

具有 PT 对称模型的复 Langevin 模拟

Arpith Kumar^{a,*} and Anosh Joseph^a

^aDepartment of Physical Sciences,

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali,
Knowledge City, Sector 81, SAS Nagar, Punjab 140306, India

E-mail: anoshjoseph@iisermohali.ac.in, arpithk.iiserm@gmail.com

自相互作用标量量子场论具有 PT 对称性是物理上可接受的，因为它们的能量谱是实数且有下界的。然而，具有 PT 不变势的模型通常可以具有复数值的作用量，并且由于数值符号问题，使用传统蒙特卡罗方法对这类系统进行非微扰研究受到阻碍。在这项工作中，我们运用基于随机量化的方法——复朗之万方程来研究二维标量场论，包括那些表现出 PT 对称性的理论。我们还研究了这些系统的最简单的超对称版本，并探讨动力学超对称破缺的问题。

第 38 届格点场理论国际研讨会，LATTICE2021 2021 年 7 月 26 日至 30 日通过 Zoom/麻省理工学院 Gather 在线举行

*Speaker

1. 介绍和动机

对量子场论非微扰区域的系统性研究可以通过晶格正则化来完成。基于蒙特卡洛的传统数值方法通常可以在欧几里得作用量为实数时提供这些系统的物理性质。然而，在具有复作用量的理论中，路径积分蒙特卡洛会遇到臭名昭著的符号问题，这使得模拟算法不可靠。文献中仅存在少数几种方法可以有效解决符号问题。我们借助其中一种方法——复朗之万方法 [1, 2]——来研究二维量子场论模型。

量子场论，如具有夸克化学势的 QCD、带有拓扑 θ -项的 QCD、陈-西蒙斯规范理论和手征规范理论可能会遭遇符号问题。该列表还包括一类有趣的非厄米且自相互作用的量子场论，这些理论表现出 PT -不变性。尽管使用复数作用量进行表述，但这些理论可以拥有实数且下有界的能量谱。在参考资料 [3, 4] 中，Bender 和 Milton 考虑了一类新的 PT -不变（欧几里得）量子场论，其相互作用形式为 $\lambda(i\phi)^{(2+\delta)}$ 。这些理论从物理上是可接受的，也就是说，它们拥有实数且下有界的能量谱。但对于这些相互作用而言，宇称本身是明显破缺的。我们的目标是在复朗之万方法的帮助下对这些理论进行非微扰分析。

超对称性 (SUSY) 的引入对我们理解粒子物理产生了相当大的兴趣，自从它首次被提出以来便是如此。我们的经验表明，如果超对称性在低能量尺度上表现为自发破缺对称性 [5, 6]，那么它只能是自然的基本对称性之一。这导致了一个要求，即为了研究超对称性的破缺机制，我们需要非微扰工具。在过去几十年中，人们投入了大量努力来制定格点正则化的超对称模型，从而能够访问各种引人入胜的非微扰现象，如动力学超对称性破缺。

在本次会议中，我们介绍了利用复 Langevin 方法对我们初步研究的呈现，该研究关注的是一个最小超对称模型——二维 $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino 模型的格点正则化版本。我们讨论了当超势为双井势时的情况。我们还讨论了正在模拟的 PT -对称超势情况。在进入第 3 节关于超对称模型之前，作为热身，在第 2 节中我们将讨论具有 ϕ^4 和 PT -对称势的二维标量场理论。

2. 二维标量场理论

考虑二维欧几里得标量场理论的拉格朗日

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + W(\phi), \quad (1)$$

其中 ϕ 是无量纲标量， m 是质量参数， $W(\phi)$ 是相互作用势。欧几里得作用为 $S_E = \int d^2x \mathcal{L}_E$ 。

为了使用复 Langevin 方法模拟该模型，我们首先在一个二维环面晶格上对该模型进行离散化。时间和空间的范围分别为 β_t 和 β_x ，可以表示为 $\beta_t = \beta_x = La$ ，其中 L 表示每个方向上的晶格点数， a 表示晶格间距。我们有 $\int d^2x \rightarrow a^2 \sum_x$ 。晶格的周期性使我们能够写出

$$(\partial_\mu \phi)^2 = -\phi \partial_\mu^2 \phi = -\frac{1}{a^2} [\phi_x \phi_{x+\mu} + \phi_x \phi_{x-\mu} - 2\phi_x^2], \quad (2)$$

