mortad 定理的另一种证明。

Date: 2025 年 4 月 12 日.

2. 主要结果

我们从复平面上有界子集的“收缩”或“重新缩放”性质的一个简单观察开始（下文中的引理 1）。我们的主要结果则表述为定理 2。

引理 1. 对于每一个有界的非空集合 $U \subset \mathbb{C}$ 和每一个 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ，存在足够小的 $\tau > 0$ ，使得集合 $tU = \{tw : w \in U\}$ 对于每一个 $t \in (0, \tau)$ 都是 z -同余自由。

证明. 令 $U \subset \mathbb{C}$ 为非空且有界的，并令

$$\Delta = \sup_{z_1, z_2 \in U} |z_1 - z_2| \quad (2.1)$$

为其直径。如果 $\Delta > 0$ ，定义

$$\tau = \frac{|z|}{\Delta}. \quad (2.2)$$

然后，对于每一个 $t \in (0, \tau)$ 和每一对复数 $z_1, z_2 \in U$ 我们有 $|z_1 - z_2| \leq \Delta$ 这导致

$$t|z_1 - z_2| < \tau\Delta = |z|. \quad (2.3)$$

令 $tU = \{tz : z \in U\}$ 并取任意的 $w_1, w_2 \in tU$ 。由于 $w_1 = tz_1$ 和 $w_2 = tz_2$ 对于某些 $z_1, z_2 \in U$ 成立，方程 (2.3) 暗示了

$$|w_1 - w_2| = t|z_1 - z_2| < |z|, \quad (2.4)$$

这自动导致了

$$w_1 - w_2 \neq kz, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (2.5)$$

对每一个 $w_1, w_2 \in tU$ 来说，即 $w_1 \neq w_2 \pmod{z}$ 并且 tU 是对于任何 $t \in (0, \tau)$ 的 z -同余自由。另一方面，如果 $\Delta = 0$ ，即 $U = \{z_0\}$ 是一个单元素集，则集合 tU 自动成为任意 $t \in (0, \infty)$ 的 z -合同自由集作为 $w_1 = w_2 = tz_0$ 和

$$w_1 - w_2 = 0 \neq kz, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

然后，可以取任何 $\tau \in (0, \infty)$ 。□

定理 2. 令 $A, B \in B(X)$ ，并令 $\sigma(A)$ 为 $2\pi i$ -同余自由。那么， $e^A B = B e^A$ 当且仅当 $AB = BA$ 。

证明. 我们只需要处理“ $\Rightarrow$ ”方向。假设 $e^A B = B e^A$ 。然后， e^A 也与 B 的每个解析函数交换，因此特别是对于所有 $t \in \mathbb{R}$ ，

$$e^A e^{tB} - e^{tB} e^A = 0. \quad (2.7)$$

由于 $\sigma(B)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个非空有界子集, 对 $U = \sigma(B)$ 应用引理 1 保证存在这样的 $\tau > 0$ 使得对于任何 $t \in (0, \tau)$, $t\sigma(B)$ 都是 $2\pi i$ - 合同自由的。因此, 算子 tB 是 $2\pi i$ - 同余自由谱。根据 Wermuth 的结果 (定理 1),

$$e^A e^{tB} - e^{tB} e^A = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot tB - tB \cdot A = t(AB - BA) = 0 \quad (2.8)$$

对于每一个 $t \in (0, \tau)$, 所以 A 和 B 交换。必要性是显然的。 $\square$

备注 1. $2\pi i$ - 同余自由的 $\sigma(A)$ 不可忽视, 如下述 (典范) 反例在 $M_2(\mathbb{C})$ 中所示: 我们选择 A 和 B 如下,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

对于某个 $a \in \mathbb{R}$ 。通过直接代数验证很容易证明 $e^A = -I$, 因此 e^A 与 (任意) B 交换; 然而,

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 2\pi a & 0 \\ 0 & -2\pi a \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

除非 $a = 0$ 不为零且矩阵 A 和 B 通常不交换。这并不令人惊讶, 因为很容易证明 $\sigma(A) = \{\pi i, -\pi i\}$, 因此 $\sigma(A)$ 不是 $2\pi i$ - 合同自由的。

3. 与 CHABAN 和 MORTAD 的结果的关系

正如我们在引言中提到的, Chaban 和 Mortad 之前获得了一个类似的关于 C^* -代数 $B(H)$, H 是希尔伯特空间的结果 [8]。对于任意的 $T \in B(H)$, 我们定义其唯一的笛卡尔分解具有以下形式

$$T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T, \quad (3.1)$$

其中 $\operatorname{Re} T$ 和 $\operatorname{Im} T$ 分别称为 T 的实部和虚部, 它们是自伴的和有界的, 并由下式给出

$$\operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad \operatorname{Im} T = \frac{1}{2i}(T - T^*). \quad (3.2)$$

