

Liouville 性质和图上的非负 Ollivier 曲率

Jürgen Jost*

Florentin Münch[†]

Christian Rose[‡]

2025 年 4 月 8 日

摘要

对于具有非负 Ollivier 曲率的图，我们证明了 Liouville 性质，即每个有界调和函数都是常数。作为应用，我们将这一结果应用于直线上的零范围过程以及满足某些凸性条件的带势格点上。此外，我们在正 Ollivier 曲率下改进了 Ollivier 关于测度集中性的结果。

1 介绍

一般来说，从非负 Ollivier 曲率导出分析或几何性质似乎非常困难。事实上，这一类的结果似乎还不多为人知。我们证明具有非负 Ollivier 曲率的图满足 Liouville 属性，这似乎是假设非负 Ollivier 曲率下的第一个分析结果。

相比之下，非负的 Bakry Emery 曲率对热半群有着强烈的、众所周知的影响。特别是，热方程有界解的梯度衰减类似于 $1/\sqrt{t}$ 或更快 [LL15, GL17, KM18]，这暗示了 Harnack [CLY14] 和 Buser 不等式 [LMP15, KKRT16, LP18, Liu18]，以及以谱隙为单位的直径下限 [CLY14]，并且可以几乎立即使用梯度衰减来证明 Liouville 性质 [Hua17]。通过采用 Bakry Emery 曲率的非线性修改，可以获得更强的 Li-Yau 类型的梯度估计 [Mün18, BHL⁺15, DKZ17, HLLY17, Mün17]。

建立这种在非负 Ollivier 曲率下的梯度衰减是该领域的主要开放问题之一。因此，在研究 Ollivier 曲率时，调查与梯度衰减密切相关的 Liouville 性质是一个重要的步骤。

*MPI Leipzig, jost@mis.mpg.de

[†]MPI Leipzig, muench@mis.mpg.de

[‡]MPI Leipzig, crose@mis.mpg.de

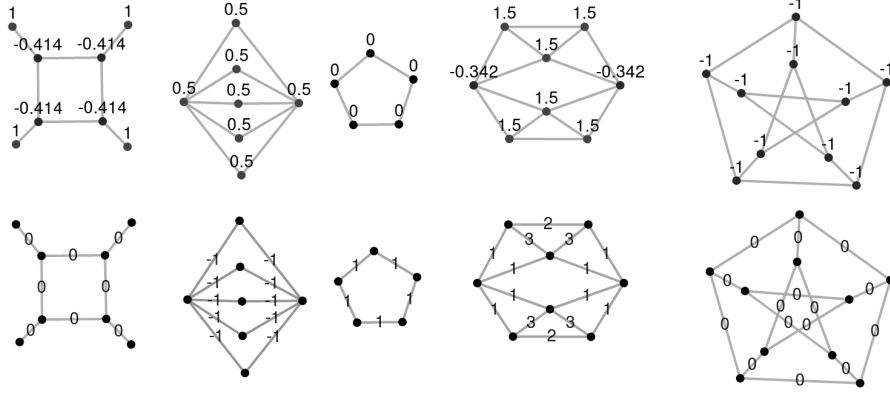


图 1: 上一行显示了未归一化的 Bakry-Emery 曲率。下一行显示了从 [MW17] 的未归一化的 Ollivier 曲率。曲率是由图曲率计算器 [CKL⁺17] 计算得出的。

如图 1 所示，非负 Bakry-Emery 曲率和非负 Ollivier 曲率之间没有蕴含关系。我们注意到，从本质上讲，Bakry-Emery 曲率定义在顶点上，可以被视为 Ricci 曲率张量在一个点上的最小特征值的类比，而 Ollivier 曲率定义在边上。此外，在本文中，我们指的是 Lin-Lu-Yau 对 Ollivier 曲率的修正版本，它对应于懒惰随机游走，并且总是大于或等于非懒惰随机游走的 Ollivier 曲率，见 [LLY11]。

本文中我们解决的另一个重要问题是提供具有非负 Ollivier 曲率的无限图的有趣示例。之前已知具有非负 Ollivier 曲率的无限图包括某些生灭链、反树 [CLM⁺17] 以及 Liouville 性质要么众所周知，要么我们的定理不适用的 Cayley 图。在这里，我们展示了在线零范围过程和带有适当势能的格子也具有非负 Ollivier 曲率，并因此满足 Liouville 性质。

尽管非负 Ollivier 曲率存在许多开放性问题，但正 Ollivier 曲率的情况已经被很好地理解。特别是，Ollivier 曲率的正下界意味着直径上限、特征值估计以及测度集中 [Oll09, BJL12]。在这篇笔记中，我们通过应用来自 [Sch98] 的方法来改进测度集中。

