关于 αp 模一在 Piatetski-Shapiro 素数上的分布

S. I. Dimitrov

摘要

设 $[\cdot]$ 为取整函数，$\|x\|$ 表示 x 到最近的整数的距离。在这篇论文中我们证明了，每当 α 是无理数且 β 是实数时，则对于任何固定的 $1 < c < 12/11$ 都存在无穷多个素数 p 满足不等式

$$\|\alpha p+\beta\| \ll p^{\frac{11c-12}{26c}} \log^6 p$$

并且使得 $p=[n^c]$。

关键词：模一分布，Piatetski-Shapiro 素数。

2020 数学主题分类：11J71·11J25·11P32·11L07

1　介绍与结果陈述

1947 年，Vinogradov[9] 证明了如果 $\theta = 1/5-\varepsilon$，则存在无穷多个素数 p 使得

$$\|\alpha p+\beta\| < p^{-\theta}\,. \tag{1}$$

随后，θ 的上限由几位作者改进，迄今为止最强的结果归功于 Matomäki[3]，其中 $\theta = 1/3-\varepsilon$ 和 $\beta = 0$。

另一方面，在 1953 年 Piatetski-Shapiro[4] 表明对于任何固定的 $\gamma \in (11/12, 1)$，序列

$$\left([n^{1/\gamma}]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

包含无穷多个素数。形式为 $p = [n^{1/\gamma}]$ 的素数被称为类型 γ 的 Piatetski-Shapiro 素数。随后，区间 γ 经历了多次改进，迄今为止最好的结果归功于 Rivat 和 Wu 的 [5]，对于

$\gamma \in (205/243, 1)$。更精确地说，他们证明了对于任何固定的 $205/243 < \gamma < 1$，下界

$$\sum_{\substack{p \le X \\ p = [n^{1/\gamma}]}} 1 \gg \frac{X^{\gamma}}{\log X} \tag{2}$$

成立。为了建立我们的结果，我们解决了带有 Piatetski-Shapiro 素数的 Vinogradov 不等式 (1)。因此，我们证明了以下定理。

定理 1. 令 γ 为固定值，$11/12 < \gamma < 1$，α 是无理数且 β 是实数。然后存在无限多个类型为 γ 的 *Piatetski-Shapiro* 质数 p，使得

$$\|\alpha p + \beta\| \ll p^{\frac{11-12\gamma}{26}} \log^6 p\,.$$

2 符号表示

令 C 是一个足够大的正数常量。字母 p 始终表示素数。符号 $x \sim X$ 意味着 x 在 $(X, 2X]$ 的一个子区间上运行，该子区间的端点在不同的公式中不必相同，且可能依赖于外部求和变量。通过 $[x]$，$\{x\}$ 和 $\|x\|$ 表示 x 的整数部分，x 的小数部分以及 x 到最近的整数的距离。此外，$e(t)= \exp(2\pi i t)$ 和 $\psi(t) = \{t\} - 1/2$。如常，$\Lambda(n)$ 是 von Mangoldt 函数而 $\tau(n)$ 表示 n 的正除数个数。令 γ 是一个实常数，使得 $11/12 < \gamma < 1$。由于 α 是无理数，因此它的连分数有无穷多个不同的收敛项 a/q，

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\,, \quad (a, q) = 1\,, \quad a \ne 0 \tag{3}$$

且 q 可以任意大。记

$$N = q^{\frac{13}{12-6\gamma}}\,; \tag{4}$$

$$\Delta = C N^{\frac{11-12\gamma}{26}} \log^6 N\,; \tag{5}$$

$$H = \left[q^{1/2}\right]\,; \tag{6}$$

$$M = N^{\frac{15-14\gamma}{26}}\,; \tag{7}$$

$$v = N^{\frac{29-8\gamma}{52}}\,. \tag{8}$$

3 预备引理

引理 1. 假设 $X, Y \geq 1$, $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$,$(a,q)=1$。那么

$$\sum_{n\leq X} \min\left(Y, \frac{1}{\|\alpha n+\beta\|}\right) \ll \frac{XY}{q} + Y + (X+q)\log 2q\,.$$

