

构造一个具有给定因子和非递归字母的双 无穷幂自由词

Josef Rukavicka*

2022 年 4 月 16 日

数学主题分类: 68R15

摘要

令 $L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 表示所有双无限 α 次幂自由词的集合, 这些词是基于一个包含 k 个字母的字母表, 其中 α 是一个正有理数且 k 是一个正整数。我们证明如果 $\alpha \geq 5, k \geq 3, v \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和 w 是 v 的有限因子, 则存在 $\tilde{v} \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和一个字母 x , 使得 w 是 $\tilde{v}$ 的因子, 并且 x 在 $\tilde{v}$ 中只有有限多次出现。

关键词: 无功率单词; 扩展属性; 循环因子

1 介绍

一个非空词 r 的 α -功率是这样的词 $r^\alpha = rr \cdots rt$, 使得 $\frac{|r^\alpha|}{|r|} = \alpha$ 并且 t 是 r 的前缀, 其中 $\alpha > 0$ 是一个有理数。例如 $(1234)^3 = 123412341234$ 和 $(1234)^{\frac{7}{4}} = 1234123$ 。

*Department of Mathematics, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Technical University in Prague (josef.rukavicka@seznam.cz).

假设一个有限或无限的单词 w 。令

$$\Theta(w) = \{(r, \alpha) \mid r^\alpha \text{ is a factor of } w \text{ and } r \text{ is a nonempty word and} \\ \alpha \text{ is a positive rational number}\}.$$

我们说 w 是 α -无功率自由如果

$$\{(r, \beta) \in \Theta(w) \mid \beta \geq \alpha\} = \emptyset$$

并且我们说 w 是 α^+ 次幂自由的如果

$$\{(r, \beta) \in \Theta(w) \mid \beta > \alpha\} = \emptyset.$$

次幂自由的词包括众所周知的平方自由 (2-次幂自由)、重叠自由 (2^+ -次幂自由) 和立方自由的词 (3-次幂自由)。在 [2] 和 [6] 中, 读者可以找到一些关于无幂词主题的调查。

1985 年, Restivo 和 Salemi 提出了一个关于无幂词可扩展性的五个问题的列表 [3]。对于本文而言, 问题 4 和问题 5 是感兴趣的:

- 问题 4: 给定有限的 α -幂自由词 u 和 v , 判断是否存在一个过渡词 w , 使得 uwu 是 α -幂自由的。
- 问题 5: 给定有限的 α -幂自由词 u 和 v , 找到一个过渡词 w (如果存在)。

在 [1] 中, 可以找到关于这五个问题的所有解决方案的最新综述。特别是, 问题 4 和问题 5 对于某些无重叠二进制词得到了解决。此外, 在 [1] 中, 作者证明了: 对于字母表中含有 k 个字母的任意一对无立方单词 (u, v) , 如果 u 可以无限向右扩展且 v 可以无限向左扩展同时保持无立方性质, 那么存在一个“过渡”单词 w 使得 uwv 是无立方的。

令 $\mathbb{N}$ 表示正整数的集合, 并且令 $\mathbb{Q}$ 表示有理数的集合。

定义 1.1. (参见 [4, Definition 1])

$$\Upsilon = \{(k, \alpha) \mid k \in \mathbb{N} \text{ and } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ and } k = 3 \text{ and } \alpha > 2\} \\ \cup \{(k, \alpha) \mid k \in \mathbb{N} \text{ and } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ and } k > 3 \text{ and } \alpha \geq 2\} \\ \cup \{(k, \alpha^+) \mid k \in \mathbb{N} \text{ and } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ and } k \geq 3 \text{ and } \alpha \geq 2\}.$$

备注 1.2. (参见 [4, Remark 1]) Υ 的定义说明: 如果 $(k, \alpha) \in \Upsilon$ 和 α 是“带有 + 的数”, 那么 $k \geq 3$ 和 $\alpha \geq 2$ 。如果 $(k, \alpha) \in \Upsilon$ 和 α 只是一个数字, 那么 $k = 3$ 和 $\alpha > 2$ 或者 $k > 3$ 和 $\alpha \geq 2$ 。

在 [4] 中, 表明如果 $(k, \alpha) \in \Upsilon$, 那么我们有: 对于每个由字母表中 k 个字母组成的 α 次幂自由词的配对 (u, v) , 如果 u 可以向右无限扩展并且 v 可以向左无限扩展并保持 α 自由性, 那么存在一个“过渡”词 w , 使得 uwv 是 α 次幂自由的。还展示了如何构造单词 w 。不太正式地说, 来自 [4] 的结果解决了广泛的无幂语言中的问题 4 和问题 5。

