

两种线性统计量在 Jellium 模型中的协方差计算

Pete Rigas

摘要

我们扩展了之前的成果，提供了 Jellium 模型的线性统计量方差的一个精确公式，Jellium 模型是通过 Dyson 对数气体的 $k \rightarrow 0^+$ 极限获得的一维统计力学模型。对于这种协方差的计算，与之前对对数气体协方差的计算相比，我们得到了两个线性统计量之间的一个公式，该公式依赖于任意函数 f 和 g 在实线上的一个渐近逼近，以及从大 N 偏差得到的 Jellium 概率分布函数。

1 介绍

1.1 概述

对数气体已经引起了数学和物理学界的广泛关注，涉及精确的极值统计、索引分布以及一维库仑气中的连接 [3,4]、与随机矩阵理论的联系 [7]、大偏差原理 [10]、与一维等离子体的关系特征化 [6,11]、吉布斯测度分类 [1]、中心极限定理结果 [13]，以及许多猜想和开放问题 [9]。为了扩展文献中提供的 Jellium 模型线性统计量方差的精确公式的分析 [5]，这可以进一步增加关于线性统计量在各种模型中的行为近似的文献工作，包括随机矩阵顶级特征值线性统计量的截断 [8]，以及另一个结果对于协方差度量 [2]，在某些假设下可用于获得广义协方差度量，我们扩展了包含于 [5] 中的最近工作的方法以获取两个线性统计量的大、严格正的 N 极限下的协方差。

1.2 论文组织结构

在下面，我们展示了来自 Jellium 模型的对象以定义能量函数，并与里兹气体的量建立联系。在引入依赖于两个参数线性统计量的协方差公式之前，我们将概述一个线性统计函数 Ψ 。根据 [5] 中介绍的方法来获取当 N 较大时方差统计量的行为，

我们计算了 Jellium 模型中两个线性统计量的协方差。这与之前在 [2] 中为对数气体获得的协方差度量有所不同，后者依赖于一个有效的鞍点密度作用。

1.3 动机

我们研究 Jellium 协方差函数闭式表示的主要动机来源于统计力学的其他模型，其中一些模型作者之前已经进行过探讨 [12]。特别是，无论点粒子之间的相互作用是定义在直线上还是整个晶格上，通过限制沿实数线副本上的最近邻相互作用，可以对鞍点动作进行推广。这种行为适合于推广其他模型的协方差函数。通常而言，能够为统计物理中的模型写出相关函数的闭式表示有助于描述这些函数的不同衰减速率。根据感兴趣模型的相图，可能存在阈值之上和之下，在此范围内，该模型表现出明显不同的行为。在实数线副本的简化设置下，与 Riesz 气体相关的 Jellium 模型可能表现出以下几种可能的行为范围：(1) 协方差为零，或 (2) 沿分布于实直线上的粒子配置时协方差严格为正。从编码在统计力学其他模型哈密顿量中的最近邻相互作用中，并且这些模型除了 Riesz 气体和 Jellium 模型外还涵盖了 $\mathbf{Z}^2$ 或其他晶格上，其支持的协方差函数可以像之前描述的 Jellium 模型中的协方差函数那样在两个类别中表现出类似的行为；然而，在一个实数线副本之上或之下粒子最近邻行之间的相互作用可能会从晶格上的更复杂全局行为中出现。

1.4 凝胶物对象

我们引入以下量。

引入某些 x_i 在 $\mathbf{R}$ 上，**定义 1** (里兹气体能量)。

$$\mathcal{E}^k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) \equiv \mathcal{E} \equiv \frac{A}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \alpha \operatorname{sgn}(k) \sum_{i \neq j} |x_i - x_j|^{-k},$$