其中 $\phi_{x\pm\mu}$ 表示 $\pm\mu$ 方向上的相邻点的场。

使用复 Langevin 方法，我们可以研究这些模型的各种相互作用势能，包括 PT 不变的势能。场配置在晶格点 x 处，在 Langevin 时间 θ 时，步长为 ϵ 的复 Langevin 更新由下列给出

$$\phi_{x,\theta+\epsilon} = \phi_{x,\theta} + \epsilon v_{x,\theta} + \eta_{x,\theta} \sqrt{\epsilon}, \quad (3)$$

其中漂移项作为 $v_{x,\theta} = -\partial S_E / \partial \phi_{x,\theta}$ 获得，而 $\eta_{x,\theta}$ 是实高斯噪声。

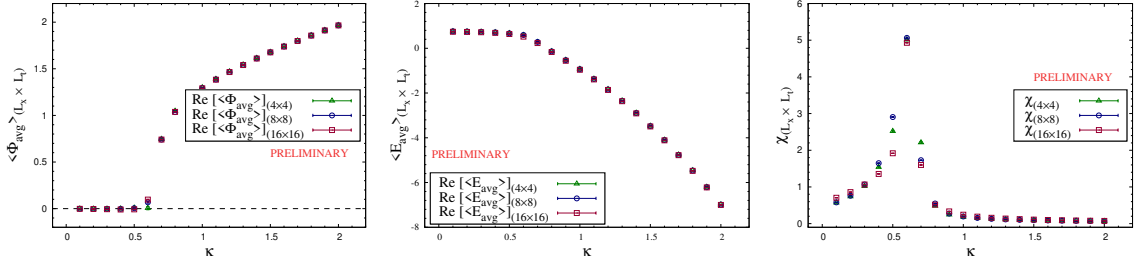


图 1: 具有 ϕ^4 势的模型。序参量 Φ 的期望值（左面板）、能量 E （中面板）和磁化率 χ （右面板）相对于 κ 的不同格点范围以及固定的 $\tilde{\lambda} = 0.5$ 。

2.1 具有 ϕ^4 潜能的模型

考虑势能 $W(\phi) = \lambda\phi^4$ 。经典情况下，模型在离散的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性下不变，即 $\phi \rightarrow -\phi$ 。然而，在量子理论中，这种对称性可能会动态破缺。标量场的期望值 $\langle\phi\rangle$ 可以视为一个序参量。如果 $\langle\phi\rangle = 0$ ，则理论处于对称相；否则，它处于对称破缺相。存在关于 ϕ^4 理论在晶格 [7–10] 上的全面研究。我们将利用此模型作为我们兰金文分析的试验台。我们采用一个格参数化，其无量纲格参数为 $m_0^2 = m^2 a^2$ 和 $\lambda_0 = \lambda a^2$ ，并且另外引入了一组新的参数 κ 和 $\tilde{\lambda}$ [7]，

$$m_0^2 \rightarrow \frac{1 - 2\tilde{\lambda}}{\kappa} - 4, \quad \lambda_0 \rightarrow 6\frac{\tilde{\lambda}}{\kappa^2}, \quad \text{and} \quad \phi \rightarrow \sqrt{2\kappa}\Phi. \quad (4)$$

上述参数化导致了格作用

$$S = -2\kappa \sum_x \sum_\mu \Phi_x \Phi_{x+\mu} + \sum_x \Phi_x^2 + \tilde{\lambda} \sum_x (\Phi_x^2 - 1)^2. \quad (5)$$