为了证明 [4] 中的结果, 作者表明: 如果 v 是一个具有因子 w 的右 (左) 无限 α 次幂词, 并且 x 是一个字母, 那么存在一个右 (左) 无限的 α 次幂自由词 $\tilde{v}$, 使得 $\tilde{v}$ 包含 v 作为因子, 并且 x 在 $\tilde{v}$ 中不是递归的。换句话说, $\tilde{v}$ 只有有限次数的字母 x 出现。此外, $\tilde{v}$ 的构造也已经给出。然后使用具有非递归字母 x 的无限 α -幂自由词来构造过渡词。结果展示了字母表中包含 k 个字母的 α 次幂自由词, 其中 $(k, \alpha) \in \Upsilon$ 。

令

$$\tilde{\Upsilon} = \{(k, \alpha) \mid k \in \mathbb{N} \text{ and } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ and } k \geq 3 \text{ and } \alpha \geq 5\}.$$

在当前的文章中, 我们将带有非重现字母的右无限和左无限幂自由词的构造推广到双无限幂自由词。我们证明了我们的结果对于字母表中含有 k 个字母的 α -幂自由词成立, 其中 $(k, \alpha) \in \tilde{\Upsilon}$ 。请注意 $\tilde{\Upsilon} \subset \Upsilon$ 。 $L_{k, \alpha}^{\mathbb{Z}}$ 表示所有双无限的 α 次幂自由词的集合, 这些词基于一个包含 k 个字母的字母表, 其中 α 是一个正有理数且 k 是一个正整数。形式上, 我们的主要定理声明如果 $(k, \alpha) \in \tilde{\Upsilon}$, $v \in L_{k, \alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和 w 是 v 的有限因子, 则存在 $\tilde{v} \in L_{k, \alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和一个字母 x , 使得 w 是 $\tilde{v}$ 的因子, 并且 x 在 $\tilde{v}$ 中只有有限多次出现。

为了证明当前的结果, 我们应用了来自 [4] 的想法。令 v_1 为一个带有非循环字母 x 的左无限 α -幂词, 并且令 v_2 为一个不包含字母 x 的右无限 α -幂词。通过对某些反复出现因素的仔细观察, 我们识别出一个后缀 $\hat{v}_1$, 它是 v_1 的一部分, 使得如果 $\hat{v}_1$ 是一个具有 $v_1 = \hat{v}_1 \tilde{v}_1$ 的左无限词, 则 $\hat{v}_1 v_2$ 是一个双无限 α -幂自由词。

2 预备知识

令 Σ_k 表示一个含有 k 个字母的字母表。令 Σ_k^+ 表示所有非空有限词的集合, Σ_k 上, 令 ϵ 表示空词, 令 $\Sigma_k^* = \Sigma_k^+ \cup \{\epsilon\}$, 令 $\Sigma_k^{\mathbb{N}, R}$ 表示所有右无穷词的集合, Σ_k 上, 令 $\Sigma_k^{\mathbb{N}, L}$ 表示所有左无穷词的集合, Σ_k 上, 令 $\Sigma_k^{\mathbb{Z}}$ 表示所有双侧无穷词的集合, Σ_k 上。

令 $\Sigma_k^\infty = \Sigma_k^{\mathbb{N}, L} \cup \Sigma_k^{\mathbb{N}, R} \cup \Sigma_k^{\mathbb{Z}}$ 成立。我们称 $w \in \Sigma_k^\infty$ 为无限词。

令 $\text{occur}(w, t)$ 表示单词 $w \in \Sigma_k^* \cup \Sigma_k^\infty$ 中非空因子 $t \in \Sigma_k^+$ 的所有出现次数。如果 $w \in \Sigma_k^\infty$ 和 $\text{occur}(w, t) = \infty$, 那么我们称 t 为重复的因子在 w 中。

令 $F(w)$ 表示有限或无限单词 $w \in \Sigma_k^* \cup \Sigma_k^\infty$ 的所有有限因子的集合。集合 $F(w)$ 包含空词, 如果 w 是有限的, 则也包含 $w \in F(w)$ 。令 $F_{\text{rec}}(w) \subseteq F(w)$ 表示 $w \in \Sigma_k^\infty$ 的所有递归非空因子的集合。

令 $\text{Prf}(w) \subseteq F(w)$ 表示 $w \in \Sigma_k^* \cup \Sigma_k^{\mathbb{N}, R}$ 的所有前缀的集合, 令 $\text{Suf}(w) \subseteq F(w)$ 表示 $w \in \Sigma_k^* \cup \Sigma_k^{\mathbb{N}, L}$ 的所有后缀的集合。我们定义 $\epsilon \in \text{Prf}(w) \cap \text{Suf}(w)$, 并且如果 w 是有限的, 则 $w \in \text{Prf}(w) \cap \text{Suf}(w)$ 也成立。

