

一个简单的定理用于离散分治递推关系式

OLIVIER GARET

ABSTRACT. 本文的目的是为某些离散分治递推关系提供一个主定理:

$$X_n = a_n + \sum_{j=1}^m b_j X_{\lfloor \frac{n}{m_j} \rfloor},$$

其中 m_i 的值是整数且满足 $m_i \geq 2$ 。这项工作的主要新颖之处在于没有对 (a_n) 做任何关于规则性或单调性的假设。然后, 这一结果可以应用于各种随机变量序列 $(a_n)_{n \geq 0}$, 例如满足 $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(|a_n|) < +\infty$ 。

由西北欧洲数学杂志出版,
第 8 卷 (2022) 页码 91–100

1. 介绍

分而治之方法在计算机科学中被广泛使用。算法成本的分析自然导致了分而治之递归关系。研究这些递归的方法在计算机科学文献中被普及为“主定理”。参见例如科曼等人 [3] 或古德里奇和塔马西娅 [7] 的参考书。

在后续部分, 我们考虑由 $X_0 = a_0$ 定义的序列 $(X_n)_{n \geq 0}$, 然后是

$$(1) \quad X_n = a_n + \sum_{j=1}^m b_j X_{\lfloor \frac{n}{m_j} \rfloor},$$

其中 m_i 是整数, 并且 $m_i \geq 2$ 以及 $\lfloor x \rfloor$ 表示唯一的 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $x - n \in [0, 1)$ 。

当然, 在计算机科学中, a_n 和 X_n 表示计算时间, 因此是正数。然而, 负的 a_n 和 X_n 的情况可能具有理论兴趣。

在计算机科学的文献中, (a_n) 被认为是确定性的。然而, 在随机算法的背景下, 最终涉及蒙特卡罗模拟时, 自然会考虑随机的 (a_n) 情况并观察计算时间的波动。

计算机科学领域中最一般的结果之一归功于 Akra 和 Bazzi [1]。他们并不寻求精确的渐近极限, 而是关注波动的阶数。他们的方法依赖于经典的实分析。

数学文献更侧重于依赖生成函数的精确方法。这一精神的第一篇论文是 Erdős 等人 [6], 他们借助更新方程解决了 $a_n = 0$ 的情况。陶伯定理导致了

其结果的简化证明, 请参阅例如 Choimet 和 Queffelec [2]。Drmota 和 Szpankowski [4] 最近的结果也依赖于陶伯定理和复分析中的一些其他工具。他们需要一些单调性的假设。

如果想涵盖随机变量 (a_n) 的情况, 序列 (a_n) 显然不能假设为单调的。令人相当惊讶的是, 在文献中我们没有找到任何此类定理, 即在不作单调性假设的情况下计算出精确的极限。

让我们澄清假设: 我们假设 b_i 是正数且具有 $\sum_{j=1}^m b_j > 1$, m_i 是整数且具有 $m_i \geq 2$ 并且存在 j, ℓ 具有 $\frac{\log m_j}{\log m_\ell} \notin \mathbb{Q}$ 。有理数的情况, 在这里没有考虑, 同样在计算机科学中也非常重要——参见例如鲁拉 [8] 或 德罗塔和斯潘福斯基 [4]。

已知一般增长 (X_n) 受方程正根 s_0 的值控制。

$$\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} = 1.$$

如前所述, 本文的原创性在于对 (a_n) 的假设: 在以下假设下

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{s_0}} < +\infty,$$

我们证明当 n 趋向无穷大时, 序列 $\frac{X_n}{n^{s_0}}$ 存在极限 L , 并给出了一个相当简单的闭合表达式。

正如我们将看到的, 这允许将我们的定理应用于一大类随机变量。然后, 极限 L 是一个随机变量, 表现为一个随机级数的和。

如果我们专门考虑其中的 (a_n) 相互独立的情况, 那么可以很容易地控制随机波动 L 。

2. 确定性定理

定理 1. 令 $m \geq 1, (b_1, \dots, b_m)$ 是一组非负数, $(m_1, \dots, m_m)$ 是一组整数, 并且有 $m_i \geq 2$, 满足

- 存在 j, ℓ 满足 $\frac{\log m_j}{\log m_\ell} \notin \mathbb{Q}$;
- $\sum_{j=1}^m b_j > 1$.