证明. 参见（[7]，引理 1）。 □

引理 2. 假设 $\alpha\in\mathbb{R}$，$a\in\mathbb{Z}$，$q\in\mathbb{N}$，$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$，$(a,q)=1$。如果

$$\mathcal{S}(X) = \sum_{p\leq X} e(\alpha p)\log p \tag{9}$$

那么

$$\mathcal{S}(X) \ll \left(Xq^{-1/2} + X^{4/5} + X^{1/2}q^{1/2}\right)\log^4 X\,.$$

证明. 参见（[1]，定理 13.6）。 □

引理 3. 对于任何 $M\geq 2$，我们有

$$\psi(t) = -\sum_{1\leq|m|\leq M} \frac{e(mt)}{2\pi i m} + \mathcal{O}\left(\min\left(1, \frac{1}{M\|t\|}\right)\right),$$

证明. 参见（[6]，引理 5.2.2）。 □

引理 4. 假设 $f''(t)$ 存在，在 $[a,b]$ 上连续且满足

$$f''(t) \asymp \lambda \quad (\lambda>0) \quad for \quad t\in[a,b]\,.$$

则

$$\left|\sum_{a<n\leq b} e(f(n))\right| \ll (b-a)\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}\,.$$

证明. 参见（[2]，第 1 章，定理 5）。 □

引理 5. 对于任何复数 $a(n)$，我们有

$$\left|\sum_{a<n\leq b} a(n)\right|^2 \leq \left(1+\frac{b-a}{Q}\right)\sum_{|q|\leq Q}\left(1-\frac{|q|}{Q}\right)\sum_{a<n,\,n+q\leq b}\overline{a(n+q)}a(n),$$

其中 $Q\geq 1$。

证明. 参见（[1]，引理 8.17）。 □

4　定理的证明

4.1　证明大纲

我们的方法回溯到 Vaughan 的 [7]。我们取一个周期为 1 的函数，使得

$$F_\Delta(\theta)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad -\frac{1}{2}\le\theta<-\Delta\,,\\ 1 & \text{if}\quad -\Delta\le\theta<\Delta\,,\\ 0 & \text{if}\quad \Delta\le\theta<\frac{1}{2}\,.\end{cases}\tag{10}$$

基于 (5) 和 (10) 我们有非平凡的和的下界

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p=[n^{1/\gamma}]}} F_\Delta(\alpha p+\beta)\log p$$

意味着定理 1。为此我们定义

$$\Gamma=\sum_{\substack{p\le N\\ p=[n^{1/\gamma}]}}\big(F_\Delta(\alpha p+\beta)-2\Delta\big)\log p\,.\tag{11}$$

4.2　Γ 的上界

我们将证明以下基本引理。

引理 6. 对于由 (11) 定义的求和 Γ,

$$\Gamma\ll N^{\frac{14\gamma+11}{26}}\log^6 N\tag{12}$$

成立。

证明. 从 (11) 我们写出

$$\Gamma=\sum_{p\le N}\big([-p^\gamma]-[-(p+1)^\gamma]\big)\big(F_\Delta(\alpha p+\beta)-2\Delta\big)\log p=\Gamma_1+\Gamma_2\,,\tag{13}$$

其中

$$\Gamma_1=\sum_{p\le N}\big((p+1)^\gamma-p^\gamma\big)\big(F_\Delta(\alpha p+\beta)-2\Delta\big)\log p\,,\tag{14}$$

$$\Gamma_2=\sum_{p\le N}\big(\psi(-(p+1)^\gamma)-\psi(-p^\gamma)\big)\big(F_\Delta(\alpha p+\beta)-2\Delta\big)\log p\,.\tag{15}$$

上界估计值对于 Γ_1

函数 $F_\Delta(\theta)-2\Delta$ 是众所周知的展开式

$$\sum_{1\le|h|\le H}\frac{\sin 2\pi h\Delta}{\pi h}\,e(h\theta)+\mathcal{O}\Bigg(\min\left(1,\frac{1}{H\|\theta+\Delta\|}\right)+\min\left(1,\frac{1}{H\|\theta-\Delta\|}\right)\Bigg). \tag{16}$$

我们还有

$$(p+1)^\gamma-p^\gamma=\gamma p^{\gamma-1}+\mathcal{O}\left(p^{\gamma-2}\right). \tag{17}$$