1.1 设置和符号约定

一个测量和加权的图 $G = (V, w, m)$ 是由可数集 V 、一个在对角线上为零的对称函数 $w : V \times V \rightarrow [0, \infty)$ 以及一个函数 $m : V \rightarrow (0, \infty)$ 组成的三元组。每当 $w(x, y) > 0$ 时，我们写作 $x \sim y$ 。我们将始终假设局部分有限性，即对于所有的 $x \in V$,

$$|\{y : w(x, y) > 0\}| < \infty.$$

我们写作 $q(x, y) := w(x, y)/m(x)$ 并定义 $\Delta : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ 为

$$\Delta f(x) := \sum_y q(x, y)(f(y) - f(x)).$$

注意 $\Delta \leq 0$ ，即对于所有具有有限支撑的 $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 有 $\sum_x m(x)f(x)\Delta f(x) \leq 0$ 。我们说一个函数 $f \in \mathbb{R}^V$ 是谐波如果 $\Delta f = 0$ 。我们将 $x \in V$ 的加权顶点度表示为 $\text{Deg}(x) := \sum_y q(x, y)$ ，参见例如 [HKMW13, Section 2.2]。在马尔可夫链的设置中，加权顶点度通常被称为跳跃率 $J(x)$ ，参见例如 [FS18]。我们写

$$\text{Deg}_{\max} := \sup_{x \in V} \text{Deg}(x) \quad \text{and} \quad q_{\min} := \inf_{x \sim y} q(x, y).$$

组合图距离被定义为

$$d(x, y) := \inf\{n : x = x_0 \sim \dots \sim x_n = y\}.$$

给定图距离, 我们定义梯度 $\nabla_{xy}f$ 对于 $f \in \mathbb{R}^V$ 和 $x \neq y \in V$ 通过

$$\nabla_{xy}f := \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}.$$

对于 $f \in \mathbb{R}^V$, 我们写 $\|f\|_\infty := \sup_{x \in V} |f(x)|$ 和

$$\|\nabla f\|_\infty := \sup_{x \sim y} \nabla_{xy}f.$$

Ollivier 曲率, 也称为粗 Ricci 曲率, 在 [Oll07, Oll09] 中引入了离散 Markov 链。修改已被定义在 [LLY11] 和 [JL14] 中, 以便计算随机图的曲率并将其与聚类系数相关联。在这篇文章中, 我们使用来自 [MW17] 的广义 Ollivier 曲率版本, 该版本适用于所有加权图拉普拉斯算子。由 [MW17], Ollivier 曲率 $\kappa(x, y)$ 对于 $x \neq y \in V$ 给出为

$$\kappa(x, y) := \inf_{\substack{\nabla_{yx}f=1 \\ \|\nabla f\|_\infty=1}} \nabla_{xy}\Delta f.$$

这个定义与林、卢、丘所引入的修改后的曲率 [LLY11] 在后者有定义时一致, 即, 当 $\text{Deg} \equiv 1$ 和 $w(x, y) \in \{0, 1\}$ 时, 见 [MW17, Theorem 2.1]。由 [MW17, Proposition 2.4] 可知, 曲率也可以通过传输计划来计算。将 Lipschitz 函数与最优传输计划联系起来是证明 Liouville 性质的关键步骤。因此, 我们回顾 [MW17, Proposition 2.4]。

命题 1.1 (参见 [MW17, Proposition 2.4])。设 $G = (V, w, m)$ 为一个图, 设 $x_0 \neq y_0$ 为顶点。那么,

$$\kappa(x_0, y_0) = \sup_{\rho} \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y) \left[1 - \frac{d(x, y)}{d(x_0, y_0)} \right] \quad (1)$$

其中上确界是针对所有 $\rho : B_1(x_0) \times B_1(y_0) \rightarrow [0, \infty)$ 而言的, 使得

$$\sum_{y \in B_1(y_0)} \rho(x, y) = q(x_0, x) \quad \text{for all } x \in S_1(x_0) \text{ and} \quad (2)$$

$$\sum_{x \in B_1(x_0)} \rho(x, y) = q(y_0, y) \quad \text{for all } y \in S_1(y_0). \quad (3)$$

我们注意到 ρ 定义在球上, 但我们仅要求其在球面上具有耦合性质。此外, 我们不假设 ρ 是一个概率测度。一个在 (1) 中达到上确界的函数 ρ 被称为最优传输计划。由于紧致性, 总是存在一个最优传输计划。

2 Liouville 性质和非负 Ollivier 曲率

谐函数的研究, 特别是具有非负里奇曲率的流形上的李乌维勒性质, 可以追溯到 [Yau75], 并且仍然是当前研究的主题 [CMW19]。图上的李乌维勒类型性质已在例如 [Woe00, Mas09, BS96] 中进行了研究。我们现在展示我们的主要定理, 该定理表明, 在假设非负奥利维尔曲率的情况下, 每一个有界的调和函数都是常数。

定理 2.1. 令 $G = (V, w, m)$ 为一个图。假设

- $\text{Deg}_{\max} < \infty$,
- $q_{\min} > 0$,
- $\kappa(x, y) \geq 0$ 对于所有 $x \neq y \in V$ 。

那么, 每一个有界的调和函数都是常数。

我们注意到假设 $\kappa(x, y) \geq 0$ 比在非怠惰随机游走设置中假设非负 Ollivier 曲率要弱。为了证明该定理, 首先需要关于运输计划的引理, 即如果 $\kappa(x_0, y_0) \leq \varepsilon$, 则存在一个最优运输计划, 可以将大量的质量运输距离 $d(x_0, y_0) + 1$ 。