在我们的模型模拟中，我们监控以下可观测量当 κ 变化时的变化：场 Φ 的平均值作为序参量，能量 E ，以及磁化率 χ 。模拟结果如图 1 所示，对于不同的晶格范围和固定的 $\tilde{\lambda} = 0.5$ 。结果表明模型在 $\kappa = 0.6$ 和 $\langle\Phi_{\text{avg}}\rangle \neq 0$ 附近存在相变，对于 $\kappa \geq 0.6$ 而言，这意味着 $\mathbb{Z}_2$ 破缺相。

2.2 具有 PT 不变势的模型

接下来我们转向 PT 不变标量场理论，其势为 $W(\phi) = -\lambda(i\phi)^{(2+\delta)}$ ，其中耦合 λ 具有 m^2 维度， δ 是一个实参数。值得注意的是，这些模型对于具有非零质量参数的 $\delta > 0$ 拥有一个真实且下界受限制的谱。从理论角度看，光谱的正性是可以理解的。

作为一个示例，我们考虑理论 $\delta = 1$ 。拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + i\lambda \phi^3. \quad (6)$$

对于一个传统的实数 $\lambda\phi^3$ 理论，在弱耦合展开中，格林函数可以表示为 λ^2 的形式幂级数。这个幂级数虽然是实数的，但并不改变符号，因此不可进行博雷尔求和。扰动级数的不可求和性反映了谱没有下界的事实。在替换耦合 $\lambda \rightarrow i\lambda$ 后，理论变得 PT 对称。幂级数保持实数并且符号交替。因此，微扰级数变得可求和，表明底层理论具有实正谱 [3, 4, 11]。

此类 PT 对称理论的动作通常较为复杂。路径积分蒙特卡罗方法要求动作必须是实数，因此这些理论的非微扰格点研究由于符号问题或复杂相位问题而受阻。我们使用复朗之万

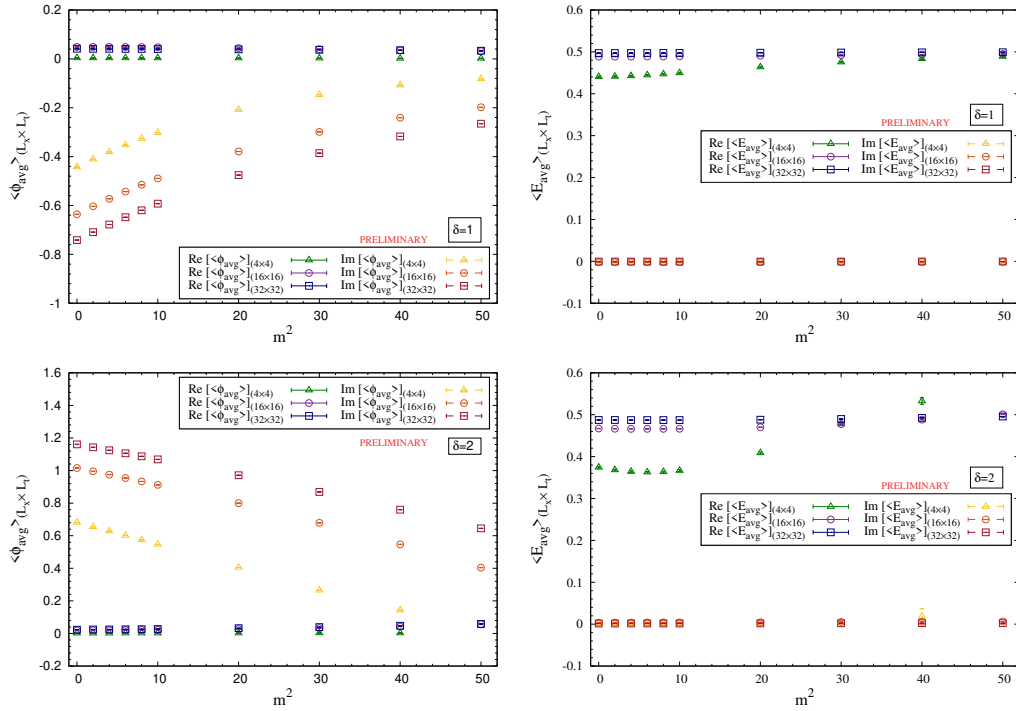


图 2: 玻色子 PT 对称模型, 具有 $\delta = 1$ (顶部) 和 $\delta = 2$ (底部) 势能。阶参数 ϕ 的实部和虚部的期望值 (左面板) 以及能量 E (右面板) 相对于物理质量参数 m^2 , 在不同的晶格范围和固定的物理耦合 $\lambda = 10.0$ 下的变化。

