离散哈代-利特尔伍德极大函数的二阶导数

FARUK TEMUR

摘要. Hardy-Littlewood 极大函数的正则性，在离散和连续背景下，以及对于中心化和非中心化的变体，过去二十年来一直是研究的重点。但迄今为止的努力主要集中在一阶可微性和变化上，因为众所周知，在连续背景中高阶正则性是不可能实现的。这篇简短的笔记给出了离散非中心极大函数高阶正则性的首个正面结果。

1. 介绍

令 $\mathbb{Z}^+$ 表示非负整数。对于函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$，离散非中心化平均值 $\mathcal{A}_{r,s}f(n)$，$r,s\in\mathbb{Z}^+$ 是

$$\mathcal{A}_{r,s}f(n):=\frac{1}{r+s+1}\sum_{j=-r}^{s}|f(n+j)|.$$

然后，离散非中心化的 Hardy-Littlewood 极大函数是

$$\mathcal{M}f(n):=\sup_{r,s\in\mathbb{Z}^+}\mathcal{A}_{r,s}f(n).$$

自 20 世纪初以来，已知这是一个在 $l^p(\mathbb{Z})$，$1<p\leq\infty$ 上有界的算子，并且还满足弱类型 $(1,1)$ 限制。最近，这种算子的正则性引起了分析学家的兴趣，关于这个问题已经发展出大量文献。在这里，我们将仅回顾这些文献中最相关的结果，对于更广泛的观点，读者可以参考综述 [2]。在离散背景下，正则性是通过由

$$\begin{aligned}
f'(n)&:=f(n+1)-f(n),\\
f''(n)&:=f(n+2)-2f(n+1)+f(n),\\
f'''(n)&:=f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n),
\end{aligned}$$

定义的离散导数来研究的，等等。根据工作 [1] 我们知道

$$\|(\mathcal{M}f)'\|_1\leq\|f'\|_1.$$

我们在本工作中旨在证明当 f 是一个特征函数时二阶导数的类似结果：

定理 1. 令 $A\subseteq\mathbb{Z}$ 和 $1\leq p\leq\infty$。然后对于这个集合的特征函数 χ_A。

$$\|(\mathcal{M}\chi_A)''\|_p\leq 2^{1-\frac{1}{p}}3^{\frac{1}{p}}\|\chi_A''\|_p.$$

下一节为证明奠定了基础，该证明在最后一节中给出。

Date: 2025 年 4 月 25 日.
2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 42B25; Secondary: 46E35.
Key words and phrases. 变差的有界性，离散极大函数，二阶导数.

2. 预备知识

令 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$。通过变量变换

$$\|f''\|_1=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n+1)+f(n-1)-2f(n)|. \tag{1}$$

我们定义凸点和凹点的集合

$$S_+f:=\{n\in\mathbb{Z}:f(n+1)+f(n-1)\geq 2f(n)\},\qquad S_-f:=\mathbb{Z}\setminus S_+f,$$

以及凹点的左边界和右边界

$$\partial_l S_-f:=\{n\in S_-f:n-1\in S_+f\},\quad \partial_r S_-f:=\{n\in S_-f:n+1\in S_+f\}.$$

然后将边界定义为 $\partial S_-f:=\partial_l S_-f\cup\partial_r S_-f$。我们观察到，当且仅当 ∂S_-f 为空时，S_+f,S_-f 中有一个是空集。另一方面，假设 S_+f,S_-f 都是非空的。然后，$\partial_l S_-f$ 是空的当且仅当 S_-f 具有有限上确界，并由所有不超过该上确界的整数组成。类似地，$\partial_r S_-f$ 是空的当且仅当 S_-f 具有有限下确界，并由所有不小于该下确界的整数组成。我们在 S_+f 中定义链为 S_+f 的连续元素的最大长度序列。S_-f 中的链类似地定义。对于链 $n,n+1,\ldots,n+k$ 在 S_+f

$$\sum_{j=n}^{n+k}|f(j+1)+f(j-1)-2f(j)|=f(n-1)-f(n)-f(n+k)+f(n+k+1),$$

并且如果它是在 S_-f

$$\sum_{j=n}^{n+k}|f(j+1)+f(j-1)-2f(j)|=-f(n-1)+f(n)+f(n+k)-f(n+k+1).$$

因此，我们可以仅使用凹边界和无穷远处的极限来限定二阶导数的 l^1 范数：

$$\begin{aligned}\|f''\|_1\leq{}&\limsup_{n\to\infty}|f(n+1)-f(n)|+\limsup_{n\to\infty}|f(-n-1)-f(-n)|\\&+2\sum_{n\in\partial_l S_-f}f(n)-f(n-1)+2\sum_{n\in\partial_r S_-f}f(n)-f(n+1).\end{aligned} \tag{2}$$