引理 2.2. 假设对于某些 $x_0, y_0 \in V$ 和某些 $\varepsilon > 0$ 成立 $d(x_0, y_0)\kappa(x_0, y_0) \leq \varepsilon$ 。那么, 存在一个最优传输计划 $\rho: B_1(x_0) \times B_1(y_0) \rightarrow [0, \infty)$, 使得

$$\sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) \geq (q_{\min} - \varepsilon)/2.$$

值得注意的是, 在非惰性随机游走设置中, 此引理失效, 这一点可以从具有标准权重的一维晶格 $\mathbb{Z}$ 上看出。

证明. 令 ρ_0 是一个最优运输计划, 并且令 $x' \sim x_0$ 满足 $d(x', y_0) = d(x_0, y_0) - 1$ 。我们想要构建一个将大量质量运输到距离 $d(x_0, y_0) + 1$ 的最优运输计划。为此, 我们将构建一个运输大量质量的距离短于 $d(x_0, y_0)$ 的最优运输计划, 这在曲率较小时会很有用, 因为平均运输距离接近 $d(x_0, y_0)$ 。特别是, 我们的运输计划将具有这样的性质: x' 仅被运输到满足 $d(x', y) \leq d(x_0, y_0) - 1$ 的顶点 $y \in B_1(y_0)$ 。我们定义一个映射 $\rho: B_1(x_0) \times B_1(y_0) \rightarrow [0, \infty)$, 它将成为我们的新的最优运输计划通过

$$\rho(x, y) := \begin{cases} \rho_0(x, y_0) + \sum_{\substack{z \in B_1(y_0) \\ d(x', z) \geq d(x_0, y_0)}} \rho_0(x', z) & : x = x', y = y_0, \\ 0 & : x = x', d(x', y) \geq d(x_0, y_0), \\ \rho_0(x_0, y) + \rho_0(x', y) & : x = x_0, d(x', y) \geq d(x_0, y_0), \\ \rho_0(x, y) & : \text{otherwise.} \end{cases}$$

。

我们现在证明 ρ 也是一个最优运输计划。为此, 我们首先展示 ρ 满足边缘条件。对于 $x = x'$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{y \in B_1(y_0)} \rho(x', y) &= \rho(x', y_0) + \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \rho(x', y) + \sum_{\substack{d(x', y) < d(x_0, y_0) \\ y \neq y_0}} \rho(x', y) \\ &= \left(\rho_0(x', y_0) + \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \rho_0(x', y) \right) + 0 + \sum_{\substack{d(x', y) < d(x_0, y_0) \\ y \neq y_0}} \rho_0(x', y) \\ &= \sum_{y \in B_1(y_0)} \rho_0(x', y) \\ &= q(x_0, x'). \end{aligned}$$

对于 $x \in S_1(x_0) \setminus \{x'\}$, 我们有 $\rho(x, y) = \rho_0(x, y)$ 对于所有 $y \in B_1(y_0)$, 因此,

$$\sum_{y \in B_1(y_0)} \rho(x, y) = \sum_{y \in B_1(y_0)} \rho_0(x, y) = q(x_0, x).$$

对于 $y \in S_1(y_0)$ 使得 $d(x', y) < d(x_0, y_0)$ 我们有 $\rho(x, y) = \rho_0(x, y)$ 对于所有的 $x \in B_1(x_0)$, 从而,

$$\sum_{x \in B_1(x_0)} \rho(x, y) = \sum_{x \in B_1(x_0)} \rho_0(x, y) = q(y_0, y).$$

对于 $y \in S_1(y_0)$ 使得 $d(x', y) \geq d(x_0, y_0)$ 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B_1(x_0)} \rho(x, y) &= \rho(x_0, y) + \rho(x', y) + \sum_{x \in S_1(x_0) \setminus \{x'\}} \rho(x, y) \\ &= \left(\rho_0(x_0, y) + \rho_0(x', y) \right) + 0 + \sum_{x \in S_1(x_0) \setminus \{x'\}} \rho_0(x, y) \\ &= \sum_{x \in B_1(x_0)} \rho_0(x, y) = q(y_0, y). \end{aligned}$$

这证明了 ρ 确实是一个运输计划。为了显示 ρ 是最优的, 通过 ρ_0 的最优性, 只需表明

$$\sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y) \left(d(x_0, y_0) - d(x, y) \right) \geq \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho_0(x, y) \left(d(x_0, y_0) - d(x, y) \right)$$

我们将它写为 $C(x, y) := \left(\rho(x, y) - \rho_0(x, y) \right) \left(d(x_0, y_0) - d(x, y) \right)$ 。因此, 只需证明

$$\sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} C(x, y) \geq 0.$$

因为当 $\rho(x, y) = \rho_0(x, y)$ 成立时, 有 $C(x, y) = 0$, 我们得到

$$\sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} C(x, y) = C(x', y_0) + \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \left(C(x', y) + C(x_0, y) \right).$$