对应能量的里兹气体，对于严格正参数 A 和 α ，有，

$$\begin{aligned} A &\sim O(1), \\ \alpha &\sim O(1), \end{aligned}$$

和符号函数，

$$\text{sgn}(k) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

上面的能量函数，在每个粒子位于任意位置 i 的情况下，经过共形变换后，

$$T(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

对于 $ad - cb \neq 0$ ，将每个粒子在 x_i 的位置发送到 λ_i ，来自

$$T(x_i) = \frac{ax_i + b}{cx_i + d} \mapsto \lambda_i,$$

生成随机矩阵的特征值分布，由以下公式给出：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^k(T(x_1), \dots, T(x_i), \dots, T(x_N)) &\equiv \mathcal{E}^k(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \equiv (\mathcal{E}')^k \equiv \frac{A}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \\ &\quad + \alpha \text{sgn}(k) \sum_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-k}, \end{aligned}$$

在相同的耦合选择下 A 和 α 。

定义 2 (*Riesz* 气体概率测度在随机矩阵特征值上的分布，一种 *Gibbs-Boltzmann* 分布)。从能量的**定义 1**中引入，

$$\mathbf{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \equiv \frac{1}{Z_N^k} \exp\left(-\frac{(\mathcal{E}')^k}{k_b T}\right),$$

给定的分区函数，

$$Z_N^k(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \equiv Z_N^k \equiv \sum_{i: i \leq N} \left(\frac{A}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \alpha \text{sgn}(k) \sum_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-k} \right),$$

正规化 $\exp[-\mathcal{E}(\lambda_i)]$ ，使得 $\mathbf{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N)$ 成为一个概率测度，对于某个 $N > 0$ ，玻尔兹曼常数 k_b 和温度 $T > 0$ ，有，

$$T \sim O(1) \quad .$$

引入**定义 3** (将吉布斯-玻尔兹曼权重的能量函数重新缩放以获得等离子体模型的概率测度 $k \equiv -1$)。引入 $Z_N^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \equiv Z_N^{-1}$, 与,

$$Z_N^{-1} \equiv \sum_{i:i \leq N} \left(\frac{A}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \alpha \operatorname{sgn}(-1) \sum_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-1} \right) \equiv \sum_{i:i \leq N} \left(\frac{A}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \alpha \sum_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-1} \right),$$

对应于 *Riesz* 气体概率测度的分区函数, 对于**定义 2** 的 $k \equiv -1$, 在重新缩放后得到以下能量函数的求和形式。

$$Z_N^{-1}(L_N \lambda_1, \dots, L_N \lambda_i, \dots, L_N \lambda_N) \equiv \sum_{i:i \leq N} \left(\frac{A}{2} \sum_{i=1}^n (L_N \lambda)_i^2 - \alpha L_N \sum_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-1} \right),$$

因此提供了 Jellium 模型的概率测度。

$$\mathbf{P}(L_N \lambda_1, \dots, L_N \lambda_i, \dots, L_N \lambda_N) \equiv \tilde{\mathbf{P}}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \equiv \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp \left(- \frac{(\mathcal{E}')^{-1}}{k_b T} \right),$$

对于重新缩放的 Jellium 能量函数,

$$\mathcal{E}^{-1}(L_N \lambda_1, \dots, L_N \lambda_i, \dots, L_N \lambda_N) \equiv (\mathcal{E}')^{-1} \equiv \frac{A}{2} \sum_{i=1}^n (L_N \lambda)_i^2 - \alpha L_N \sum_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-1},$$

给定一个合适的常数 $L_N > 0$, 该常数取决于 N 的选择。

定义 4 (线性统计量)。一个线性统计量具有如下形式,

$$s \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

对于实线上位置 x 的任意函数 $f(x)$, 在**定义 2** 中提供的相同参数选择 N 下。

定义 5 (来自 *Gibbs-Boltzmann* 权重的协方差公式, [2])。引入对于 $\Lambda^N \subsetneq \mathbf{R}$,

$$\text{Cov}(A, B) \equiv \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} d\lambda_i \right) \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp\left(-\frac{(\mathcal{E}')^{-1}}{k_b T}\right) A(T(x_1, \dots, x_N)) B(T(x_1, \dots, x_N)) - \langle A \rangle \langle B \rangle,$$