我们记 s_0 为方程的正根 s_0

$$\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} = 1.$$

则存在一组正数序列 $(\ell_j)_{j \geq 0}$, 对于每一个序列 $(a_n)_{n \geq 0}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{s_0}} < +\infty,$$

那么, 由 $X_0 = a_0$ 定义且满足递推关系 (1) 的序列 $(X_n)_{n \geq 0}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n^{s_0}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \ell_j a_j.$$

注意, 如果序列 $(a_j)_{j \geq 0}$ 非负且不恒为零, 则极限 $\sum_{j=0}^{+\infty} \ell_j a_j$ 为正, 因此我们已经找到了 $(X_n)_{n \geq 0}$ 增长的正确速度。

Proof. 我们用 $L_n(a)$ 表示序列 a 中与递归 (1) 对应的 X_n 的值。

递推方程. 令 n_0 为非负整数, 并假设首先对于 $n > n_0$ 有 $a_n = 0$ 。

对于 $n > n_0$, 我们有 $X(n) = \sum_{j=1}^m b_j X(\lfloor \frac{n}{m_j} \rfloor)$ 。

我们可以选择 C , 使得 $|X_k| \leq Ck^{s_0}$ 对于 $0 < k \leq n_1 = \max(n_0, m_1, \dots, m_m)$ 成立。然后, 通过自然归纳法可得 $|X_k| \leq Ck^{s_0}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}^*$ 成立。接下来, 我们设 $X(t) = X(\lfloor t \rfloor)$ 以简化一些记号。现在定义

$$(2) \quad \phi(s) = s \int_{n_0+1}^{+\infty} \frac{X(t)}{t^{s+1}} dt$$

对于 $s \in \mathbb{C}$ 与 $\operatorname{Re}(s) > s_0$ 。递推方程导致

$$\begin{aligned} \phi(s) &= s \int_{n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^m b_j \frac{X(\frac{t}{m_j})}{t^{s+1}} dt = s \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \int_{\frac{n_0+1}{m_j}}^{+\infty} \frac{X(t)}{t^{s+1}} dt \\ &= \left(\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \right) \phi(s) + s \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \int_{\frac{n_0+1}{m_j}}^{n_0+1} \frac{X(t)}{t^{s+1}} dt. \end{aligned}$$

由于

$$\left| \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \right| \leq \sum_{j=1}^m |b_j m_j^{-s}| = \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-\operatorname{Re}(s)} < \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} = 1,$$

我们可以写出对于 $\operatorname{Re}(s) > s_0$:

$$(3) \quad \phi(s) = \frac{P(s)}{1 - \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s}}, \text{ with } P(s) = s \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \int_{\frac{n_0+1}{m_j}}^{n_0+1} \frac{X(t)}{t^{s+1}} dt$$

陶伯魔力. 现在, 固定一个非负整数 n_0 , 并假设序列 $a = (a_n)_{n \geq 0}$ 是 $a = I^{n_0}$ 的

$$I_i^{n_0} = \mathbb{1}_{i \leq n_0} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \leq n_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

通过自然归纳法, 很容易看出 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是非递减的。

也可以看到 $1 - \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s}$ 不为零, 对于具有 $\operatorname{Re}(s) \geq s_0$ 和 $s \neq s_0$ 的 $s \in \mathbb{C}$ 。按照 Choimet 和 Queffelec (参见 [2], 第 4 节) 的方法进行推导, 我们可以注意到, 对于 $\operatorname{Re}(s) = s_0$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \right) = \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \cos(\log m_j \operatorname{Im}(s)) \leq \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} = 1.$$

实际上, 当 $\operatorname{Im}(s) \neq 0$ 时不等式是严格的。否则, 我们将有 $\log m_j \operatorname{Im}(s) \in 2\pi\mathbb{Z}$ 对应每个 j , 从而得到每个 j, k 都有 $\frac{\log m_j}{\log m_k} \in \mathbb{Q}$, 这已被排除。

由此得出对于

$$c = \operatorname{Res}_{s_0} \phi = \frac{P(s_0)}{\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \log(m_j)},$$

, 映射 $s \mapsto \phi(s) - \frac{c}{s-s_0}$ 在 $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) \geq s_0\}$ 上是全纯的。

现在注意 $b(x) = \sum_{n_0 < n \leq x} (X_n - X_{n-1})$ 。阿贝尔变换给出

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{n^s} = s \int_{n_0+1}^{+\infty} \frac{b(t)}{t^{s+1}} dt.$$

由于 $b(t) = X(t) - X_{n_0}$, 我们有

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{n^s} = s \int_{n_0+1}^{+\infty} \frac{X(t)}{t^{s+1}} dt - \frac{X_{n_0}}{(n_0+1)^s} = \phi(s) - \frac{X_{n_0}}{(n_0+1)^s}.$$

现在, 我们将应用 Ikehara–Newman 定理来处理级数:

命题 1. 令 $(u_n)_{n \geq 1}$ 为一组非负实数序列, a 和 c 为正实数。假设 *Dirichlet* 级数 $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n n^{-s}$ 在开半平面 $\operatorname{Re}(s) > a$ 上定义, 并且更精确地说, 对于 $A(x) = \sum_{n \leq x} u_n$ 当 $x \geq 0$, 以下性质得到验证:

- $A(x)x^{-a}$ 是在 $\mathbb{R}^+$ 上有界的;
- $\Phi(s) - \frac{c}{s-a}$ 在闭半平面 $\operatorname{Re}(s) \geq a$ 上有一个全纯延拓 G 。

那么我们有 $A(x) \sim \frac{c}{a} x^a$ 作为 $x \rightarrow +\infty$ 。

由于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是非递减的, 序列 $(X_n - X_{n-1})_{n > n_0}$ 是非负的, 因此级数的 Wiener-Ikehara 定理适用: 因为当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $b(t) = O(t^{s_0})$, 我们得到 $b(x) \sim \frac{c}{s_0} x^{s_0}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(I^{n_0})}{n^{s_0}} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \int_{\frac{n_0+1}{m_j}}^{n_0+1} \frac{L_t(I^{n_0})}{t^{s_0+1}} dt}{\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \log(m_j)}.$$

对于 $n_0 = 0$, 我们有 $\ell_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(\delta^0)}{n^{s_0}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(I^0)}{n^{s_0}}$, 所以

$$\ell_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \log(m_j)} \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \int_{\frac{1}{m_j}}^1 \frac{1}{t^{s_0+1}} dt \quad \text{or}$$

$$\ell_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \log(m_j)} \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \frac{m_j^{s_0} - 1}{s_0}.$$

请注意, 这个等式及其相关的收敛性构成了 Erdős 等人 [6] 的结果。

令 $n_0 \geq 1$. 序列 $(\delta_n^{n_0})_{n \geq 0}$ 定义为

$$\delta_n^{n_0} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = n_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

由于 $\delta^{n_0} = I^{n_0} - I^{n_0-1}$, 可以推断出当 n 趋于无穷大时,

$$L_n(\delta^{n_0})n^{-s_0} = L_n(I^{n_0})n^{-s_0} - L_n(I^{n_0-1})n^{-s_0}$$

存在一个极限。我们用 ℓ_{n_0} 表示它。

为了计算它, 取 $a = \delta^{n_0}$ 并再次考虑相关的 ϕ 。从 (2), 我们得到 $\ell_{n_0} = \lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{1}{s_0} (s - s_0) \phi(s)$ 。另一方面, 方程 (3) 仍然有效,

$$\begin{aligned} P(s) &= s \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \int_{\frac{n_0+1}{m_j}}^{n_0+1} \frac{X(t)}{t^{s+1}} dt \\ &= s \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \int_{\max(n_0, \frac{n_0+1}{m_j})}^{n_0+1} \frac{1}{t^{s+1}} dt, \end{aligned}$$

也等于

$$\frac{1}{s_0} (s - s_0) \phi(s) = -\frac{s}{s_0} \frac{s_0 - s}{1 - \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s}} \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s} \int_{\max(n_0, \frac{n_0+1}{m_j})}^{n_0+1} \frac{1}{t^{s+1}} dt$$

, 考虑到 $m_j \geq 2$, 我们得到

$$\ell_{n_0} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \log(m_j)} \sum_{j=1}^m b_j m_j^{-s_0} \int_{n_0}^{n_0+1} \frac{1}{t^{s_0+1}} dt.$$

由于这个表达式和之前的那个, 很清楚地表明 $\ell_j > 0$ 对每个 $j \geq 0$ 都成立。

一般情况. 对于 $n, j \geq 0$, 我们注意到 $K_n^j = L_n(\delta^j)$ 。很明显, $K_n^j = 0$ 对于 $n < j$ 和 $K_j^j = 1$ 成立。通过在 n 上进行自然归纳, 很容易得到 $0 \leq K_n^j \leq \frac{K_n^0}{K_j^0}$ 。现在, 递归的仿射性质给出了

$$X_n = \sum_{j=0}^n K_n^j a_j.$$

对于每个 $j \geq 0$, 我们有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_n^j}{n^{s_0}} = \ell_j$ 。此外, K_j^0 是正的, 并且有 $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{K_j^0}{j^{s_0}} = \ell_0 > 0$, 因此存在 M 使得对于每个 $j \geq 1$ 都有 $0 < \frac{1}{K_j^0} \leq \frac{M}{j^{s_0}}$ 。然后, 对于每个 $j, n \geq 1$, 我们有

$$\left| \frac{K_n^j a_j}{n^{s_0}} \right| \leq \frac{K_n^0}{n^{s_0}} \frac{|a_j|}{K_j^0} \leq \frac{|a_j|}{K_j^0} \leq M \frac{|a_j|}{j^{s_0}}$$

并通过维尔斯特拉斯判别法,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n^{s_0}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \ell_j a_j.$$

□

3. 随机变量序列的应用

我们在下面给出定理 1 在随机变量序列中的一些应用。

3.1. 收敛.