令 $L_{k, \alpha}$ 表示一个在包含 k 个字母的字母表上的 α 次幂自由语言, 其中 α 是一个正有理数且 k 是一个正整数。我们有 $L_{k, \alpha} = \{w \in \Sigma_k^* \mid w \text{ is } \alpha\text{-power free}\}$ 。令

$$L_{k, \alpha}^\infty \subseteq \Sigma_k^\infty = \{w \in \Sigma_k^\infty \mid F(w) \subseteq L_{k, \alpha}\}.$$

从而 $L_{k, \alpha}^\infty$ 表示所有无限 α 次幂自由词的集合, 这些词是在 Σ_k 上定义的。此外我们定义 $L_{k, \alpha}^{\mathbb{N}, R} = L_{k, \alpha}^\infty \cap \Sigma_k^{\mathbb{N}, R}$, $L_{k, \alpha}^{\mathbb{N}, L} = L_{k, \alpha}^\infty \cap \Sigma_k^{\mathbb{N}, L}$ 和 $L_{k, \alpha}^{\mathbb{Z}} = L_{k, \alpha}^\infty \cap \Sigma_k^{\mathbb{Z}}$; 分别表示右无限、左无限和双无限 α -幂自由词的集合。

令 $\mathbb{Z}$ 表示整数集合。我们定义有限或无限单词 $w = \Sigma_k^* \cup \Sigma_k^\infty$ 的反向 w^R 如下:

- $\epsilon^R = \epsilon$.
- 如果 $w \in \Sigma_k^+$ 和 $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, 其中 $w_i \in \Sigma_k$ 和 $1 \leq i \leq m$, 则 $w^R = w_m \cdots w_2 w_1$ 。

- 如果 $w \in \Sigma_k^{\mathbb{N},L}$ 和 $w = \cdots w_2 w_1$, 其中 $w_i \in \Sigma_k$ 和 $i \in \mathbb{N}$, 那么 $w^R = w_1 w_2 \cdots \in \Sigma_k^{\mathbb{N},R}$ 。
- 如果 $w \in \Sigma_k^{\mathbb{N},R}$ 和 $w = w_1 w_2 \cdots$, 其中 $w_i \in \Sigma_k$ 和 $i \in \mathbb{N}$, 那么 $w^R = \cdots w_2 w_1 \in \Sigma_k^{\mathbb{N},L}$ 。
- 如果 $w \in \Sigma_k^{\mathbb{Z}}$ 和 $w = \cdots w_{-2} w_{-1} w_0 w_1 w_2 \cdots$, 其中 $w_i \in \Sigma_k$ 和 $i \in \mathbb{Z}$, 则 $w^R = \cdots w_2 w_1 w_0 w_{-1} w_{-2} \cdots$ 。

备注 2.1. 显然, 逆函数保持了无幂性, 并且每个 α -无幂词的因子也是 α -无幂的。

下一个命题是使用当前文章的符号对推论 1 从 [4] 的一种“重新表述”。

命题 2.2. ([4, Corollary 1] 的重新表述) 如果 $(k, \alpha) \in \Upsilon, v \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}, z \in \text{Suf}(v), x \in F_{\text{rec}}(v) \cap \Sigma_k, s \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$ 和 $x \notin F(s)$, 那么存在一个有限单词 $u \in \Sigma_k^*$ 使得 $z \in \text{Suf}(su)$ 和 $su \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$ 。

备注 2.3. 命题 2.2 表示, 如果 z 是一个可以扩展为左侧无限幂自由词的有限幂自由词, 并且包含字母 x 作为循环因子, 而 s 是一个不包含字母 x 作为因子的左侧无限幂自由词, 则存在一个包含 z 作为后缀并且仅具有有限次数出现 x 的左侧无限幂自由词。

以下基本引理在 [4] 中被证明。为了读者方便, 我们给出了该引理及其证明。

引理 2.4. (重新表述 [4, Lemma 2]) 如果 $k \geq 3$ 和 $\alpha > 2$, 则 $L_{k-1,\alpha}^{\mathbb{N},R} \neq \emptyset$ 。

证明. Thue-Morse 序列是众所周知的无重叠 (2^+ -幂自由) 右无限双字母词 [5]。设 $x \in \Sigma_k$, 且设 $t \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},R}$ 为一个双字母上的 Thue-Morse 序列, 使得 $x \notin F(t)$ 。由于 $k \geq 3$, 我们有这样的 t 存在。这结束了证明。 $\square$

3 双无穷 α -幂词

对于文章的其余部分假设 $(k, \alpha) \in \tilde{\Upsilon}$; 这意味着 $k \geq 3$ 和 $\alpha \geq 5$ 。