对应于协方差公式在线性统计量之间的值。

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

和,

$$B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i),$$

对任意两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 以及 $\Lambda \subsetneq \mathbf{R}^N$ 表示期望,

$$\langle \cdot \rangle_{A, \mathbf{R}} \equiv \langle \cdot \rangle_A,$$

对抗一个测试线性统计量 A 。

1.5 库仑气体方法概述

在本节中, 我们回顾了如何将 Gibbs-Boltzmann 权重从对数气体模型适应到具有 **定义 3** 的 Jellium 模型。这种权重函数的选择对于通过鞍点方法的适应所获得的协方差公式来说是重要的。如将展示的那样, 使用鞍点方法和大偏差论据, 有效势函数 $V^{\text{eff}}(\cdot)$ 对 Jellium 概率测度的大偏差近似施加了限制。因此, 可以得到 Jellium 模型协方差公式的期望表示形式。作为两个任意线性统计量的函数, 协方差函数用一个适当指数幂的比例来近似, 该指数幂与鞍点作用成正比。

首先, 在线性统计量上引入一个概率测度, 带有,

$$\mathcal{P}[s, N] \equiv \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \tilde{\mathbf{P}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) \delta_{s - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)}$$

在定义 1 中的共形变换下是

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[Ts, N] &\equiv \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} d(T(x_i)) \right) \tilde{\mathbf{P}}(T(x_1), \dots, T(x_i), \dots, T(x_N)) \delta_{s - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(T(x_i))} \\ &\equiv \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} d\lambda_i \right) \tilde{\mathbf{P}}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \delta_{s - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)},\end{aligned}$$

，在对能量函数中的两个相互作用进行重新缩放后，尤里乌斯模型的质量将达到一个数量级，通过大偏差。

$$\mathcal{P}[s, N] \approx \exp(-N^3 \Psi(s)),$$

其中上述指数的幂次，除了 N^3 的缩放因子外，由速率函数给出，

$$\Psi(s) \approx \frac{1}{2b} (s - \bar{s})^2,$$

关于率函数的最小值 $s = \bar{s}$ ，带有方差，

$$\text{Var}[s] \approx \frac{b}{N^3},$$

对于某个正参数 b 。我们通过汇总 $\mathcal{P}[s, N]$ 中的每个量的组成部分来继续进行，在此引入了近似值。

$$\delta_{s - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)} \approx N^3 \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \exp(-\nu N^3) d\mu,$$

及因此也对于

$$\int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} d\lambda_i \right) \tilde{\mathbf{P}}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N) \approx \frac{1}{Z_N^{-1}} \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} d\lambda_i \right) \exp\left(-\frac{(\mathcal{E}')^{-1}}{k_b T}\right), \quad (*)$$

给定 $\Gamma \subsetneq \mathbf{C}$ 与 μ 平面的虚轴相交。给定任意 $f(x)$ ，有效势能，

$$V^{\text{eff}}(x) \equiv \frac{1}{2}x^2 + \mu f(x) \quad .$$

对于 $\mu \equiv 0$, 采用惯例,

$$Z_N^{-1}(\mu = 0) = Z_N^{-1} \quad .$$

作为非零 μ 的函数, 对于大的 N 水动力近似中, 出现在 (*) 中的配分函数已经被证明具有如下形式,

$$Z_N^{-1} \approx \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} d\lambda_i \right) d(\rho(x)) \exp \left[-N^3 \mathbf{E}_\mu[\rho(x)] - N \int_{\text{supp}} dx \rho(x) \ln \rho(x) \right] \delta_{\int dx \rho(x) - 1}, \quad (**)$$

其中指数的幂中出现的密度分布的期望是 $\rho(x)$,

$$\mathbf{E}_\mu[\rho(x)] = \int_{\text{supp}} \left(\frac{x^2}{2} + \mu f(x) \right) \rho(x) dx - \alpha \int_{\text{supp}} \int_{\text{supp}} \rho(x) \rho(y) |x - y| dx dy - \mu s,$$