定理 2. 假设 m_i 的、 b_i 的和 s_0 满足定理 1 的假设, 且 (a_n) 是一个随机变量序列。在下列每组附加假设下, 由 $(X_n)_{n \geq 0}$ 和递推关系 (1) 定义的序列 $X_0 = a_0$ 是这样的, $\frac{X_n}{n^{s_0}}$ 几乎必然收敛到某个随机变量, 该随机变量表示为随机级数之和:

$$L = \sum_{j=0}^{+\infty} \ell_j a_j.$$

(A) $\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{m_j} > 1$ 和 (a_n) 是可积的随机变量。

$$C = \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}|a_n| < +\infty.$$

(B) $\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{m_j^2} > 1$ 和存在 $C > 0$ 使得对于每个 $n \geq 1$ 和 $t \geq 1$, 我们有 $\mathbb{P}(|a_n| > t) \leq \frac{C}{t}$ 。

Proof. (A) 条件 $\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{m_j} > 1$ 意味着 $s_0 > 1$ 。

我们有 $\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{s_0}}) \leq C\zeta(s_0) < +\infty$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{s_0}} < +\infty$ 几乎必然成立, 这给出了 $\frac{X_n}{n^{s_0}}$ 的几乎必然行为。

(B) 条件 $\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{m_j^2} > 1$ 意味着 $s_0 > 2$ 。我们固定 $\eta > 1$ 为 $s_0 - \eta > 1$ 。然后 $\mathbb{P}(|a_n| > n^\eta) = O(n^{-\eta})$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|a_n| > n^\eta) < +\infty$, 因此根据波莱尔-坎特利引理, 对于几乎每一个 ω , 存在 $n_0(\omega)$ 使得 $|a_n(\omega)| \leq n^\eta$ 对于 $n \geq n_0(\omega)$ 成立, 这给出了 $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{s_0}}$ 的收敛性, 并且我们的主定理仍然适用。

□

3.2. 非零极限. 我们已经注意到, 当 a_j 非负时, 极限并不消失。在随机独立的 a_n 情况下, 即使对于带符号的变量, 极限为零的可能性也非常小。

定理 3. 假设 a_i 的、 m_i 的、 b_i 的和 s_0 满足定理 2 的假设, 并且假设 (a_n) 是独立随机变量序列, 其中至少存在一个 $j_0 \geq 0$ 使得 a_{j_0} 不是原子的。然后, 极限 $L = \sum_{j=0}^{+\infty} \ell_j a_j$ 是非原子的, 特别是 $\mathbb{P}(L = 0) = 0$ 。

Proof. 由独立性可知, L 的特征函数满足

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\phi_L(t)| = \prod_{j=0}^{+\infty} |\phi_{\ell_j a_j}(t)| \leq |\phi_{\ell_{j_0} a_{j_0}}(t)|.$$

因此

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\phi_L(t)|^2 dt \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\phi_{\ell_{j_0} a_{j_0}}(t)|^2 dt = 0,$$

这表明 L 是非原子的 (参见例如 Durrett [5], 第 3.3 节)。

□

3.3. 指数矩.

定理 4. 假设 m_i 的、 b_i 的和 s_0 满足定理 1 的假设, 并且 (a_n) 是一序列独立随机变量。序列 $(X_n)_{n \geq 0}$ 由 $X_0 = a_0$ 和递推公式 (1) 定义。

- 如果存在一个具有指数矩的分布 μ , 使得对于每个 $n \geq 0$, $|a_n|$ 被 μ^{*n} 随机支配, 那么对于每个 n , $|X_n|$ 具有指数矩。
- 如果 $s_0 > 1$ (或等价地, $\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{m_j} > 1$) 且存在一个具有指数矩的分布 μ , 使得对于每个 $n \geq 0$, $|a_n|$ 都以概率上被 μ 所支配, 则 $\frac{X_n}{n^{s_0}} \rightarrow L$ 几乎必然成立, 其中 $|L|$ 具有指数矩。
- 如果 $s_0 > 2$ (或等价地 $\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{m_j^2} > 1$) 且存在一个具有指数矩的分布 μ , 使得对于每个 $n \geq 0$, $|a_n|$ 被 μ^{*n} 随机支配, 则 $\frac{X_n}{n^{s_0}} \rightarrow L a.s.$ 其中 $|L|$ 具有指数矩。