注意到由于当 $d(x', y) \geq d(x_0, y_0)$ 成立时, 有 $\rho(x', y) = 0$, 我们有

$$C(x', y_0) = \left(\sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \rho_0(x', y) \right) \cdot \left(d(x_0, y_0) - d(x', y_0) \right) = \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \rho_0(x', y).$$

如果 $d(y, x') \geq d(x_0, y_0)$ 成立, 则有

$$C(x', y) = -\rho_0(x', y) \left(d(x_0, y_0) - d(x', y) \right)$$

和

$$C(x_0, y) = \rho_0(x', y) \left(d(x_0, y_0) - d(x_0, y) \right)$$

因此,

$$C(x', y) + C(x_0, y) = \rho_0(x', y) \left(d(x', y) - d(x_0, y) \right) \geq -\rho_0(x', y)$$

因为 $|d(x', y) - d(x_0, y)| \leq d(x_0, x') = 1$ 。组合得到

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} C(x, y) &= C(x', y_0) + \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} (C(x', y) + C(x_0, y)) \\ &\geq \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \rho_0(x', y) - \sum_{d(x', y) \geq d(x_0, y_0)} \rho_0(x', y) = 0 \end{aligned}$$

这证明了 ρ 是一个最优传输方案。注意通过传输计划 ρ ，顶点 x' 只被传输到具有 $d(x', y) < d(x_0, y_0)$ 的顶点 y ，即，

$$q(x_0, x') = \sum_y \rho(x', y) = \sum_{d(x', y) < d(x_0, y_0)} \rho(x', y).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq d(x_0, y_0) \kappa(x_0, y_0) = \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y) (d(x_0, y_0) - d(x, y)) \\ &\geq \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) < d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) - 2 \cdot \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) \\ &\geq \sum_{\substack{y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) < d(x_0, y_0)}} \rho(x', y) - 2 \cdot \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) \\ &= q(x_0, x') - 2 \cdot \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) \end{aligned}$$

其中第二个估计来自 $d(x_0, y_0) - d(x, y) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 。

因此，

$$\sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) \geq (q(x_0, x') - \varepsilon)/2 \geq (q_{\min} - \varepsilon)/2.$$

这完成了证明。 □

为了简单起见，我们写成 $D := \text{Deg}_{\max}$ 和 $q := q_{\min}$ 。

引理 2.3. 令 f 为一个具有 $\|\nabla f\|_\infty = 1$ 的调和函数。令 $\varepsilon \in (0, q/4D)$ ，并且令 $x_0 \neq y_0$ 满足 $f(x_0) - f(y_0) \geq d(x_0, y_0) - \varepsilon$ 。然后，存在 $x' \in B_1(x_0)$ 和 $y' \in B_1(y_0)$ 满足条件。

- $f(x') - f(y') > d(x', y') - \varepsilon \cdot 10D/q$,
- $d(x', y') > d(x_0, y_0)$.

证明. 定义 $g_0 : B_1(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 通过

$$g_0(w) := f(w) \wedge (f(x_0) - d(x_0, y_0) + d(y_0, w)).$$

然后, g_0 是 1-Lipschitz, 作为两个 1-Lipschitz 函数的最小值。令 $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ 为由

$$g(z) := \max_{w \in B_1(x_0)} g_0(w) - d(w, z).$$

给定的 g_0 的极小 Lipschitz 扩张对于所有的 $z \in V$ 和所有 $w \in B_1(x_0)$, 条件 $\|\nabla f\|_\infty = 1$ 导致

$$f(z) \geq f(w) - d(z, w) \geq g_0(w) - d(z, w)$$

这蕴含了 $f \geq g$ 。由于 g_0 是 1-利普希茨的, 我们有 $g_0 = g|_{B_1(x_0)}$ 。注意到 g 作为 1-利普希茨函数的最大值是 1-利普希茨的。因此, $g(y_0) \geq g(x_0) - d(x_0, y_0)$ 。另一方面, 我们有

$$g(y_0) \leq \max_{w \in B_1(x_0)} (f(x_0) - d(x_0, y_0) + d(y_0, w)) - d(w, y_0) = f(x_0) - d(x_0, y_0).$$

由于 $f(x_0) = g_0(x_0) = g(x_0)$, 我们得到 $g(y_0) \leq f(x_0) - d(x_0, y_0) = g(x_0) - d(x_0, y_0) \leq g(y_0)$ 这表明 $g(y_0) = g(x_0) - d(x_0, y_0)$ 。此外对于 $w \in B_1(x_0)$,

$$f(x_0) - d(x_0, y_0) + d(y_0, w) \geq f(y_0) - \varepsilon + d(y_0, w) \geq f(w) - \varepsilon$$

得出 $g(w) = g_0(w) \geq f(w) - \varepsilon$ 。因此, $\Delta g(x_0) \geq \Delta f(x_0) - D\varepsilon$ 由 Δ 的定义给出。由于 $g(y_0) = f(x_0) - d(x_0, y_0) \geq f(y_0) - \varepsilon$ 且由于 $g \leq f$, 我们有 $\Delta g(y_0) \leq \Delta f(y_0) + D\varepsilon$ 。由于 $\nabla_{x_0 y_0} g = \|\nabla g\|_\infty = 1$, κ 的定义给出

$$d(x_0, y_0) \kappa(x_0, y_0) \leq \Delta g(y_0) - \Delta g(x_0) \leq 2D\varepsilon.$$