方法来克服这一困难。对于 $\delta = 1$ 模型, 格点作用可以表示为

$$S = - \sum_x \sum_\mu \phi_x \phi_{x+\mu} + \left(2 + \frac{m_0^2}{2} \right) \sum_x \phi_x^2 + i\lambda_0 \sum_x \phi_x^3, \quad (7)$$

其中 m_0 和 λ_0 分别是无量纲质量和耦合参数。

在图 2 中, 我们展示了具有 $\delta = 1$ (顶部) 和 $\delta = 2$ (底部) 势能的玻色子 PT -对称理论的模拟结果。左侧面板显示了不同晶格范围下平均场 ϕ (序参量) 的真实部分和虚部与物理质量 m^2 的期望值, 以及固定的物理耦合 $\lambda = 10.0$ 。在右侧面板中, 我们展示了基态能量 E 对于不同的晶格范围和固定的物理耦合 $\lambda = 10.0$ 的 m^2 。这些初步结果表明 $\langle \phi_{\text{avg}} \rangle \neq 0$, 也就是说, 对于 $\delta = 1, 2$ 奇偶性显然是被破坏的。能量的期望值是实数且为正, $\text{Re}[\langle E_{\text{avg}} \rangle] > 0$ 和 $\text{Im}[\langle E_{\text{avg}} \rangle] = 0$, 这表明这类相互作用具有一个实数下界谱。我们的模拟结果与分析预测 [4] 相符。

3. 二维 $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino 模型

在本节中, 我们研究了上一节讨论的模型的一种超对称版本。(该模型的一维和零维情况最近在文献 [12, 13] 中进行了研究。) 我们在拉格朗日中加入了费米子, 并考虑最简单的二维超对称量子场论, 即 $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino 模型。该理论涉及一组极简的场, 即标量场 ϕ

和二分量 Majorana 自旋子 ψ 。欧几里得时空中的在壳模型具有作用

$$S_E = \int d^2x \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi)^2 + \bar{\psi} \mathcal{M} \psi + W^2(\phi) \right], \quad (8)$$

其中 $\mathcal{M} = \gamma^\mu \partial_\mu + W'(\phi)$ 被称为费米子矩阵，势能 $W(\phi)$ 实际上是超势的导数。该作用在由变换给出的单个超对称下是不变的

$$\delta \phi = \bar{\epsilon} \psi, \quad \delta \psi = [\gamma^\mu \partial_\mu \phi - W(\phi)] \epsilon, \quad \delta \bar{\psi} = 0. \quad (9)$$

Majorana 旋量满足关系式 $\bar{\psi} = \psi^T C$ ，其中 C 是欧几里得空间中的“电荷共轭”算子。它被给出为

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

需要注意的是，该理论没有 Q -精确的形式或 Nicolai 映射。该模型并非通过降维获得，不同于其 $\mathcal{N} = 2$ 超对称版本。另一个有趣的性质是，在费米子的周期性边界条件下，可能会发生 SUSY 的动力学破缺，即 Witten 指标 $\Delta = 0$ 的消失。

对于模型的非微扰分析，我们将理论置于上一节讨论的对称环面格子上。我们考虑了由 Golterman 和 Petcher 引入的一个特定格点公式 [14]。在将费米子积分出去之后，欧几里得连续作用量的格点表示有以下玻色子和费米子分量

$$S = S_b + S_f, \quad S_b = \frac{1}{2} \left(-\phi_r \square_{rr'}^2 \phi_{r'} + W_r^2 \right), \quad S_f = \ln [\text{Pf} \mathcal{M}] = -\frac{1}{2} \text{tr} [\ln \mathcal{M}], \quad (11)$$