对实线上轮廓的支持

$$\text{supp} \cap \mathbf{R} \neq \emptyset,$$

允许分解为,

$$\text{supp} \equiv \bigcap_{1 \leq i \leq N} \text{supp}_i,$$

因此意味着, 在共形变换 T 下, 正如在**定义 1** 中提到的那样,

$$\int_{\text{supp}} d(\rho(T(x))) \equiv \prod_{1 \leq i \leq N} \int_{\text{supp}_i} d(\rho(T(x_i))) \quad , \quad (\text{Supp})$$

关于哪一项取值,

$$\mathbf{E}_\mu[\cdot] \quad .$$

共同，在假设下，给定在下面左侧的有效作用量，

$$-\frac{(\mathcal{E}')^{-1}}{k_b T} \approx N^3 S[\rho(x), \mu, \mu_0],$$

对给定的动作而言，

$$S[\rho(x), \mu, \mu_0] = \int_{\text{supp}} \frac{x^2}{2} \rho(x) dx - \alpha \int_{\text{supp}} \int_{\text{supp}} \rho(x) \rho(y) |x - y| dx dy + \mu \left(\int_{\text{supp}} f(x) \rho(x) dx - s \right) + \mu_0 \left(\int_{\text{supp}} \rho(x) dx - 1 \right),$$

在 (*) 中的 $\mathcal{P}[s, N]$ 的表达式可以用以下近似表示，

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[s, N] &\approx \frac{1}{Z_N^{-1}} \int_{\text{supp}} d(\rho(x)) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \exp \left[-N^3 S[\rho(x), \mu, \mu_0] \right] \approx \left(\prod_{1 \leq i \leq N} \int_{\text{supp}_i} d(\rho(x_i)) \right) \\ &\quad \times \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \exp \left[-N^3 S[\rho(x_i), \mu, \mu_0] \right] . \\ &\quad (***) \end{aligned}$$

利用鞍点方法，无约束 Jellium 分区函数的阶大约是，

$$\frac{1}{Z_N^{-1}} \approx \frac{1}{\exp\left(\frac{2}{3}\alpha^2 N^3\right)},$$

满足速率函数的条件，

$$\Psi(s) \approx \frac{2}{3}\alpha^2 \quad .$$

在更高阶的近似下，上述率函数也可以取以下形式，

$$\Psi(s) = S[\rho_\mu^*(x), \mu, \mu_0] + \frac{2}{3}\alpha^2,$$

对于有效的鞍点作用量,

$$S[\rho_\mu^*(x), \mu, \mu_0] = \int_{\text{supp}} \frac{x^2}{2} \rho_\mu^*(x) dx - \alpha \int_{\text{supp}} \int_{\text{supp}} \rho_\mu^*(x) \rho_\mu^*(y) |x - y| dx dy + \mu \times \left(\int_{\text{supp}} f(x) \rho_\mu^*(x) dx - s \right) \mu_0 \left(\int_{\text{supp}} \rho_\mu^*(x) dx - 1 \right), \quad (****)$$

将 (****) 代入到 (**) 中给出的指数幂中, 即用 $S[\rho_\mu^*(x), \mu, \mu_0]$ 替换鞍点作用 $S[\rho_\mu^*(x), \mu, \mu_0]$, 得到分布。

$$\mathcal{P}[s, N] \approx \frac{1}{Z_N^{-1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq N} \int_{\text{supp}_i} d(\rho(x_i)) \right) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \exp \left[-N^3 S[\rho_\mu^*(x_i), \mu, \mu_0] \right], \quad (*****)$$