使用 (14),(16) 和 (17) 我们得到

$$\Gamma_1=\gamma\sum_{p\le N}p^{\gamma-1}\log p\sum_{1\le|h|\le H}\frac{\sin 2\pi h\Delta}{\pi h}\,e\big(h(\alpha p+\beta)\big)+\mathcal{O}\Big(\Sigma\log N\Big), \tag{18}$$

其中

$$\Sigma=\sum_{n=1}^{N}\Bigg(\min\left(1,\frac{1}{H\|\alpha n+\beta+\Delta\|}\right)+\min\left(1,\frac{1}{H\|\alpha n+\beta-\Delta\|}\right)\Bigg). \tag{19}$$

由 (3),(4),(6),(19) 和引理 1我们得到

$$\Sigma\ll Nq^{-1}+\frac{N+q}{H}\log N\ll Nq^{-1/2}\log N\ll N^{\frac{6\gamma+14}{26}}\log N. \tag{20}$$

现在 (18) 和 (20) 给我们

$$\Gamma_1\ll\sum_{h=1}^{H}\min\left(\Delta,\frac{1}{h}\right)\left|\sum_{p\le N}p^{\gamma-1}e(\alpha hp)\log p\right|+N^{\frac{6\gamma+14}{26}}\log^2 N. \tag{21}$$

记作

$$\mathfrak{S}(u)=\sum_{h\le u}\left|\sum_{p\le N}p^{\gamma-1}e(\alpha hp)\log p\right|. \tag{22}$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{H}\min\left(\Delta,\frac{1}{h}\right)\left|\sum_{p\le N}p^{\gamma-1}e(\alpha hp)\log p\right|&=\frac{\mathfrak{S}(H)}{H}+\int\limits_{\Delta^{-1}}^{H}\frac{\mathfrak{S}(u)}{u^2}\,du\\&\ll(\log N)\max_{\Delta^{-1}\le u\le H}\frac{\mathfrak{S}(u)}{u}.\end{aligned} \tag{23}$$

另一方面

$$\sum_{p\le N}p^{\gamma-1}e(\alpha hp)\log p=N^{\gamma-1}S(N)+(1-\gamma)\int\limits_{2}^{N}S(y)y^{\gamma-2}\,dy, \tag{24}$$

其中

$$S(y)=\sum_{p\le y}e(\alpha hp)\log p\,. \tag{25}$$

从狄利克雷近似定理可知存在整数 a_h 和 q_h 使得

$$\left|\alpha h-\frac{a_h}{q_h}\right|\le\frac{1}{q_hq^2}\,,\quad (a_h,q_h)=1\,,\quad 1\le q_h\le q^2\,. \tag{26}$$

考虑到 (25),(26) 和引理 2我们找到

$$S(y)\ll\left(yq_h^{-1/2}+y^{4/5}+y^{1/2}q_h^{1/2}\right)\log^4 y\,. \tag{27}$$

使用 (22),(24) 和 (27) 我们推导出

$$\mathfrak{S}(u)\ll N^{\gamma-1}(\log N)^4\sum_{h\le u}\left(Nq_h^{-1/2}+N^{4/5}+N^{1/2}q_h^{1/2}\right). \tag{28}$$

假设

$$q_h\le q^{1/3}\,. \tag{29}$$

由 (6) 和 (29) 我们得到

$$hq_h\le Hq^{1/3}\le q^{5/6}<q\,.$$

从 (3),(26) 以及最后一个不等式得出

$$\frac{a}{q}\ne\frac{a_h}{hq_h}\,. \tag{30}$$

一方面由 (6),(29) 和 (30) 我们有

$$\left|\frac{a}{q}-\frac{a_h}{hq_h}\right|=\frac{|ahq_h-qa_h|}{hqq_h}\ge\frac{1}{hqq_h}\ge\frac{1}{Hqq^{1/3}}\ge\frac{1}{q^{11/6}}\,. \tag{31}$$

另一方面通过 (3) 和 (26) 我们得到

$$\left|\frac{a}{q}-\frac{a_h}{hq_h}\right|\le\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|+\left|\alpha-\frac{a_h}{hq_h}\right|<\frac{1}{q^2}+\frac{1}{hq_hq^2}\le\frac{1}{2q^2}\,,$$