其中 r, r' 是格矢，费米子矩阵是 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{rr'}^{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{D}_{rr'}^\mu + \delta_{\alpha\beta} W'_{rr'}$ ， $\text{Pf} \mathcal{M}$ 是费米子矩阵的 Pfaffian。我们使用如下定义的对称差分算子

$$\mathcal{D}_{rr'}^\mu = \frac{1}{2} [\delta_{r+e_\mu, r'} - \delta_{r-e_\mu, r'}] \quad (12)$$

$$\square_{rr'}^n = \frac{1}{2} \sum_\mu [\delta_{r+ne_\mu, r'} + \delta_{r-ne_\mu, r'} - 2\delta_{rr'}]. \quad (13)$$

由于作用量公式 Eq. (11) 一般情况下可以是复数，我们将应用复 Langevin 方法来研究各种超势下的理论。我们使用欧拉离散化的朗之万方程来描述在朗之万时间 θ 处的 s 维格矢量。漂移项被定义为

$$v_{s, \theta} = -\frac{\partial S}{\partial \phi_{s, \theta}} = \square_{sr'}^2 \phi_{r', \theta} - W_{r'} W'_{r's} + \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \phi_s} \right)_{rr'}^{\alpha\beta} \left(\mathcal{M}^{-1} \right)_{r'r}^{\beta\alpha}. \quad (14)$$

为了测试复杂朗吉 VIN 模拟的可靠性，我们检查基于分布 $P(u)$ 的衰减来验证准则 [17]，该分布是漂移项绝对值 u 的分布。我们在特定的朗吉 VIN 时间 θ 时，得到漂移项的幅度 $u_\theta = \sqrt{(1/L^2) \sum_s |v_{s, \theta}|^2}$ 。如果我们发现分布 $P(u)$ 中的 u 指数衰减或更快地衰减，我们可以信任这些模拟。

3.1 双阱势超位能

我们从考虑一个二次相互作用势或双阱超势 [9, 15, 16] 开始，其形式为

$$W(\phi) = \lambda\phi^2 - \frac{m^2}{4\lambda}, \quad \lambda \neq 0. \quad (15)$$

该理论在 $\phi = \pm m/2\lambda$ 处有两个经典真空。在格点理论中，我们考虑无量纲耦合常数 λ_0 和 m_0 ，它们与连续对应部分通过 $\lambda_0 = \lambda a$ 和 $m_0 = ma$ 相关。势及其导数如下所示

$$W_r = \lambda_0\phi_r^2 - \frac{m_0^2}{4\lambda_0} - \frac{1}{2}\square_{rr'}^1\phi_r, \quad W'_{rr'} \equiv \frac{\partial P_r}{\partial \phi_{r'}} = 2\lambda_0\phi_r\delta_{rr'} - \square_{rr'}^1, \quad (16)$$

其中 $\square_{rr'}^1$ 是威尔逊质量算子，在连续极限下消失但在有限晶格间距下消除了费米子加倍问题。由于引入了威尔逊项，晶格作用不再在宇称下不变，这意味着两个真空状态不等价。期望场构型会存在于一个经典真空的附近。当 m_0^2/λ_0 取大值时， $\mathbb{Z}_2$ 对称性自发破缺（在无限体积中），并且 ϕ 稳定到确定的基态。

在图 3 中，我们展示了我们的模拟结果。上面板显示了标量场 ϕ （序参量）与朗之万时间 θ 的关系，针对不同的 m_0^2 值，描绘了理论的不同相。我们将格点范围固定为 $L = 4$ ，并将格点耦合固定为 $\lambda_0 = 0.125$ 。对于 $m_0^2 = +1$ ，场配置（蓝色正方形）被限制在一个经典真空状态 $\phi = m_0/2\lambda_0$ 附近，伴随小波动，这表明理论处于一个 $\mathbb{Z}_2$ 破缺相。在 $m_0^2 = +0.16$ 处，我们观察到隧穿行为，场配置（绿色三角形）经历大波动，并在两个经典真空状态 $\phi = \pm m_0/2\lambda_0$ 之间振荡。Pfaffian 符号的变化（黑色菱形）清楚地说明了这种行为。对于 $m_0^2 = -1$ ，场配置（红色圆圈）在一个单一的真空状态下经历小波动，保持 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。