对应的概率密度函数, 给定每个密度的支撑集 $d(\rho(x_i))$, 每个都满足,

$$\text{supp}_i \cap \mathbf{R} \neq \emptyset,$$

的每个 $1 \leq i \leq N$ 。从这样一个速率函数的封闭表达式中, 通过观察得出当 N 很大时线性统计量的方差。

$$\bar{s} = \frac{1}{4\alpha} \int_{[-2\alpha, +2\alpha]} f(x) dx,$$

是 $\Psi(s)$ 的最小值。通过计算 μ 直到 $O(\epsilon)$ 阶, 可以得到关于 $s \equiv \bar{s}$ 的展开式, 当 ϵ 足够小时。速率函数和有效鞍点作用的具体形式被纳入了第二部分得出的两个线性统计量的 Jellium 协方差公式中。

2 正式化 Jellium 协方差的计算

下面, 我们陈述关于计算协方差的主要结果。如前所述, Jellium 模型的协方差函数的计算依赖于两个线性统计量, 这些将在下面引入。直接地, 鉴于每个线性统计量都是通过严格正的 N 测量值对充分光滑函数 f 和 g 的求和定义的, 协方差公

式依赖于鞍点作用的支持上的积分。此外，鉴于 Riesz 气体相互作用的公式，配分函数表现为鞍点作用支持上积分的归一化。

定理 (两线性统计量之间的 *Jellium* 协方差的计算)。对于两个线性统计量，

$$A \equiv A(f, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

和，

$$B \equiv B(g, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i),$$

A 和 B 之间的 *Jellium* 协方差具有以下形式，

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{\text{Jellium}}(A, B) \equiv & \frac{1}{N^2} \left(\int_{\text{supp}} d(\rho(x)) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp \left[-N^3 S[\rho_{\mu}^*(x), \mu, \mu_0] \right] \right. \\ & \left. \times \left(\sum_{i=1}^N f(x_i) g(x_i) \right) - \left\langle \sum_{i=1}^N f(x_i) \right\rangle_f \left\langle \sum_{i=1}^N g(x_i) \right\rangle_g \right), \end{aligned}$$

对某些 $N > 0$ 成立，给定 f 和 g 是任意的。

在以下协方差的计算中，将 Riesz 气体粒子的位置转换为某些随机矩阵特征值的共形变换 T 与速率函数相关，因此也与鞍点作用相关。关于 *Jellium* 概率测度的期望值与独立样本空间 Λ 的 n 重积分有关，其中包含 $\Lambda^N \equiv \Lambda \times \dots \times \Lambda$ 。通过使用这种对期望 $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{\text{Jellium}}$ 的表示形式，鞍点作用的指数被用作 Riesz 气体哈密顿量指数的一个近似值。给定之前引入的两个任意线性统计量 f 和 g ，利用鞍点作用指数的近似被纳入到协方差函数所需的表示中。

定理的证明。回想一下，从上一节中，里兹气体能量的近似值对于 $k \equiv -1$ ，以及因此对于 *Jellium* 模型，

$$-\frac{(\mathcal{E}')^{-1}}{k_b T} \approx N^3 S[\rho_{\mu}^*(x), \mu, \mu_0],$$

具有有效的鞍点密度作用 $\rho_{\mu}^*(x)$ ，它出现在速率函数的贡献中。

$$\Psi(s) = S[\rho_\mu^*(x), \mu, \mu_0] + \frac{2}{3}\alpha^2,$$

以及常数 $\frac{2}{3}\alpha^2$ 。从先前实现的用于提取单个 线性统计量在大 N 极限下单变量方差行为的技术，应用共形变换，

$$T(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

在**定义 1** 中提供，对每个位置 x_i ，能量函数的里兹气体（在**定义 1** 中介绍），用于 $k \equiv -1$ （在**定义 2** 中给出），产生，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^k(T(x_1), \dots, x_i, \dots, x_N) &\equiv \mathcal{E}^k(T(x_1), \dots, T(x_i), \dots, T(x_N)) \\ &\equiv \mathcal{E}^k(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N), \end{aligned}$$