这与 (31) 矛盾。这否定了假设 (29)。因此

$$q_h\in\left(q^{1/3},q^2\right]. \tag{32}$$

考虑到 (4)、(28) 和 (32)，我们发现

$$\mathfrak{S}(u)\ll uN^{\gamma-1/2}q\log^4 N\ll uN^{\frac{14\gamma+11}{26}}\log^4 N\,. \tag{33}$$

总结 (21)、(23) 和 (33)，我们推导出

$$\Gamma_1 \ll N^{\frac{14\gamma+11}{26}} \log^5 N\,. \tag{34}$$

上界估计对于 $\boldsymbol{\Gamma_2}$

使用 (15) 并如同在 Γ_1 中的论证，我们得到

$$\Gamma_2 \ll \sum_{h=1}^{H} \min\left(\Delta, \frac{1}{h}\right) \left| \sum_{p\le N} \big(\psi(-(p+1)^\gamma) - \psi(-p^\gamma)\big) e(\alpha h p) \log p \right| + N^{\frac{6\gamma+14}{26}} \log^2 N\,. \tag{35}$$

记号

$$\Omega(u) = \sum_{h\le u} \left| \sum_{p\le N} \big(\psi(-(p+1)^\gamma) - \psi(-p^\gamma)\big) e(\alpha h p) \log p \right|. \tag{36}$$

然后

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{H} \min\left(\Delta, \frac{1}{h}\right) \left| \sum_{p\le N} \big(\psi(-(p+1)^\gamma) - \psi(-p^\gamma)\big) e(\alpha h p) \log p \right| \\ &\qquad = \frac{\Omega(H)}{H} + \int\limits_{\Delta^{-1}}^{H} \frac{\Omega(u)}{u^2}\, du\,. \end{aligned} \tag{37}$$

估计值 (35) 和公式 (37) 暗示

$$\Gamma_2 \ll (\log N) \max_{\Delta^{-1}\le u\le H} \frac{\Omega(u)}{u} + N^{\frac{6\gamma+14}{26}} \log^2 N\,. \tag{38}$$

我们将估计 $\Omega(u)$。从 (36) 和引理 3 由 M 通过 (7) 定义，可以得出

$$\Omega(u) \ll \big(\Omega_1(u) + u\Xi\big) \log^2 N + uN^{1/2}\,, \tag{39}$$

其中

$$\Omega_1(u) = \sum_{h\le u} \sum_{m\sim M_1} \frac{1}{m} \left| \sum_{n\sim N_1} \Lambda(n) e(\alpha h n) \Big(e\big(-mn^\gamma\big) - e\big(-m(n+1)^\gamma\big) \Big) \right|, \tag{40}$$

$$\Xi = \sum_{n\sim N_1} \min\left(1, \frac{1}{M\|n^\gamma\|}\right), \tag{41}$$

$$M_1 \le M/2\,, \quad N_1 \le N/2\,. \tag{42}$$

按照 ([6], 定理 12.1.1) 从 (41) 和 (42) 我们得到

$$\Xi \ll \Big(NM^{-1} + N^{\gamma/2} M^{1/2} + N^{1-\gamma/2} M^{-1/2} \Big) \log M\,. \tag{43}$$

考虑到 (7) 和 (43)，我们发现

$$\Xi \ll N^{\frac{14\gamma+11}{26}} \log N\,. \tag{44}$$

接下来我们估计 $\Omega_1(u)$。替换

$$\omega(t) = 1 - e\Big(m(t^\gamma - (t+1)^\gamma)\Big)$$

我们推导出

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\sim N_1} \Lambda(n) e(\alpha h n)\Big(e\big(-mn^\gamma\big) - e\big(-m(n+1)^\gamma\big)\Big)\\
&= \omega(2N_1) \sum_{n\sim N_1} \Lambda(n) e\big(\alpha h n - mn^\gamma\big)\\
&- \int\limits_{N_1}^{2N_1} \Bigg(\sum_{N_1<n\le t} \Lambda(n) e\big(\alpha h n - mn^\gamma\big)\Bigg)\,\omega'(t)\,dt\\
&\ll m N_1^{\gamma-1} \max_{N_2\in[N_1,2N_1]} |\Theta(N_1,N_2)|\,,
\end{aligned} \tag{45}$$