Proof. 我们从一个简单的引理开始：

引理 1. 令 X 是一个随机变量具有 $\mathbb{E}(e^{\alpha X}) < +\infty$ 和 Y 是一个遵循指数定律的随机变量 $\mathcal{E}(\alpha)$ 然后，对于 $a = \frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ ，我们有随机支配 $X \prec Y + a$ 。

Proof. 我们只需证明对于 $t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y + a \geq t)$ ，或者等价地，对于 $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t - a)$ 。对于 $t \leq a$ ，我们有 $\mathbb{P}(X \geq t) \leq 1 = \mathbb{P}(Y \geq t - a)$ 。对于 $t \geq a$ ，马尔可夫不等式给出

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\alpha X}}{e^{\alpha t}} = \frac{e^{\alpha a}}{e^{\alpha t}} = \exp(-\alpha(t - a)) = P(Y \geq t - a).$$

这完成了证明。 $\square$

现在，我们有 a 和 α ，使得对于每一个 $n \geq 1$

$$|a_n| \prec \mu^{*n} \prec (\delta^a * \mathcal{E}(\alpha))^{*n} = \delta^{na} * \Gamma(n, \theta).$$

令 $(Z_n)_{n \geq 0}$ 是一组独立变量，具有 $Z_n \sim \Gamma(n, \theta)$ ，其中 $\Gamma(a, \gamma)$ 是具有密度的定律

$$x \mapsto \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

$\frac{|X_n|}{n^{s_0}}$ 是由... 随机支配的

$$M \sum_{j=0}^n \frac{ja + Z_j}{(j+1)^{s_0}},$$

因此对于 $t < 1/\alpha$ ，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t \frac{|X_n|}{n^{s_0}}}) &\leq \exp(Ma \sum_{j=1}^{n+1} j^{-s_0}) \prod_{j=0}^n \mathbb{E} \exp(\frac{tZ_j}{(j+1)^{s_0}}) \\ &\leq \exp(Ma \sum_{j=1}^{n+1} j^{-s_0}) \prod_{j=0}^n (1 - \frac{\alpha t}{(j+1)^{s_0}})^{-j}. \end{aligned}$$

当 j 足够大时， $(1 - \frac{\alpha t}{(j+1)^{s_0}})^{-j} \leq \exp(\frac{\alpha t}{j^{s_0-1}})$ 表明存在一个指数矩对于 $s_0 > 2$ 。

在 $|a_n| \prec \mu$ 和 $s_0 > 1$ 的情况下的证明是类似的。 $\square$

作为一个由 μ^{*n} 支配的例子，我们可以考虑一个递归函数被调用时带有参数 n 的情况，该函数需要使用接受-拒绝方法进行 n 次模拟。然后， a_n 出现为遵循几何分布 $\mu = \mathcal{G}(p)$ 的 n 个独立变量之和。

REFERENCES

- [1] Mohamad Akra and Louay Bazzi. On the solution of linear recurrence equations. *Comput. Optim. Appl.*, 10(2):195–210, 1998.
- [2] D. Choimet and H. Queffélec. *Twelve landmarks of twentieth-century analysis*. Cambridge University Press, New York, 2015. Illustrated by Michaël Monerau, Translated from the 2009 French original by Danièle Gibbons and Greg Gibbons, With a foreword by Gilles Godefroy.
- [3] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Stein. *Introduction to Algorithms*. PHI Learning, 2010.
- [4] Michael Drmota and Wojciech Szpankowski. A master theorem for discrete divide and conquer recurrences. *J. ACM*, 60(3):Art. 16, 49, 2013.
- [5] Rick Durrett. *Probability—theory and examples*, volume 49 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019. Fifth edition of [MR1068527].
- [6] P. Erdős, A. Hildebrand, A. Odlyzko, P. Pudaite, and B. Reznick. The asymptotic behavior of a family of sequences. *Pacific J. Math.*, 126(2):227–241, 1987.
- [7] Michael T. Goodrich and Roberto Tamassia. *Algorithm Design: Foundations, Analysis, and Internet Examples*. Wiley, 2002.
- [8] Salvador Roura. Improved master theorems for divide-and-conquer recurrences. *J. ACM*, 48(2):170–205, 2001.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-54000 NANCY, FRANCE
Email address: `Olivier.Garet@univ-lorraine.fr`