对应于 *Riesz* 气体能量函数，在共形 T 下，对于 $k \equiv -1$ 。从在**定义 3** 中引入的概率测度出发，该量，

$$\langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_N \rangle_{\text{Jellium}} \equiv \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp\left(-\frac{(\mathcal{E}')^{-1}}{k_b T}\right)$$

可以用以下近似，

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda^N} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp\left[-N^3 S[\rho_\mu^*(x), \mu, \mu_0]\right] &\approx \prod_{1 \leq i \leq N_{\text{supp}_i}} \int d(\rho(x_i)) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \\ &\times \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp\left[-N^3 S[\rho_\mu^*(x_i), \mu, \mu_0]\right], \end{aligned}$$

对应于跨越所有 x_i 直到 N 的 Jellium 期望值，对于能量函数，

$$(\mathcal{E}')^{-1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) \equiv (\mathcal{E}')^{-1},$$

满足，在基础概率测度 $\tilde{\mathbf{P}}[\cdot]$ 上有 $\mathbf{R}$ 的支撑，

$$\langle \cdot \rangle_{\text{Jellium}} \equiv \langle \cdot \rangle_{\tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{R}} \equiv \langle \cdot \rangle \quad .$$

进一步，在如上所述的共形 T 应用于每个先前提到的 x_i 的情况下，从每个 $T(x_i)$ 的集合平均值出发，可以很容易地形成两个检验统计量之间的协方差，这与……一致，

$$\langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_N \rangle_{\text{Jellium}} = \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N f(x_i) g(x_i) \right) - \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{i=1}^N f(x_i) \right\rangle_f \left\langle \sum_{i=1}^N g(x_i) \right\rangle_g,$$

在之前的等价关系下，对于 $\langle \cdot \rangle_{\text{Jellium}}$ ，是等同于

$$\frac{1}{N^2} \left(\prod_{1 \leq i \leq N_{\text{supp}_i}} \int_{\Gamma} d(\rho(x_i)) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp \left[-N^3 S[\rho_{\mu}^*(x_i), \mu, \mu_0] \right] \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N f(x_i) g(x_i) \right) \right. \\ \left. - \left\langle \sum_{i=1}^N f(x_i) \right\rangle_f \left\langle \sum_{i=1}^N g(x_i) \right\rangle_g \right).$$

在合适的、保角的 $T(\cdot)$ 下，将每个位置 x_i 作为输入对应到一个特征值 λ_i ，上述表达式可以写为

$$\langle T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) \rangle \equiv \langle T(x_1), \dots, T(x_i), \dots, T(x_N) \rangle,$$

进而等价于，

$$\frac{1}{N^2} \left(\left(\prod_{1 \leq i \leq N_{\text{supp}_i}} \int_{\Gamma} d(\rho(T(x_i))) \right) \int_{\Gamma} d\mu \int_{\Gamma} d\mu_0 \frac{1}{Z_N^{-1}} \exp \left[-N^3 S[\rho_{\mu}^*(T(x_i)), \mu, \mu_0] \right] \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N f(T(x_i)) g(T(x_i)) \right) - \left\langle \sum_{i=1}^N f(T(x_i)) \right\rangle_f \left\langle \sum_{i=1}^N g(T(x_i)) \right\rangle_g \right),$$

展示了在观察条件下，给出的 (Supp)，所需的 Jellium 协方差公式成立。

$$\int_{\text{supp}} d(\rho(T(x))) \equiv \prod_{1 \leq i \leq N_{\text{supp}_i}} \int d(\rho(T(x_i))),$$

并且也认为，

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \rho_N(x) \rangle = \rho(x),$$

对应于密度分布的大型 N 极限, 该极限由以下给出:

$$\langle \rho_N(x) \rangle \equiv \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \right\rangle,$$

对应于在每个 x_i 处的 delta 函数的求和。因此我们得到了一个关于 Jellium 协方差的公式, 该公式是两个检验统计量的函数, 它们分别由任意的 f 和 g 给出, 从中我们可以得出论点。□