其中

$$\Theta(N_1,N_2) = \sum_{N_1<n\le N_2} \Lambda(n) e\big(\alpha h n - mn^\gamma\big)\,. \tag{46}$$

现在，(40) 和 (45) 给出我们

$$\Omega_1(u) \ll N_1^{\gamma-1} \sum_{h\le u} \sum_{m\sim M_1} \max_{N_2\in[N_1,2N_1]} |\Theta(N_1,N_2)|\,. \tag{47}$$

设

$$N_1 \le N^{\frac{14\gamma-2}{13\gamma}}\,. \tag{48}$$

考虑到 (7),(42),(46), (47) 和 (48) 我们得到

$$\Omega_1(u) \ll u N^{\frac{14\gamma+11}{26}}\,. \tag{49}$$

因此，我们假设

$$N^{\frac{14\gamma-2}{13\gamma}} < N_1 \le 2N\,. \tag{50}$$

我们将找到总和 $\Theta(N_1,N_2)$ 的上界。我们的论证是对 (Tolev[6], 定理 12.1.1) 论证的修改。

表示

$$f(d,l) = \alpha h d l - m d^\gamma l^\gamma\,. \tag{51}$$

使用 (46)，(51) 和 Vaughan 的身份（见 [8]），我们得到

$$\Theta(N_1,N_2) = U_1 - U_2 - U_3 - U_4, \tag{52}$$

其中

$$U_1 = \sum_{d\le v} \mu(d) \sum_{N_1/d<l\le N_2/d} (\log l) e(f(d,l)), \tag{53}$$

$$U_2 = \sum_{d\le v} c(d) \sum_{N_1/d<l\le N_2/d} e(f(d,l)), \tag{54}$$

$$U_3 = \sum_{v<d\le v^2} c(d) \sum_{N_1/d<l\le N_2/d} e(f(d,l)), \tag{55}$$

$$U_4 = \sum\sum_{\substack{N_1<dl\le N_2 \\ d>v,\, l>v}} a(d)\Lambda(l) e(f(d,l)) \tag{56}$$

以及

$$|c(d)| \le \log d, \quad |a(d)| \le \tau(d) \tag{57}$$

并且 v 由 (8) 定义。首先考虑由 (54) 定义的 U_2。牢记 (51) 我们发现

$$|f''_{ll}(d,l)| \asymp m d^2 N_1^{\gamma-2} . \tag{58}$$

现在 (58) 和引理 4 给出我们

$$\sum_{N_1/d<l\le N_2/d} e(f(d,l)) \ll m^{1/2} N_1^{\gamma/2} + m^{-1/2} d^{-1} N_1^{1-\gamma/2} . \tag{59}$$

从 (7), (8), (54), (57) 和 (59) 可得

$$U_2 \ll \left(N_1^{\gamma/2} m^{1/2} v + m^{-1/2} N_1^{1-\gamma/2}\right) \log^2 N \ll N_1^{\gamma/2} m^{1/2} v \log^2 N . \tag{60}$$

为了估计由 (53) 定义的 U_1，我们应用 Abel 求和公式。然后，如同对 U_2 的估计一样，我们得到

$$U_1 \ll N_1^{\gamma/2} m^{1/2} v \log^2 N . \tag{61}$$

接下来我们考虑由 (55) 和 (56) 定义的 U_3 和 U_4。我们有

$$U_3 \ll |U_3'| \log N , \tag{62}$$

其中

$$U_3' = \sum_{D<d\le 2D} c(d) \sum_{\substack{L<l\le 2L \\ N_1<dl\le N_2}} e(f(d,l)) \tag{63}$$

以及

$$N_1/4 \le DL \le 2N_1 , \quad v/2 \le D \le v^2 . \tag{64}$$

此外，

$$U_4 \ll |U_4'| \log N\,, \tag{65}$$

其中

$$U_4' = \sum_{D<d\le 2D} a(d) \sum_{\substack{L<l\le 2L \\ N_1<dl\le N_2}} \Lambda(l) e(f(d,l)) \tag{66}$$