我们定义两个技术集 Γ 和 Δ 。

定义 3.1. 令 Γ 是一组三元组, 定义如下。我们有 $(w, \eta, u) \in \Gamma$ 当且仅当

- $w \in \Sigma_k^+$, $\eta, u \in \Sigma_k^*$, 和
- 如果 $|u| \leq |w|$ 则 $|\eta| \geq (\alpha + 1)\alpha^{|w|-|u|}|w|$ 。

$\langle \text{ccn512rf1x} \rangle$

定义 3.2. 令 Δ 为一组按如下定义的 6-元组。我们有 $(s, \sigma, w, \eta, x, u) \in \Delta$ 成立当且仅当

$\langle \text{du77bxn21b} \rangle$

1. $s \in \Sigma_k^{\mathbb{N}, L}$, $\sigma, \eta, u \in \Sigma_k^*$, $w \in \Sigma_k^+$, $x \in \Sigma_k$,

2. $s\sigma w\eta x u \in L_{k, \alpha}^{\mathbb{N}, L}$,

$\langle \text{du87ejh14} \rangle$

3. $(w, \eta, u) \in \Gamma$,

$\langle \text{ddhy7vzlp} \rangle$

4. $\text{occ}(s\sigma w, w) = 1$ 和

5. $x \notin F(s) \cup F(u)$ 。

给定 $(s, \sigma, w, \eta, x, u) \in \Delta$ 和 $y \in \Sigma_k$, 令

$$\Pi(s, \sigma, w, \eta, x, u, y) = \{(r, \beta) \mid r \in \Sigma_k^+ \text{ and } \beta \in \mathbb{Q} \text{ and } \beta > \alpha \text{ and } uy \in L_{k, \alpha} \text{ and } r^\beta \in \text{Suf}(s\sigma w\eta xuy)\}.$$

备注 3.3. 意识到如果 $\Pi(s, \sigma, w, \eta, x, u, y) \neq \emptyset$, 则 $s\sigma w\eta xuy \notin L_{k, \alpha}^{\mathbb{N}, L}$ 。

以下引理从 Π 和 Δ 的定义中显然得出。我们省略了证明。

$\langle \text{rry7idxq2} \rangle$

引理 3.4. 如果 $(s, \sigma, w, \eta, x, u) \in \Delta$, $y \in \Sigma_k$, $uy \in L_{k, \alpha}$, $y \neq x$ 和 $\Pi(s, \sigma, w, \eta, x, u, y) = \emptyset$, 那么 $(s, \sigma, w, \eta, x, uy) \in \Delta$ 。

s	σ	w	η		x	uy
			$\bar{\eta}$	$xuy\bar{r}$		
			$zr^{\beta-2}\bar{r}$	$xuyr$		
			zr^{β}			

表 1: 情况 $|r| \leq |w|$ 和 $|u| \leq |w|$

(fvsty6sd78jh)

对于本节的剩余部分, 假设 $(s, \sigma, w, \eta, x, u) \in \Delta$, $y \in \Sigma_k$, $r \in \Sigma_k^+$ 和 $\beta \in \mathbb{Q}$ 是这样的, 使得 $y \neq x$, $\Pi(s, \sigma, w, \eta, x, u, y) \neq \emptyset$ 和 $(r, \beta) \in \Pi(s, \sigma, w, \eta, x, u, y)$ 。

备注 3.5. 注意字母 y 是这样的, $s\sigma w\eta xuy$ 不是 α -次方自由的, 而 $s\sigma w\eta xu$ 是 α -次方自由的。

我们证明了 xuy 是 r 的后缀。

(fu78dnbcgd)

引理 3.6. 我们有 $xuy \in \text{Suf}(r)$ 。

证明. 意识到如果 $r \in \text{Suf}(uy)$, 那么 $x \notin F(r)$, 进而 $r^\beta \in \text{Suf}(uy)$ 。这是一个矛盾, 因为 $uy \in L_{k,\alpha}$ 。因此我们有 $r \notin \text{Suf}(uy)$ 。由此得出 $|r| > |uy|$, 进而 $xuy \in \text{Suf}(r)$ 。这完成了证明。□

令 $\bar{r} \in \Sigma_k^*$ 为这样的, $r = \bar{r}xuy$; 引理 3.6断言 $\bar{r}$ 存在且唯一确定。

我们证明如果 r^β 比 ηxuy 短, 则存在 η 的一个前缀 $\bar{\eta}$, 使得 $s\sigma w\bar{\eta}xuy$ 是 α -幂自由的。

(vv8d9duij33)