在左下角的面板上，我们有场 $\langle\phi\rangle$ （序参量）的真实部分、Pfaffian $\langle\text{sign Pf } \mathcal{M}\rangle$ 的符号以及最简单的 Ward 恒等式 $\langle\mathcal{W}\rangle$ 对于固定格耦合 $\lambda_0 = 0.125$ 下的晶格质量 m_0^2 。在无限体积连续理论中，对于大值的 m^2/λ ，标量场选择一个唯一的基态，表明模型中的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性被破坏且 SUSY 未被破坏。我们看到当质量大于某个临界值， $m_0^2 \geq m_{0,c}^2$ ，标量场（蓝色方块）选择基态 $+m_0/2\lambda_0$ ，而 Pfaffian 的符号（黑色菱形）接近 $+1$ 。随着 m_0^2 减小，观察到隧道效应至另一个真空状态，并且标量场的期望值（绿色方块）消失 $\langle\phi\rangle \sim 0$ 。这种效应是 Pfaffian 符号翻转的直接结果，在 $\langle\text{sign Pf } \mathcal{M}\rangle \sim 0$ 中有所体现。这些结果暗示了 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的恢复和动力学 SUSY 破缺。上述论点得到了 Ward 恒等式（黄色圆圈）的支持。当 m_0^2 减小时，我们观察到沃德恒等式不再消失，即 $\langle\mathcal{W}\rangle \neq 0$ ，表明从未破缺的超对称相转变为破缺的超对称相。对于 $m_0^2 < 0$ ，我们注意到一个 $\mathbb{Z}_2$ 对称相，标量场（红色方块） $\langle\phi\rangle \sim 0$ ，以及破缺的超对称性 $\langle\mathcal{W}\rangle \neq 0$ 。我们在右下角面板展示了模拟中的绝对漂移衰减。我们观察到 $m_0^2 > 0.42$ 呈指数或更快的衰减（由底部左图中的实心数据点所示）以及 $m_0^2 \leq 0.42$ 呈幂律行为（由底部左图中的空心数据点所示）。这可能与奇异漂移问题有关，我们正在进一步研究这个问题。

3.2 具有 PT -对称势的模型

我们的主要目标是验证 Bender 和 Milton 在 Ref.[3] 中得到的结果。在那里，他们研究了一个具有四个超荷的二维超对称模型以及其超势 $W(\phi) = -i\lambda(i\phi)^{(1+\delta)}$ 。在这个超对称模型中，宇称对称性被破坏了。作者试图通过参数 δ 的微扰展开来回答破坏宇称是否会导致超对称性的破坏的问题。他们发现，在 δ 的二阶下，模型中的超对称性保持未被破坏，并建议 SUSY 可能在 δ 的所有幂次中都保持完整。我们计划通过该模型的复 Langevin 模拟来验证这些结果。我们希望很快在其他地方报告正在进行的模拟的结果 [18]。