以及

$$N_1/4 \le DL \le 2N_1\,, \quad v/2 \le D \le 2N_1/v\,. \tag{67}$$

由 (8),(50),(64) 和 (67) 可知，对于求和 U_4' 的条件比对求和 U_3' 的条件更为严格。考虑到这一点以及系数 U_3' 和 U_4'，我们得出结论，只需要估计总和 U_4'，在条件

$$N_1/4 \le DL \le 2N_1\,, \quad N_1^{\frac{1}{2}}/2 \le D \le v^2\,. \tag{68}$$

下

从 (57)、(66)、(68) 以及柯西不等式我们可以推导出

$$\begin{aligned} |U_4'|^2 &\ll \sum_{D<d\le 2D} \tau^2(d) \sum_{D<d\le 2D} \bigg| \sum_{L_1<l\le L_2} \Lambda(l) e(f(d,l)) \bigg|^2 \\ &\ll D(\log N)^3 \sum_{D<d\le 2D} \bigg| \sum_{L_1<l\le L_2} \Lambda(l) e(f(d,l)) \bigg|^2, \end{aligned} \tag{69}$$

其中

$$L_1 = \max\left\{L, \frac{N_1}{d}\right\}, \quad L_2 = \min\left\{2L, \frac{N_2}{d}\right\}. \tag{70}$$

使用 (68)–(70) 以及引理 5和 $Q \le L/2$ 我们发现

$$\begin{aligned} |U_4'|^2 \ll D(\log N)^3 \sum_{D<d\le 2D} \frac{L}{Q} \sum_{|q|\le Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{\substack{L_1<l\le L_2 \\ L_1<l+q\le L_2}} \Lambda(l+q)\Lambda(l) e\big(f(d,l) - f(d,l+q)\big) \\ \ll \Bigg(\frac{LD}{Q} \sum_{0<|q|\le Q} \sum_{\substack{L<l\le 2L \\ L<l+q\le 2L}} \Lambda(l+q)\Lambda(l) \bigg| \sum_{D_1<d\le D_2} e\big(g_{l,q}(d)\big) \bigg| \\ + \frac{(LD)^2}{Q} \log N \Bigg) \log^3 N\,, \end{aligned} \tag{71}$$

其中

$$D_1 = \max\left\{D, \frac{N_1}{l}, \frac{N_1}{l+q}\right\}, \quad D_2 = \min\left\{2D, \frac{N_2}{l}, \frac{N_2}{l+q}\right\} \tag{72}$$

并且

$$g(d)=g_{l,q}(d)=f(d,l)-f(d,l+q)\,. \tag{73}$$

很容易看出公式 (71) 中负的 q 之和等于正的 q 之和。因此

$$\begin{aligned}|U_4'|^2\ll\Bigg(\frac{LD}{Q}\sum_{1\le q\le Q}\sum_{L<l\le 2L}\Lambda(l+q)\Lambda(l)\Bigg|\sum_{D_1<d\le D_2}e(g_{l,q}(d))\Bigg|\\+\frac{(LD)^2}{Q}\log N\Bigg)\log^3 N\,.\end{aligned} \tag{74}$$

考虑函数 $g(d)$。从 (51) 和 (73) 我们得到

$$|g''(d)|\asymp mD^{\gamma-2}|q|L^{\gamma-1}\,. \tag{75}$$

考虑到 (72),(75) 和引理 4我们得到

$$\sum_{D_1<d\le D_2}e(g(d))\ll m^{1/2}q^{1/2}D^{\gamma/2}L^{\gamma/2-1/2}+m^{-1/2}q^{-1/2}D^{1-\gamma/2}L^{1/2-\gamma/2}\,. \tag{76}$$