定理 3 (查班和莫塔德). 令 $A, B \in B(H)$ 使得 A 是正态的且 $\sigma(\operatorname{Im} A) \subset (0, \pi)$, 我们有

$$e^A B = B e^A \iff AB = BA. \quad (3.3)$$

该定理随后通过采用不同于我们方法的手段加以证明, 例如使用 Fuglede 定理, 并且没有直接引用 $2\pi i$ - 合同自由。然而, 人们很容易表明这里实际上是 $2\pi i$ - 合同自由的情况, 这允许通过直接应用定理 2 (因此随之而来是 Wermuth 的定理) 来给出上述结果的替代证明。

引理 2. 令 $A \in B(H)$ 满足定理 3 的假设, 即 A 是正规的且 $\text{Im } A \subset (0, \pi)$ 。那么, $\sigma(A)$ 是 $2\pi i$ -共轭自由。

证明. 如果 A 是正规的, 即 $AA^* = A^*A$, 那么 A 的笛卡尔分解由一对交换的正规自伴有界算子 $(\text{Re } A, \text{Im } A)$ 构成。在这种情况下, 可以证明, 通过应用 Gelfand 变换, 谱 $\sigma(A)$ 满足

$$\sigma(A) \subset \sigma(\text{Re } A) + i\sigma(\text{Im } A). \quad (3.4)$$

为了方便起见, 让我们用一个矩形将 $\sigma(A)$ 包围在 $\mathbb{C}$ 中。如 $\text{Re } A = (\text{Re } A)^*$ 和 $\|\text{Re } A\| < \infty$, 其谱是 $\mathbb{R}$ 的有界子集, 可以定义

$$J = \inf \{[x_1, x_2] \subset \mathbb{R} : \sigma(\text{Re } A) \subset [x_1, x_2]\} \quad (3.5)$$

即。 J 是包含整个 $\text{Re } A$ 谱的最小区间。然后,

$$\sigma(A) \subset J + i(0, \pi). \quad (3.6)$$

取任意两个 $\lambda_1, \lambda_2 \in J + i(0, \pi)$, $\lambda_k = a_k + ib_k$ 对于 $a_k \in J$, $b_k \in (0, \pi)$, $k \in \{1, 2\}$; 有两种可能的情况:

(1) 如果发生 $a_1 = a_2$, 则

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = |b_1 - b_2| \leq \sup_{b_1, b_2 \in (0, \pi)} |b_1 - b_2| = \pi < 2\pi, \quad (3.7)$$

因此对于每一个 $b_1, b_2 \in (0, \pi)$ 和每一个 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 都有 $\lambda_1 - \lambda_2 = i(b_1 - b_2) \neq 2k\pi i$ 。

(2) 如果另一方面 $a_1 \neq a_2$, 则自动地

$$\lambda_1 - \lambda_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2) \neq 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.8)$$

因此, 集合 $J + i(0, \pi)$ 是 $2\pi i$ -互不相容的; 同样的情况也适用于其子集 $\sigma(\text{Im } A)$ 。

□

最后, 我们将通过上述观察的直接推论给出 Chaban 和 Mortad 定理的一个替代证明:

定理的证明 3. 如果 $\sigma(\text{Im } A) \subset (0, \pi)$, 则 $\sigma(A)$ 是 $2\pi i$ -由引理 2 得出的无合同式。因此, 定理 2 适用。

□

4. 致谢

作者感谢波兰国家科学中心通过研究资助编号 2016/23/D/ST1/02043 提供的支持。

REFERENCES

- [1] E. M. E. Wermuth. Two Remarks on Matrix Exponentials. *Linear Algebra Appl.*, 117:127–132, may 1989.
- [2] E. M. E. Wermuth. A remark on commuting operator exponentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(6):1685–1688, 1997.
- [3] C. Schmoeger. Remarks on commuting exponentials in Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(05):1337–1339, 1999.
- [4] C. Schmoeger. Remarks on commuting exponentials in Banach algebras, II. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(11):3405–3410, 2000.
- [5] C. Schmoeger. On normal operator exponentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(03):697–703, 2002.
- [6] F. C. Paliogiannis. On commuting operator exponentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(12):3777–3781, 2003.
- [7] G. Bourgeois. On commuting exponentials in low dimensions. *Linear Algebra Appl.*, 423(2-3):277–286, jun 2007.
- [8] A. Chaban and M. H. Mortad. Exponentials of bounded normal operators. *Colloq. Math.*, 133(2):237–244, 2013.

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS AND ASTROPHYSICS, FACULTY OF MATHEMATICS, PHYSICS AND
ASTROPHYSICS, UNIVERSITY OF GDANSK, WITA STWOSZA 57, 80-308 GDANSK, POLAND
Email address: fizkszo@ug.edu.pl