命题 3.7. 如果 $r^\beta \in \text{Suf}(\eta xuy)$, 则存在 $\bar{\eta} \in \text{Prf}(\eta)$ 使得

$$(s, \sigma, w, \bar{\eta}, x, uy) \in \Delta.$$

证明. 令 z 为使得 $\eta xuy = zr^\beta$ 的值。令 $\bar{\eta} = zr^{\beta-2}\bar{r}$ 。然后 $s\sigma w\bar{\eta}xuy \in \text{Prf}(s\sigma w\eta xu)$, 进而定义 3.2的性质 2意味着

$$s\sigma w\bar{\eta}xuy \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}. \quad (1) \quad \boxed{\text{eu7f89fjmmn3}}$$

我们有

$$\begin{aligned}
& \beta|r||z| \geq (\beta-2)|r||z| \\
\implies & \beta|r||z| + (\beta-2)\beta|r||r| \geq (\beta-2)|r||z| + (\beta-2)\beta|r||r| \\
\implies & (|z| + (\beta-2)|r|)\beta|r| \geq (|z| + \beta|r|)(\beta-2)|r| \\
\implies & \frac{|z| + (\beta-2)|r|}{|z| + \beta|r|} \geq \frac{(\beta-2)|r|}{\beta|r|}
\end{aligned} \tag{2}$$

从 (2) 和 $\beta > \alpha \geq 5$ 可知

$$\begin{aligned}
\frac{|\bar{\eta}|}{|\eta|} &= \frac{|zr^{\beta-2}\bar{r}|}{|zr^{\beta}| - |xuy|} \geq \frac{|zr^{\beta-2}|}{|zr^{\beta}|} = \frac{|z| + (\beta-2)|r|}{|z| + \beta|r|} \geq \\
&\frac{(\beta-2)|r|}{\beta|r|} = \frac{\beta-2}{\beta} = 1 - \frac{2}{\beta} > \frac{3}{5}.
\end{aligned} \tag{3}$$

从定义 3.2 的性质 3、(3) 和 $\frac{3}{5} > \frac{1}{5} \geq \frac{1}{\alpha}$ ，我们可知如果 $|u| \leq |w|$ 则

$$|\bar{\eta}| \geq \frac{3}{5}|\eta| \geq \frac{1}{\alpha}|\eta| \geq \frac{1}{\alpha}(\alpha+1)\alpha^{|w|-|u|}|w| > (\alpha+1)\alpha^{|w|-(|u|+1)}|w|. \tag{4}$$

从 (1) 和 (4) 可知 $(w, \eta, uy) \in \Gamma$ 和 $(s, \sigma, w, \bar{\eta}, x, uy) \in \Delta$ 。认识到定义 3.2 的属性 2 是由 (1) 断言的，以及定义 3.2 的属性 3 是由 (4) 断言的。定义 3.2 的其他性质是显而易见的。表 1 阐明了词语的结构。

这完成了证明。 $\square$

下一个引理表明，如果 r 和 u 比 w 短，则 r^β 比 ηxuy 短。

$\langle \text{ujfdnfg87jdd8v} \rangle$

引理 3.8. 如果 $|r| \leq |w|$ 和 $|u| \leq |w|$ ，则 $r^\beta \in \text{Suf}(\eta xuy)$ 。

证明. 定义 3.2 的性质 2 暗示了

$$\beta \leq \alpha + 1. \tag{5}$$

从 $|u| \leq |w|$ 和定义 3.2 的性质 3 可以推导出

$$|\eta| \geq (\alpha + 1)|w|. \tag{6}$$

引理由 (5), (6) 和 $|r| \leq |w|$ 得出。这完成了证明。 $\square$

我们证明如果 r^β 比 ηxuy 长, 那么 r 比 w 长。

(yfdb76sdhv1a09)

引理 3.9. 如果 $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xuy)$, 则 $|r| > |w|$ 。

证明. 引理 3.8表明如果 $|u|, |r| \geq |w|$, 则 $r^\beta \in \text{Suf}(\eta xuy)$ 。因此, 从 $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xuy)$ 可得

$$\max\{|r|, |u|\} > |w|. \quad (7) \quad \text{vbnd788fjen2c}$$

若 $|u| > |w|$, 则根据引理 3.6我们有 $|r| > |w|$ 。于是该引理可由 (7) 推出。这完成了证明。 $\square$

下一个引理表明, ηxuy 包含 $r^{\beta-2}$ 作为因子, 并且 $w\eta xuy$ 包含 $r^{\beta-1}$ 作为因子。

(yv2v2vldihj)

引理 3.10. 如果 $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xuy)$ 则

$$r^{\beta-2} \in \text{Suf}(\eta xuy) \quad \text{and} \quad r^{\beta-1} \in \text{Suf}(w\eta xuy).$$

证明. 我们区分两种情况:

- $r^\beta \in \text{Suf}(w\eta xuy)$ 然后从引理 3.9可知 $r^{\beta-1} \in \text{Suf}(\eta xuy)$, 从而也可知 $r^{\beta-2} \in \text{Suf}(\eta xuy)$ 。
- $r^\beta \notin \text{Suf}(w\eta xuy)$. 然后引理 3.9表明 $w \in F(rr)$, 从而定义 3.2的性质 4表明 $r^{\beta-1} \in \text{Suf}(w\eta xuy)$. 然后由引理 3.9我们有 $r^{\beta-2} \in \text{Suf}(\eta xuy)$ 。

这完成了证明。 $\square$

我们证明如果 r^β 大于 ηxuy , 那么存在 η 的一个前缀 $\bar{\eta}$ 使得 $s\sigma w\bar{\eta}xuy$ 是 α -幂自由的。

(nj8b3vdjlso)

命题 3.11. 如果 $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xuy)$, 则存在 $\bar{\eta} \in \text{Prf}(\eta)$ 使得

$$(s, \sigma, w, \bar{\eta}, x, uy) \in \Delta.$$

s	σ	w	η		x	wy
			$\bar{\eta}xy$	$\bar{r}$		
		$zr^{\beta-2}$		r		
		$zr^{\beta-1}$				
$\dots r^{\beta}$						

表 2: 情况 $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xy)$

$\langle \text{vmi99sgtxc78} \rangle$

证明. 从引理 3.6和引理 3.10我们有

$$|\eta| \geq |r^{\beta-3}|. \quad (8) \quad \langle \text{dui8ff9ekj} \rangle$$

从 $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xy)$ 得出

$$|\eta| \leq |r^\beta|. \quad (9) \quad \langle \text{dj k8f9erk54d} \rangle$$

设 $z \in \Sigma_k^*$ 为这样的, 使得 $zr^{\beta-1} = w\eta xy$, 并设 $\bar{\eta} \in \text{Prf}(\eta)$ 为这样的, 使得 $w\bar{\eta}xy = zr^{\beta-2}$. 引理 3.10表明 $z, \bar{\eta}$ 存在并且是唯一确定的。显然我们有

$$|\bar{\eta}| \geq |\eta| - |r|. \quad (10) \quad \langle \text{hnc87gfhjj8} \rangle$$

由于 $\beta > \alpha \geq 5$, 从 (8)、(9) 和 (10) 可知

$$\frac{|\bar{\eta}|}{|\eta|} \geq \frac{|\bar{\eta}|}{|r^\beta|} \geq \frac{|\eta| - |r|}{|r^\beta|} \geq \frac{|r^{\beta-3}| - |r|}{|r^\beta|} = \frac{|r^{\beta-4}|}{|r^\beta|} = \frac{\beta - 4}{\beta} > \frac{1}{5}. \quad (11) \quad \langle \text{pce5terdu} \rangle$$

从定义 3.2的性质 3, (11) 以及 $\frac{1}{5} \geq \frac{1}{\alpha}$ 我们有, 如果 $|u| \leq |w|$, 则

$$|\bar{\eta}| \geq \frac{1}{5}|\eta| \geq \frac{1}{\alpha}(\alpha + 1)\alpha^{|w|-|u|}|w| > (\alpha + 1)\alpha^{|w|-(|u|+1)}|w|. \quad (12) \quad \langle \text{dyuejh77d8f} \rangle$$

显然, $w\bar{\eta}xy \in \text{Prf}(w\eta x)$, 因此 $s\sigma w\bar{\eta}xy \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$. 然后很容易验证 $(s, \sigma, w, \bar{\eta}, x, uy) \in \Delta$. 注意定义 3.2的性质 3来自 (12)。

表 2显示了该情况下的词语结构。这完成了证明。 $\square$

前面两个命题的一个结果是, 在每种情况下都有一个前缀 $\bar{\eta}$ 为 η 的一部分, 使得 $s\sigma w\bar{\eta}xy$ 是 α -幂自由的。

$\langle \text{dyu77bvqsj} \rangle$

引理 3.12. 存在 $\bar{\eta} \in \text{Prf}(\eta)$, 使得 $(s, \sigma, w, \bar{\eta}, x, uy) \in \Delta$ 。

证明. 我们区分两种情况:

- $r^\beta \in \text{Suf}(\eta xuy)$ 在这种情况下, 引理由命题 3.7 得出。
- $r^\beta \notin \text{Suf}(\eta xuy)$ 并且 $r^\beta \in \text{Suf}(w\eta xuy)$ 。在这种情况下, 该引理可由命题 3.11 推出。