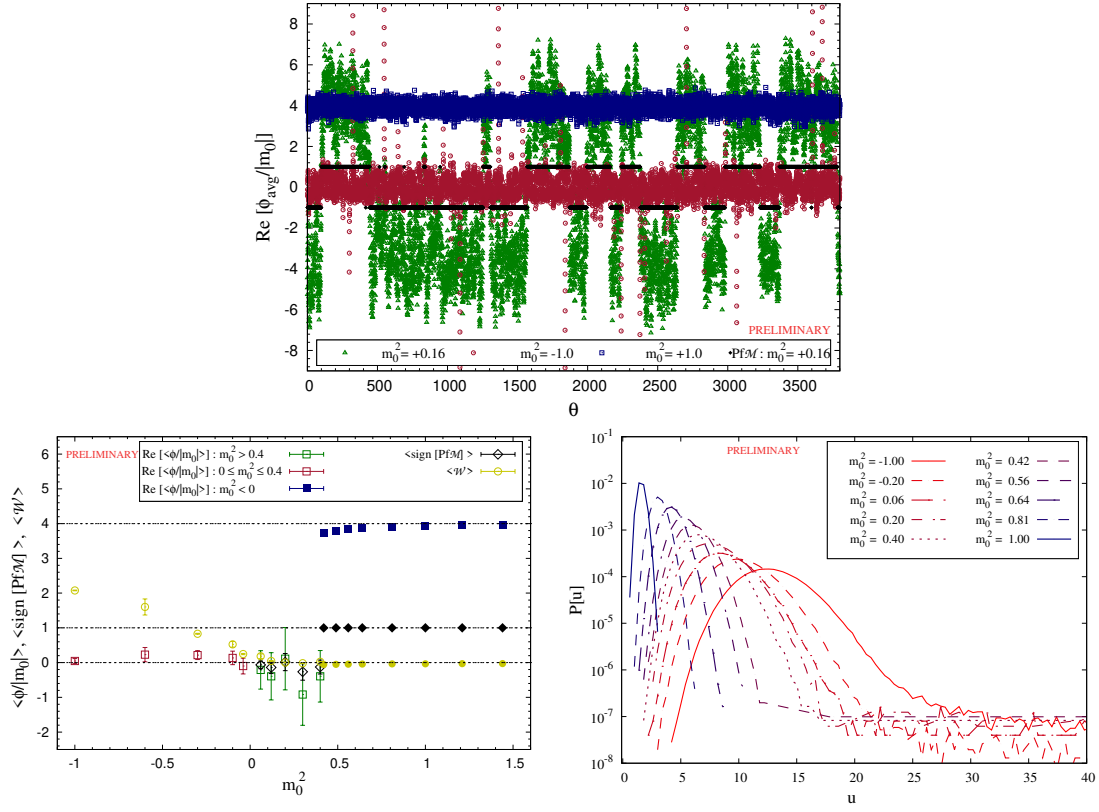


图 3: $N = 1$ Wess-Zumino 模型带有双井超势。(上) 对于各种晶格质量 m_0^2 的 Langevin 时间历史记录 ϕ 。也绘制了 $m_0^2 = 0.16$ 的 Pfaffian 符号。(左下) 场 $\langle \phi \rangle$, Pfaffian 的符号 $\langle \text{sign} [\text{Pf}M] \rangle$, 以及对晶格质量 m_0^2 的 Ward 恒等式 $\langle W \rangle$ 。(右下) 不同晶格质量 m_0^2 的绝对漂移衰减。这些图是对于固定的晶格范围 $L = 4$ 和晶格耦合 $\lambda_0 = 0.125$ 。

4. 结论

在这项工作中, 我们展示了关于二维标量场理论及其各种相互作用的初步研究成果, 包括有趣的 PT -不变势能情况。我们介绍了模型的格子构造, 然后研究了具有 ϕ^4 和 PT 对称势能的玻色子版本。之后, 我们考察了一个最小超对称性模型, 即二维 $N = 1$ Wess-Zumino 模型。我们的模拟表明, 当质量参数 m_0^2 大于某个临界值时, 此模型中的超对称性得以保留。**致谢:** 我们感谢与 Takehiro Azuma 和 Navdeep Singh Dhindsa 的讨论。AJ 的工作部分得到了印度科学技术教育研究所 (IISER) 莫哈里提供的启动研究基金 (编号 SRG/2019/002035) 的支持, 该基金来自印度政府的科学和工程研究委员会 (SERB), 以及 IISER 莫哈里的种子基金。AK 的工作部分得到了 IISER 莫哈里和 CSIR 研究奖学金 (编号 517019) 的部分支持。