这一观察为我们在下一节证明定理 1 奠定了基础。

3. 定理 1 的证明

为了证明定理 1，我们使用以下引理，该引理观察到 $\mathcal{M}\chi_A$ 的凹性仅在 A 点处可能发生。

引理 1. 设 A 是整数的一个子集。如果 $n\in S_-\mathcal{M}\chi_A$，则 $n\in A$。

证明. 条件 $n\in S_-\mathcal{M}\chi_A$ 表明 $\mathcal{M}\chi_A(n)$ 大于它的其中一个邻居 $\mathcal{M}\chi_A(n-1),\mathcal{M}\chi_A(n+1)$.。不失一般性，假设 $\mathcal{M}\chi_A(n)>\mathcal{M}\chi_A(n-1)$.。这反过来意味着 $\mathcal{M}\chi_A(n)=\mathcal{A}_{0,s}\chi_A(n)$，否则严格不等式将不会成立。现在假设相反的情况，即 $n\notin A$。然后

$$\mathcal{M}\chi_A(n)=\frac{1}{s+1}\sum_{j=n+1}^{n+s}\chi_A(j)=\frac{s+1}{s^2+2s+1}\sum_{j=n+1}^{n+s}\chi_A(j),$$

当

$$\mathcal{M}\,\chi_A(n-1) \geq \frac{1}{s+2}\sum_{j=n+1}^{n+s}\chi_A(j), \quad \mathcal{M}\,\chi_A(n+1) \geq \frac{1}{s}\sum_{j=n+1}^{n+s}\chi_A(j),$$

暗示

$$\mathcal{M}\,\chi_A(n-1) + \mathcal{M}\,\chi_A(n+1) \geq \frac{2s+2}{s^2+2s}\sum_{j=n+1}^{n+s}\chi_A(j).$$

因此 $2\,\mathcal{M}\,\chi_A(n) \leq \mathcal{M}\,\chi_A(n-1) + \mathcal{M}\,\chi_A(n+1)$, 矛盾。因此 $n \in A$. □

定理 1 的证明. 如果 A 或 A^c 是空集，该定理显然是真的。因此我们可以假设不是这种情况。我们设 $p=1$，这成为关键情形。在这种情况下 $\|\chi_A''\|_1 \geq 2$。我们可以清楚地将每个极限项在 (2) 中限定为 1。为了界定向量和我们使用引理 1： $n \in S_-\,\mathcal{M}\,\chi_A$ 暗示 $n \in A$，因此 $\mathcal{M}\,\chi_A(n) = 1 = \chi_A(n)$。因此对于 n 在 $\partial_l S_-\,\mathcal{M}\,\chi_A$

$$\mathcal{M}\,\chi_A(n) - \mathcal{M}\,\chi_A(n-1) \leq \chi_A(n) - \chi_A(n-1) \leq 2\chi_A(n) - \chi_A(n-1) - \chi_A(n+1),$$

以及对于 n 在 $\partial_r S_-\,\mathcal{M}\,\chi_A$

$$\mathcal{M}\,\chi_A(n) - \mathcal{M}\,\chi_A(n+1) \leq \chi_A(n) - \chi_A(n+1) \leq 2\chi_A(n) - \chi_A(n-1) - \chi_A(n+1).$$

因此我们可以得出结论为

$$\|(\mathcal{M}\,\chi_A)''\|_1 \leq 2 + 2\sum_{n\in\partial S_-\,\mathcal{M}\,\chi_A}|2\chi_A(n) - \chi_A(n-1) - \chi_A(n+1)| \leq 3\|\chi_A''\|_1.$$

对于 $p>1$，我们首先观察到 $\|(\mathcal{M}\,\chi_A)''(n)\|_\infty \leq 2$。如 $\|\chi_A''\|_\infty \geq 1$ 所示，这立即得出 $p=\infty$ 情形的结论。对于 $1<p<\infty$，

$$\|(\mathcal{M}\,\chi_A)''\|_p^p \leq 2^{p-1}\|(\mathcal{M}\,\chi_A)''\|_1 \leq 3\cdot 2^{p-1}\|\chi_A''\|_1.$$

如 $|\chi_A''(n)| \in \{0,1,2\}$，它由 $|\chi_A''(n)|^p$. 主导，因此 $\|\chi_A''\|_1 \leq \|\chi_A''\|_p^p$，得出该情形的结论。 □

References

[1] J. Bober, E. Carneiro, K. Hughes and L. B. Pierce, *On a discrete version of Tanaka's theorem for maximal functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **140**, no. 5 (2012), 1669–1680.

[2] E. Carneiro, *Regularity of maximal operators: recent progress and some open problems*, in New Trends in Applied Harmonic Analysis, Volume 2: Harmonic Analysis, Geometric Measure Theory, and Applications, Editors: Akram Aldroubi, Carlos Cabrelli, Stéphane Jaffard, Ursula Molter, Springer 2019

[3] H. Tanaka, *A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function*, Bull. Austral. Math. Soc. **65**, no. 2 (2002), 253–258.

Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla, İZMİR, 35430, TÜRKİYE

Email address: `faruktemur@iyte.edu.tr`