我们有 $g(y) - g(x) \geq -d(x, y)$ 。设

$$H := \min_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} d(x, y) - g(x) + g(y) \geq 0$$

其中取最小值的集合不为空是因为引理 2.2 并且由于局部有限性而为有限集。令 ρ 为来自引理 2.2 的最优传输计划。我们写

$$\begin{aligned} 2D\varepsilon &\geq \Delta g(y_0) - \Delta g(x_0) \geq \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y)(g(y) - g(y_0)) - \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y)(g(x) - g(x_0)) \\ &= \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y)(g(y) - g(x) + d(x_0, y_0)) \\ &\geq \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0)}} \rho(x, y)(d(x_0, y_0) - d(x, y)) + \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y)(d(x, y) - g(x) + g(y)) \\ &\geq d(x_0, y_0) \kappa(x_0, y_0) + H \sum_{\substack{x \in B_1(x_0) \\ y \in B_1(y_0) \\ d(x, y) > d(x_0, y_0)}} \rho(x, y) \\ &\geq H(q - 2D\varepsilon)/2 \end{aligned}$$

其中最后一个估计值来自于引理 2.2。因此, $H \leq \frac{4D\varepsilon}{q - 2D\varepsilon}$ 。特别是存在 $x' \in B_1(x_0)$ 和 $y' \in B_1(y_0)$, 使得 $d(x', y') > d(x_0, y_0)$ 成立, 其中

$$g(x') - g(y') \geq d(x', y') - \frac{4D\varepsilon}{q - 2D\varepsilon} \geq d(x', y') - 8D\varepsilon/q$$

最后一估计来自 $\varepsilon < \frac{q}{4D}$ 。我们现在证明 g 近似于 f ，以求得 $f(x') - f(y')$ 的下界。我们有 $g(x') \leq f(x')$ 和

$$\begin{aligned} -D\varepsilon \leq \Delta g(x_0) &\leq \Delta g(y_0) = \Delta g(y_0) - \Delta f(y_0) = D(f(y_0) - g(y_0)) - \sum_{y \sim y_0} q(y_0, y)(f(y) - g(y)) \\ &\leq D\varepsilon - q(y_0, y')(f(y') - g(y')). \end{aligned}$$

因此，

$$f(y') \leq g(y') + 2D\varepsilon/q(y_0, y') \leq g(y') + 2D\varepsilon/q.$$

结合得到

$$f(x') - f(y') \geq g(x') - g(y') - 2D\varepsilon/q \geq d(x', y') - \varepsilon \cdot 10D/q.$$

这完成了证明。 $\square$

我们回顾 $D = \text{Deg}_{\max}$ 和 $q = q_{\min}$ 。

定理的证明 2.1. 令 f 是一个有界调和函数。则， $\|\nabla f\|_\infty < \infty$ 。如果 f 不是常数，我们可以假设 $\|\nabla f\|_\infty = 1$ 而不产生阻碍。令 $2\|f\|_\infty < N \in \mathbb{N}$ 。令 $\varepsilon < (\frac{q}{10D})^N$ 很小。令 $x_0 \sim y_0$ 使得 $\nabla f(x_0, y_0) > 1 - \varepsilon$ 。我们归纳地应用引理 2.3 来构造序列 $(x_n)_{n=0}^N$ 和 $(y_n)_{n=0}^N$ ，它们具有以下性质：

- $d(x_n, y_n) \geq n + 1$,
- $f(x_n) - f(y_n) \geq d(x_n, y_n) - \varepsilon \cdot (10D/q)^n$.

特别是给定 x_n 和 y_n ，我们通过归纳假设得到 $d(x_n, y_n) \geq n+1$ 和 $f(x_n) - f(y_n) \geq d(x_n, y_n) - \varepsilon \cdot (10D/q)^n$ 。我们现在应用引理 2.3 来获得 x', y' 和 $d(x', y') > d(x_n, y_n)$ 以及

$$f(x') - f(y') \geq d(x', y') - (\varepsilon \cdot (10D/q)^n) \cdot 10D/q = d(x', y') - \varepsilon \cdot (10D/q)^{n+1}.$$

因此我们设定 $x_{n+1} := x'$ 和 $y_{n+1} := y'$ 满足所需的性质。特别是，

$$\|f\|_\infty + \|f\|_\infty \geq f(x_N) - f(y_N) > d(x_N, y_N) - 1 \geq N + 1 - 1 > 2\|f\|_\infty.$$

这是矛盾的，因此， f 是常数。这完成了证明。 $\square$

3 示例

除了阿贝尔凯莱图，已知没有多少无穷马尔可夫链具有非负奥利维耶曲率。一个有趣的例子是所谓的反树，甚至在任何地方都有正曲率 [CLM⁺17]，但不满足我们奥利维叶性质定理中的 $q_{\min}$ 假设。在这里，我们介绍了两类具有非负奥利维耶曲率的无穷马尔可夫链的重要例子，即直线和带势格子上的零范围过程。