参考文献

- [1] J. R. Klauder, *Stochastic quantization*, Acta Phys. Austriaca Suppl. **25**, 251-281 (1983) doi:10.1007/978-3-7091-7651-1_8
- [2] G. Parisi, *On complex probabilities*, Phys. Lett. B **131**, 393-395 (1983) doi:10.1016/0370-2693(83)90525-7

- [3] C. M. Bender and K. A. Milton, *Model of supersymmetric quantum field theory with broken parity symmetry*, Phys. Rev. D **57** (1998), 3595-3608 doi:10.1103/PhysRevD.57.3595 [arXiv:hep-th/9710076 [hep-th]].
- [4] C. M. Bender, S. Boettcher and P. Meisinger, *PT symmetric quantum mechanics*, J. Math. Phys. **40**, 2201-2229 (1999) doi:10.1063/1.532860 [arXiv:quant-ph/9809072 [quant-ph]].
- [5] E. Witten, *Dynamical breaking of supersymmetry*, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981) doi:10.1016/0550-3213(81)90006-7
- [6] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B **202**, 253 (1982) doi:10.1016/0550-3213(82)90071-2
- [7] A. K. De, A. Harindranath, J. Maiti and T. Sinha, *Investigations in 1+1 dimensional lattice ϕ^4 theory*, Phys. Rev. D **72**, 094503 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.094503 [arXiv:hep-lat/0506002 [hep-lat]].
- [8] D. Schaich and W. Loinaz, *An Improved lattice measurement of the critical coupling in ϕ_2^4 theory*, Phys. Rev. D **79**, 056008 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.056008 [arXiv:0902.0045 [hep-lat]].
- [9] C. Wozar and A. Wipf, *Supersymmetry breaking in low dimensional models*, Annals Phys. **327**, 774-807 (2012) doi:10.1016/j.aop.2011.11.015 [arXiv:1107.3324 [hep-lat]].
- [10] R. Sakai, D. Kadoh, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, S. Takeda and Y. Yoshimura, *Tensor network study of two dimensional lattice ϕ^4 theory*, PoS **LATTICE2018**, 232 (2018) doi:10.22323/1.334.0232 [arXiv:1812.00166 [hep-lat]].
- [11] K. A. Milton, *PT symmetric quantum field theory*, Czech. J. Phys. **53**, 1069-1072 (2003) doi:10.1023/B:CJOP.0000010535.56276.7e [arXiv:hep-th/0308033 [hep-th]].
- [12] A. Joseph and A. Kumar, *Complex Langevin dynamics and supersymmetric quantum mechanics*, JHEP **10** (2021), 186 doi:10.1007/JHEP10(2021)186 [arXiv:2011.08107 [hep-lat]].
- [13] A. Joseph and A. Kumar, *Complex Langevin Simulations of Zero-dimensional Supersymmetric Quantum Field Theories*, Phys. Rev. D **100** (2019), 074507 doi:10.1103/PhysRevD.100.074507 [arXiv:1908.04153 [hep-th]].
- [14] M. F. L. Golterman and D. N. Petcher, *A local interactive lattice model with supersymmetry*, Nucl. Phys. B **319**, 307-341 (1989) doi:10.1016/0550-3213(89)90080-1
- [15] S. Catterall and S. Karamov, *A lattice study of the two-dimensional Wess-Zumino model*, Phys. Rev. D **68**, 014503 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.014503 [arXiv:hep-lat/0305002 [hep-lat]].
- [16] D. Baumgartner, K. Steinhauer and U. Wenger, *Supersymmetry breaking on the lattice: the $N = 1$ Wess-Zumino model*, PoS **LATTICE2011**, 253 (2011) doi:10.22323/1.139.0253 [arXiv:1111.6042 [hep-lat]].

- [17] K. Nagata, J. Nishimura and S. Shimasaki, *Argument for justification of the complex Langevin method and the condition for correct convergence*, Phys. Rev. D **94**, no.11, 114515 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.114515 [arXiv:1606.07627 [hep-lat]].
- [18] A. Joseph and A. Kumar, *In preparation*.