我们选择

$$Q=\min\big(L/4\,,Q_0\big)\,, \tag{77}$$

其中

$$Q_0=m^{-1/3}D^{2/3-\gamma/3}L^{1/3-\gamma/3}\,.$$

这里 (7),(42),(50),(68) 和 直接验证保证了

$$Q_0>N^{\frac{115}{858}}\,.$$

通过 (74),(76) 和 (77) 我们推导出

$$\begin{aligned}|U_4'|^2&\ll\big(D^2L^2Q^{-1}+m^{1/2}Q^{1/2}D^{1+\gamma/2}L^{3/2+\gamma/2}+m^{-1/2}Q^{-1/2}D^{2-\gamma/2}L^{5/2-\gamma/2}\big)\log^4 N\\&\ll\Big(D^2L^2L^{-1}+D^2L^2Q_0^{-1}+m^{1/2}Q_0^{1/2}D^{1+\gamma/2}L^{3/2+\gamma/2}\\&\qquad+m^{-1/2}D^{2-\gamma/2}L^{5/2-\gamma/2}\big(L^{-1/2}+Q_0^{-1/2}\big)\Big)\log^4 N\\&\ll\big(D^2L+m^{1/3}D^{4/3+\gamma/3}L^{5/3+\gamma/3}+m^{-1/2}D^{2-\gamma/2}L^{2-\gamma/2}\\&\qquad+m^{-1/3}D^{5/3-\gamma/3}L^{7/3-\gamma/3}\big)\log^4 N\,.\end{aligned} \tag{78}$$

从 (68) 和 (78) 可以得出

$$|U_4'|\ll\big(N_1^{1/2}v+M^{1/6}N_1^{3/4+\gamma/6}\big)\log^2 N\,. \tag{79}$$

现在 (65) 和 (79) 意味着

$$U_4 \ll \left(N_1^{1/2}v + M^{1/6}N_1^{3/4+\gamma/6}\right)\log^3 N\,. \tag{80}$$

像估计 U_4' 那样对于总和 (63) 我们发现

$$|U_3'| \ll \left(N_1^{1/2}v + M^{1/6}N_1^{3/4+\gamma/6}\right)\log^2 N\,. \tag{81}$$

估计值 (62) 和 (81) 给我们

$$U_3 \ll \left(N_1^{1/2}v + M^{1/6}N_1^{3/4+\gamma/6}\right)\log^3 N\,. \tag{82}$$

总结 (52),(60),(61), (80) 和 (82) 我们得到

$$\Theta(N_1,N_2) \ll \left(N_1^{1/2}v + M^{1/6}N_1^{3/4+\gamma/6} + N_1^{\gamma/2}m^{1/2}v\right)\log^3 N\,. \tag{83}$$

通过 (7),(8),(47),(50) 和 (83) 可以得出

$$\Omega_1(u) \ll uN^{\frac{14\gamma+11}{26}}\log^3 N\,. \tag{84}$$

从 (38),(39), (44),(49) 和 (84) 我们推导出

$$\Gamma_2 \ll N^{\frac{14\gamma+11}{26}}\log^6 N\,. \tag{85}$$

使用 (13),(34) 和 (85) 我们建立了上限 (12)。

引理得证。 □

4.3 证明完毕

考虑到 (2)，(5)，(11) 以及引理 6我们得到

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p=[n^{1/\gamma}]}} F_\Delta(\alpha p+\beta)\log p \gg N^{\frac{14\gamma+11}{26}}\log^6 N\,.$$

这完成了定理的证明。

参考文献

[1] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, Colloquium Publications, **53**, Amer. Math. Soc., (2004).

[2] A. Karatsuba, *Principles of the Analytic Number Theory*, Nauka, Moscow, (1983) (in Russian).

[3] K. Matomäki, *The distribution of αp modulo one*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **147**, (2009), 267 –283.

[4] I. I. Piatetski-Shapiro, *On the distribution of prime numbers in sequences of the form* $[f(n)]$, Mat. Sb., **33**, (1953), 559 – 566.

[5] J. Rivat, J. Wu, *Prime numbers of the form* $[n^c]$, Glasg. Math. J, **43**, 2, (2001), 237 – 254.

[6] D. I. Tolev, *Lectures on elementary and analytic number theory I*, St. Kl. Ohridski Univ. Press, (2016), (in Bulgarian).

[7] R. C. Vaughan, *On the distribution of αp modulo 1*, Mathematika, **24**, (1977), 135 – 141.

[8] R. C. Vaughan, *An elementary method in prime number theory*, Acta Arith., **37**, (1980), 111 – 115.

[9] I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Trud. Math. Inst. Steklov, **23**, (1947), 1 – 109, (in Russian).

S. I. Dimitrov

应用数学与信息学系
索非亚科技大学
圣克莱门特奥赫里德斯基大街 8 号
保加利亚 索非亚 1756
电子邮件: sdimitrov@tu-sofia.bg