3.1 直线上的零范围过程

零范围过程是重要的相互作用粒子系统，由斯皮策在 [Spi91] 中提出。

零范围过程在无限直线上的数据如下：

- n 粒子
- 顶点集 $V = \{x \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}} : \|x\|_1 = n\}$
- 速率函数 $r : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ 非递减且与 $r(0) = 0$ 相关 $r(1) > 0$
- 跳转率 $q(x, x - e_i + e_j) := r(x_i)$ 每当 $|i - j| = 1$
- $q(x, y) = 0$ 否则

这里， $e_i \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ 表示单位向量，而 x_i 表示顶点 x 的 i 分量。众所周知，相应的连续时间马尔可夫链是可逆的，因此可以表示为加权图。

定理 3.1. 零范围过程在线上的 Ollivier 曲率是非负的。此外， $q_{\min} \geq r(1)$ 和 $\text{Deg}_{\max} \leq 2nr(n)$ 。

证明. 为了展示非负 Ollivier 曲率，提供一个合适的运输计划就足够了。令 $x \sim y$ 和 $z := x \wedge y$ 。然后， $x = z + e_i$ 和 $y = z + e_j$ 对于某个 $i, j \in \mathbb{Z}$ 且 $|i - j| = 1$ 。我们假设无障碍地定义 $j = i + 1$ 我们现在为命题 1.1 定义一个传输计划 ρ

$$\rho(x', y') := \begin{cases} r(x_i) & : x' = y' = y \\ r(y_j) & : x' = y' = x \\ r(z_k) & : x' = x - e_k + e_{k\pm 1}, y' = y - e_k + e_{k\pm 1}, \{x', y'\} \cap \{x, y\} = \emptyset \\ r(x_i) - r(z_i) & : y' = y, x' = x - e_i + e_{i-1} \\ r(y_j) - r(z_j) & : x' = x, y' = y - e_j + e_{j+1} \\ r(x_j) & : y' = y, x' = x - e_j + e_i \\ r(y_i) & : x' = x, y' = y - e_i + e_j \end{cases}$$

并且其他情况为零。直接验证 ρ 是一个可行的运输计划。此外，前两种情况的运输距离为零，第三种情况的运输距离为一，其余情况的运输距离为二。因此，

$$\sum_{x', y'} \rho(x', y') (d(x, y) - d(x', y')) = r(x_i) + r(y_j) - (r(x_i) - r(z_i)) - (r(y_j) - r(z_j)) - r(x_j) - r(y_i) = 0$$

作为 $z_i = y_i$ 和 $z_j = x_j$ 。根据命题 1.1，这表明 $\kappa(x, y) \geq 0$ 。“此外”断言 $q_{\min} \geq r(1)$ 是显然的，并且声明 $\text{Deg}_{\max} \leq 2nr(n)$ 成立，因为每个顶点最多有 $2n$ 个邻居，并且跳跃率至多为 $r(n)$ 。这完成了证明。 $\square$

应用定理 2.1 得出以下推论。

推论 3.2. 零范围过程满足刘维尔性质，即每一个有界调和函数都是常数。

3.2 具有势的格结构

在带权重函数 f 的加权流形上, 广义 Ricci 曲率满足 $\text{Ric} = \text{Ric}_M + \text{Hess}(f)$ [LV09]。特别是, 在具有凸权重 f 的欧几里得空间上的 Ricci 曲率是非负的。在这里, 我们给出一个离散模拟。设 $\mathbb{Z}^n$ 为标准格点并且 $e^f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。加权跳跃速率由

$$q(x, y) = 1_{x \sim y} \exp(f(x) - f(y)).$$

给出。容易证明相应的时间连续马尔可夫链是可逆的, 并且可以表示为一个加权图。以下命题给出了一种关于格点上非负 Ollivier 曲率的某种凸性条件。

命题 3.3. 令 $x \in \mathbb{Z}^n$ 和 $y = x + e_i$ 对于某些 $i \leq n$ 。假设晶格上的 q 满足

$$q(x, y) + q(y, x) \geq q(x, x - e_i) + q(y, y + e_i) + \sum_{j \neq i} |q(x, x + e_j) - q(y, y + e_j)| + |q(x, x - e_j) - q(y, y - e_j)|.$$

然后, 边 (x, y) 具有非负的 Ollivier 曲率。

证明. 选择适当的运输计划, 左侧是通过零距离运输的质量, 而右侧是通过两距离运输的质量。应用命题 1.1 显示边 (x, y) 的 Ollivier 曲率非负性。□

我们现在应用上述命题来给出明确的示例。

示例 3.1. 设 $v \in \mathbb{R}^n$ 和 $x_0 \in V = \mathbb{Z}^n$ 。设 $c > 0$ 。定义

$$f(x) := c \cdot d(x, x_0) + \langle v, x \rangle.$$

然后, 由 $q(x, y) = 1_{x \sim y} \exp(f(x) - f(y))$ 定义的相应的马尔可夫链具有非负 Ollivier 曲率。此外, 所有有界的调和函数都是常数。