3 结论

在本文中, 我们展示了如何计算 Jellium 模型中的两个检验统计量之间的协方差。作为在引言部分广泛讨论过的先前工作的改编版本, 计算 Jellium 协方差函数依赖于: (1) 引入一个合适的能量泛函来编码 Riesz 气体中的相互作用; (2) 从 Riesz 气体的能量泛函定义出归一化为模型的配分函数的概率测度; (3) 操控随机矩阵特征值上的概率测度, 也源自 Riesz 气体的概率测度。配备了这些量之后, 我们展示了, 在固定两个检验统计量时: (1) 大偏差原理, 用于通过速率函数的指数来近似一个概率泛函, (2) 鞍点法, 用于扩展最初由 Flack 等人提供的方法, 以及 (3) 合适的共形变换, 用于将 Riesz 气体中点粒子的位置转换为随机矩阵的特征值, 这些可以一起使用以获得 Jellium 协方差函数之间两个线性统计量所需的公式。与其他可用于假设检验和相关统计计算的协方差函数相比, 本文所得到的 Jellium 函数的协方差函数不仅考虑了 Riesz 气体的物理特性, 而且还通过有效势能函数 $V^{\text{eff}}(\cdot)$ 上的假设考虑到了能量景观中的波动。

4 声明

4.1 伦理批准和参与同意

作者同意参与同行评审过程。

4.2 出版许可

作者同意提交以下作品以供发表。

4.3 数据和材料的可用性

不适用

4.4 利益冲突

作者声明没有利益冲突。

4.5 资助

没有资金来源。

References

- [1] Aizenman, M., Martin, P.A.: Structure of gibbs states of one dimensional coulomb systems. Commun. Math. Physics **78**, 99–116 (1980) <https://doi.org/10.1007/BF01941972>
- [2] Cunden, F.D., Vivo, P.: Universal covariance formula for linear statistics on random matrices. Phys. Rev. Lett. **113**(070202) (2014) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.070202>
- [3] Dhar, A., al.: Exact extremal statistics in the classical 1d coulomb gas. Phys. Rev. Lett. **199**(060601) (2017) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.060601>
- [4] Dhar, A., al.: Extreme statistics and index distribution in the classical 1d coulomb gas. J. Phys. A Math. Theor. **51**(295001) (2018) <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac75f>
- [5] Flack, A., al.: An exact formula for the variance of linear statistics in the one-dimensional jellium model. J. Phys. A: Math. Theor. **56**(105002) (2023) <https://doi.org/10.1088/1751-8121/acb86a>
- [6] Flack, A., al.: Gap probability and full counting statistics in the one-dimensional one-component plasma. J. Stat. Mech. **053211** (2022) <https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac6a59>
- [7] Forrester, P.J.: Log-gases and random matrices. Princeton University Press (ISBN: 9780691128290) (2010)
- [8] Grabsch, A.: General truncated linear statistics for the top eigenvalues of

- random matrices. J. Phys. A: Math. Theor. **55**(124001) (2021) <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac52e3>
- [9] Lewin, M.: Coulomb and riesz gases: The known and the unknown. J. Math. Phys. **63**(061101) (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0086835>
- [10] Leble, T., Serfaty, S.: Large deviation principle for empirical fields of log and riesz gases. Invent. Math. **210**(645) (2017) <https://doi.org/10.1007/s00222-017-0738-0>
- [11] Prager, S.: The one-dimensional plasma. Adv. Chem. Phys. **4**(201) (1962) <https://doi.org/10.1002/9780470143506>
- [12] Rigas, P.: Renormalization of crossing probabilities in the dilute potts model. Submitted (2025) <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.10979>
- [13] Soshnikov, A.: A. central limit theorem for local linear statistics in classical compact groups and related combinatorial identities. Ann. Probab. **28**(3) (2000) <https://doi.org/10.1214/aop/1019160338>