这完成了证明。 $\square$

4 过渡词

本节的第一个定理表明, 如果 $(s, \sigma, w, \eta, x, \epsilon) \in \Delta$ 和 t 是一个没有出现字母 x 的右无穷 α -幂自由词, 则存在一个双无穷 α -幂自由词, 包含因子 w , 并且仅有限次出现 x 。

$\langle \text{d78fju5e4} \rangle$

定理 4.1. 如果 $(s, \sigma, w, \eta, x, \epsilon) \in \Delta$, $t \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},R}$ 和 $x \notin F(t)$, 则存在 $\hat{\eta} \in \text{Prf}(\eta)$ 使得 $s\sigma w\hat{\eta}xt \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 。

证明. 给定 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 令 $\phi(i) \in \text{Prf}(t) \cap \Sigma_k^i$ 是 t 的长度为 i 的前缀。我们有 $\phi(0) = \epsilon$ 。令 $y_j \in \Sigma_k$ 满足 $\phi(j-1)y_j = \phi(j)$ 。

令 $\omega(0) = \eta$ 。我们有 $(s, \sigma, w, \omega(0), x, \phi(0)) \in \Delta$ 。给定 $j \in \mathbb{N}$, 我们定义 $\omega(j) \in \text{Prf}(\omega(j-1))$ 如下:

- 如果 $\Pi(s, \sigma, w, \omega(j-1), x, \phi(j-1), y_j) = \emptyset$, 则我们定义 $\omega(j) = \omega(j-1)$ 。引理 3.4 暗示了 $(s, \sigma, w, \omega(j), x, \phi(j)) \in \Delta$ 。
- 如果 $\Pi(s, \sigma, w, \omega(j-1), x, \phi(j-1), y_j) \neq \emptyset$, 则引理 3.12 表明存在 $\bar{\eta} \in \text{Prf}(\omega(j-1))$ 使得 $(s, \sigma, w, \rho, x, \phi(j)) \in \Delta$ 。我们定义 $\omega(j) = \bar{\eta}$ 。

由此可知, $\omega(j)$ 对所有 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 都有良好定义, 并且对于所有 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 也有 $(s, \sigma, w, \omega(j), x, \phi(j)) \in \Delta$ 。

由于 $\omega(0) = \eta$ 是一个有限词, 并且对于所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $\omega(j) \in \text{Prf}(\omega(j-1))$, 显然存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得对于所有 $i \geq m$ 都有 $\omega(i) = \omega(m)$ 。因此我们有对于所有 $i \geq m$ 都有 $(s, \sigma, w, \omega(m), x, \phi(i)) \in \Delta$ 。设 $\hat{\eta} = \omega(m)$ 。我们得出结论 $s\sigma w\hat{\eta}xt \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 。

这完成了证明。 $\square$

如果因子 w 在双无穷词 v 中是递归的, 则有可能 w 只在 v 的“左边或右边”是递归的。对于下一个命题, 我们需要字母 x 在“右边”是递归的。我们正式定义这个概念。

$\langle dxhb7d6djwb \rangle$

定义 4.2. 假设 $v \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和 $w \in F(v) \setminus \{\epsilon\}$ 。如果存在 $v_1 \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$ 和 $v_2 \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},R}$, 使得 $v = v_1v_2$ 和 $w \in F_r(v_2)$, 则我们说 w 在 v 中是右侧递归。

备注 4.3. 注意在定义 4.2 中没有对 w 在 v_1 中的重复出现施加任何限制。这意味着 w 在 v_1 中也可能重复出现。

如果 v 是一个双无限的 α -幂自由单词, 且字母 x 在 v 中是右侧递归的, 则我们证明当前文章的主要结果对 v 成立。

$\langle udi8ds0fne5df \rangle$

命题 4.4. 如果 $v \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$, $w \in F(v) \setminus \{\epsilon\}$, $x \in F(w) \cap \Sigma_k$ 和 x 在 v 上是右侧递归的, 则存在 $\hat{v} \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 使得 $w \in F(\hat{v})$ 和 $x \notin F_r(\hat{v})$ 。

证明. 显然存在 $\tilde{v} \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$, $\tilde{v} \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},R}$ 和 $\tilde{\eta} \in \Sigma_k^*$, 使得 $v = \tilde{v}w\tilde{\eta}x\tilde{v}$ 和 $(w, \tilde{\eta}, \epsilon) \in \Gamma$ 。只需注意 x 在 v 中是右递归的; 因此, $\tilde{\eta}$ 可以选择比任意选定的正数更长。

设 t 是字母表 $\Sigma_k \setminus \{x\}$ 上的一个右无限 α 次自由词。由于 $\alpha \geq 5$, 引理 2.4 断言 t 存在。