备注 1. 情况 $c = 0$ 也是允许的, 但此时马尔可夫链是偏向生灭链的笛卡尔积, 并且在这种情况下奥利维耶曲率的非负性是众所周知的。

示例的证明. 我们首先注意到对于 $i \neq j \leq n$ 和所有 $x \in \mathbb{Z}^n$, 我们有

$$f(x) - f(x + e_j) = f(x + e_i) - f(x + e_i + e_j).$$

因此, 结合 $y = x + e_i$,

$$\sum_{j \neq i} |q(x, x + e_j) - q(y, y + e_j)| + |q(x, x - e_j) - q(y, y - e_j)| = 0.$$

此外, f 沿着 $x + \mathbb{Z}e_i$ 是凸的, 这意味着

$$q(x, y) \geq q(y, y + e_i) \quad \text{and} \quad q(y, x) \geq q(x, x - e_i)$$

将一切结合起来表明非负 Ollivier 曲率通过命题 3.3。条件 $q_{\min} > 0$ 和 $\text{Deg}_{\max} < \infty$ 随着 f 梯度有界而成立。因此, 我们可以应用定理 2.1 来证明每个调和函数是常数。这完成了证明。□

4 测度集中现象

我们将 [Sch98] 中的方法应用于通过 Ollivier 的 [Oll09] 改进测度集中结果。在 [Sch98] 中，证明了在正的 Bakry Emery 曲率界下的测度集中。对于

$$f \in \ell^1(V, m) := \{g \in C(V) : \sum_{x \in V} m(x)|g(x)| < \infty\}$$

我们写出

$$\langle g \rangle := \sum_{x \in V} m(x)g(x).$$

我们现在陈述我们的浓度定理，该定理给出了 Lipschitz 函数偏离其平均值超过 r 的顶点的测度的一个高斯上界。非显式的浓度界限可以通过运输信息不等式以奥利维尔曲率的形式找到，参见 [FS18]。

定理 4.1. 设 $G = (V, w, m)$ 是一个图，并且设 $K > 0$ 。假设

- $\text{Deg}_{\max} \leq 1$,
- $m(V) = 1$,
- $\kappa(x, y) \geq K > 0$ 对于所有 $x \neq y \in V$ 。

设 $f \in \ell^1(V, m)$ 使得

- $\langle f \rangle = 0$,
- $\|\nabla f\|_{\infty} \leq 1$.

那么，

$$m(f > r) \leq e^{-Kr^2}.$$

这改进了奥利维尔的浓度结果 [Oll09, Theorem 33]，大致说明在相同假设下，

$$m(f > r) \leq e^{-K^2r^2}$$

如果 r 不太大。首先，指数中拥有 K 要优于 K^2 ，因为 $K \leq 2$ 是由于 $\text{Deg}_{\max} \leq 1$ 。其次，我们的集中结果成立而不限定于足够小的 r 。

证明. 我们首先观察到由于 [MW17, Proposition 4.14]， G 具有有限直径。因此，由于局部有穷性， G 是有限的。根据 [Sch98]，我们有

$$-\partial_t \langle e^{\lambda P_t f} \rangle = -\langle \lambda \Delta P_t f, e^{\lambda P_t f} \rangle = \langle \Gamma(\lambda P_t f, e^{\lambda P_t f}) \rangle \leq \lambda^2 \langle e^{\lambda P_t f}, \Gamma(P_t f) \rangle$$

其中 $2\Gamma(g, h) := \Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f$ 。此外，由 [MW17, Theorem 3.8]，且由于 $\text{Deg}_{\max} \leq 1$ ，

$$2\Gamma(P_t f) \leq \|\nabla P_t f\|_{\infty}^2 \leq e^{-2Kt} \|\nabla f\|_{\infty}^2 \leq e^{-2Kt}.$$

结合得到

$$-\partial_t \langle e^{\lambda P_t f} \rangle \leq \frac{\lambda^2}{2} e^{-2Kt} \langle e^{\lambda P_t f} \rangle.$$

从 $t = 0$ 积分到 ∞ 并应用 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda P_t f} = 1$ 得到

$$\langle e^{\lambda f} \rangle \leq e^{\frac{\lambda^2}{4K}}.$$

因此, 我们有

$$m(f > r) \leq e^{-\lambda r} \langle e^{\lambda f} \rangle \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{4K} - \lambda r\right) = \exp(-Kr^2)$$

当选择 $\lambda = 2rK$ 时。这完成了证明。 □

参考文献

- [BHL⁺15] Frank Bauer, Paul Horn, Yong Lin, Gabor Lippner, Dan Mangoubi, Shing-Tung Yau, et al. Li-Yau inequality on graphs. *Journal of Differential Geometry*, 99(3):359–405, 2015.
- [BJL12] Frank Bauer, Jürgen Jost, and Shiping Liu. Ollivier-Ricci curvature and the spectrum of the normalized graph Laplace operator. *Mathematical Research Letters*, 19(6):1185–1205, 2012.
- [BS96] Itai Benjamini and Oded Schramm. Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds, via circle packings. *Inventiones mathematicae*, 126(3):565–587, 1996.
- [CKL⁺17] David Cushing, Riikka Kangaslampi, Valtteri Lipiäinen, Shiping Liu, and George William Stagg. The Graph Curvature Calculator and the curvatures of cubic graphs. *arXiv preprint arXiv:1712.03033*, 2017.
- [CLM⁺17] David Cushing, Shiping Liu, Florentin Münch, and Norbert Peyerimhoff. Curvature calculations for antitrees. *Analysis and geometry on graphs and manifolds, London Mathematical Society Lecture Notes Series*, 2020.
- [CLY14] Fan Chung, Yong Lin, and S-T Yau. Harnack inequalities for graphs with non-negative Ricci curvature. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 415(1):25–32, 2014.
- [CMW19] Tobias Holck Colding, II Minicozzi, and P William. Liouville properties. *arXiv preprint arXiv:1902.09366*, 2019.
- [DKZ17] Dominik Dier, Moritz Kassmann, and Rico Zacher. Discrete versions of the Li-Yau gradient estimate. *arXiv preprint arXiv:1701.04807*, 2017.
- [FS18] Max Fathi and Yan Shu. Curvature and transport inequalities for Markov chains in discrete spaces. *Bernoulli*, 24(1):672–698, 2018.
- [GL17] Chao Gong and Yong Lin. Equivalent properties for CD inequalities on graphs with unbounded Laplacians. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 38(5):1059–1070, 2017.

- [HKMW13] Xueping Huang, Matthias Keller, Jun Masamune, and Radosław K. Wojciechowski. A note on self-adjoint extensions of the Laplacian on weighted graphs. *Journal of Functional Analysis*, 265(8):1556–1578, 2013.
- [HLLY17] Paul Horn, Yong Lin, Shuang Liu, and Shing-Tung Yau. Volume doubling, Poincaré inequality and Gaussian heat kernel estimate for non-negatively curved graphs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2017.
- [Hua17] Bobo Hua. Liouville theorem for bounded harmonic functions on graphs satisfying non-negative curvature dimension condition. *arXiv preprint arXiv:1702.00961*, 2017.
- [JL14] Jürgen Jost and Shiping Liu. Ollivier’s Ricci curvature, local clustering and curvature-dimension inequalities on graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 51(2):300–322, 2014.
- [KKRT16] Bo’az Klartag, Gady Kozma, Peter Ralli, and Prasad Tetali. Discrete curvature and abelian groups. *Canad. J. Math.*, 68(3):655–674, 2016.
- [KM18] Matthias Keller and Florentin Münch. Gradient estimates, Bakry-Emery Ricci curvature and ellipticity for unbounded graph Laplacians. *arXiv preprint arXiv:1807.10181*, 2018.
- [Liu18] Shuang Liu. Buser’s inequality on infinite graphs. *arXiv preprint arXiv:1810.12003*, 2018.
- [LL15] Yong Lin and Shuang Liu. Equivalent properties of CD inequality on graph. *arXiv preprint arXiv:1512.02677*, 2015.
- [LLY11] Yong Lin, Linyuan Lu, and Shing-Tung Yau. Ricci curvature of graphs. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 63(4):605–627, 2011.
- [LMP15] Shiping Liu, Florentin Münch, and Norbert Peyerimhoff. Curvature and higher order Buser inequalities for the graph connection Laplacian. *arXiv preprint arXiv:1512.08134*, 2015.
- [LP18] Shiping Liu and Norbert Peyerimhoff. Eigenvalue Ratios of Non-Negatively Curved Graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, pages 1–22, 2018.
- [LV09] John Lott and Cedric Villani. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. *Annals of Mathematics*, pages 903–991, 2009.
- [Mas09] Jun Masamune. A Liouville property and its application to the Laplacian of an infinite graph. *Contemporary Mathematics*, 484:103, 2009.
- [Mün17] Florentin Münch. Remarks on curvature dimension conditions on graphs. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 56(1):11, 2017.
- [Mün18] Florentin Münch. Li-Yau inequality on finite graphs via non-linear curvature dimension conditions. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 120:130–164, 2018.

- [MW17] Florentin Münch and Radosław K Wojciechowski. Ollivier Ricci curvature for general graph Laplacians: Heat equation, Laplacian comparison, non-explosion and diameter bounds. *arXiv preprint arXiv:1712.00875*, 2017.
- [Oll07] Yann Ollivier. Ricci curvature of metric spaces. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(11):643–646, 2007.
- [Oll09] Yann Ollivier. Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. *Journal of Functional Analysis*, 256(3):810–864, 2009.
- [Sch98] Michael Schmuckenschläger. Curvature of nonlocal Markov generators. *Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996)*, 34:189–197, 1998.
- [Spi91] Frank Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Mathematics*, 5:246–290, 1970.
- [Woe00] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138. Cambridge university press, 2000.
- [Yau75] Shing-Tung Yau. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(2):201–228, 1975.