- 如果 $x \notin F_r(\tilde{v})$, 则令 $\bar{s} = \tilde{v}$ 和 $u = w\tilde{\eta}x$ 。

- 如果 $x \in F_r(\tilde{v})$, 则令 $\bar{s} = t^R$ 。显然 $\bar{s}$ 是一个左无穷 α -幂自由且 $x \notin F(s)$ 的。命题 2.2 表明存在一个有限词 u , 使得 $\bar{s}u \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$, 以及 $w\tilde{\eta}x \in \text{Suf}(\bar{s}u)$ 。

然后, 显然存在 $s \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{N},L}$ 和 $\sigma, \eta \in \Sigma_k^*$ 使得

$$(s, \sigma, w, \eta, x) \in \Delta \quad \text{and} \quad s\sigma w\eta x = \bar{s}u.$$

注意由于 $x \in F(w)$ 和 $x \notin F_r(\bar{s})$, 定义 3.2 的属性 4 通过适当选择 s 、 σ 和 η 很容易被断言。

定理 4.1 表明存在 $\bar{\eta}$ 使得 $s\sigma w\bar{\eta}xt \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 。令 $\hat{v} = s\sigma w\bar{\eta}xt$ 。显然 $w \in F(\hat{v})$ 和 $x \notin F_r(\hat{v})$ 。这完成了证明。 $\square$

现在, 我们可以进入本文的主要定理。

定理 4.5. 如果 $v \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$, $w \in F(v) \setminus \{\epsilon\}$, 则存在 $\bar{v} \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和 $x \in \Sigma_k$ 使得 $w \in F(\bar{v})$ 和 $x \notin F_r(\bar{v})$ 。

证明. • 如果 $\Sigma_k \not\subset F_r(v)$, 则令 $x \in \Sigma_k \setminus F_r(v)$ 并且令 $\bar{v} = v$ 。

- 如果 $\Sigma_k \subset F_r(v)$, 则令 $x \in F(w) \cap \Sigma_k$ 。我们有 $x \in F_r(v)$ 。由此可知, 要么 x 在 v 中是右侧递归的, 要么 x 在 v^R 中是右侧递归的。
 - 如果 x 在 v 中是右递归的, 则命题 4.4 暗示存在 $\hat{v}$, 使得 $w \in F(\hat{v})$ 和 $x \notin F_r(\hat{v})$ 。令 $\bar{v} = \hat{v}$ 。
 - 如果 x 在 v^R 中是右侧递归的。命题 4.4 意味着存在 $\hat{v}$ 使得 $w^R \in F(\hat{v})$ 成立。设 $\bar{v} = \hat{v}^R$ 。然后显然 $w \in F(\bar{v})$ 和 $x \notin F_r(\bar{v})$ 。

对于每一个案例, 我们展示了 $\bar{v} \in L_{k,\alpha}^{\mathbb{Z}}$ 和 $x \in \Sigma_k$ 使得 $w \in F(\bar{v})$ 和 $x \notin F_r(\bar{v})$ 。这结束了证明。 $\square$

致谢

此项工作得到了布拉格捷克技术大学资助机构的资助, 资助编号为 SGS20/183/OHK4/3T/14。

参考文献

- 978-3-030-19955-5_27 [1] E. A. PETROVA AND A. M. SHUR, *Transition property for cube-free words*, in Computer Science – Theory and Applications, R. van Bevern and G. Kucherov, eds., Cham, 2019, Springer International Publishing, pp. 311–324.
- Rampersad_Narad2007 [2] N. RAMPERSAD, *Overlap-free words and generalizations*. A thesis, University of Waterloo, 2007.
- 978-3-642-82456-2_20 [3] A. RESTIVO AND S. SALEMI, *Some decision results on nonrepetitive words*, in Combinatorial Algorithms on Words, A. Apostolico and Z. Galil, eds., Berlin, Heidelberg, 1985, Springer Berlin Heidelberg, pp. 289–295.
- 978-3-030-48516-0_22 [4] J. RUKAVICKA, *Transition property for α -power free languages with $\alpha \geq 2$ and $k \geq 3$ letters*, in Developments in Language Theory, N. Jonoska and D. Savchuk, eds., Cham, 2020, Springer International Publishing, pp. 294–303.
- SHALLIT201996 [5] J. SHALLIT AND A. SHUR, *Subword complexity and power avoidance*, Theoretical Computer Science, 792 (2019), pp. 96 – 116. Special issue in honor of the 70th birthday of Prof. Wojciech Rytter.
- /978-3-642-22321-1_3 [6] A. M. SHUR, *Growth properties of power-free languages*, in Developments in Language Theory, G. Mauri and A. Leporati, eds., Berlin, Heidelberg, 2011, Springer Berlin Heidelberg, pp. 28–43.