

Hölder 规则性的 $\bar{\partial}$ - 方程在多圆盘上

Yu Jun Loo¹ and Alexander Tumanov²

¹*Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA*

²*Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA*

Abstract

在这篇笔记中，我们展示了在多圆盘上保持 Hölder 正则性的 $\bar{\partial}$ - 方程解算子的存在性。这个解算子是通过 Henkin 公式构造的。众所周知，在乘积区域上的 $\bar{\partial}$ - 方程解算子不会提高 Hölder 正则性。因此，从这方面来看，这个解算子是最优的。

1 介绍

在复分析中，一个经典问题是用指定的赋范函数空间中的估计来描述 $\bar{\partial}$ - 方程的解。Sergeev 和 Henkin 在 [SH80] 中给出了这一类型问题最一般的结论，给出了任意拟凸多面体中 $\bar{\partial}$ - 方程的一致估计。最近，对乘积域 $\mathbb{C}^n$ 上的 Hölder 空间 $C^{k+\alpha}$ 给予了一些关注，并且已经发表了一些关于这一问题的结果。在 [PZ21b],[PZ21a] 中，找到了一个会损失任意小数量的霍尔德正则性的解算子，而在 [Zha22] 中，在情况 $n = 2$ 下找到了一个保持霍尔德正则性的解算子。在提到的文章中，解算子基于 Nijenhuis 和 Woolf 的公式 [NW63]。直接使用该公式对解算子的范数进行估计表明它会损失（任意小数量的）霍尔德正则性（见 [PZ21a] [Tum96]）。在这篇笔记中，我们展示了存在一个最优解算子，它实际上在多圆盘 $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ 上具有保持 Hölder 正则性，对于任何 $n \geq 1$ 。事实上，论文的主要定理如下。

定理 1. 对于任意整数 $k \geq 0$ 和 $0 < \alpha < 1$ ，令 $Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n) \subseteq C_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 表示多圆盘上闭的、 $Hölder k + \alpha$ 、 $(0,1)$ - 形式的子空间 $\bar{\partial}$ -。然后对于所有 $g \in Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ ，方程 $\bar{\partial}u = g$ 存在有界线性解算子

$$H : Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n) \rightarrow C^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n).$$

此外， H 是典范的，因为对于任何 $f \in C_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ ，

$$KH[f] = 0.$$

。这里，

$$K[u](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{(\partial \mathbb{D})^n} \frac{u(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

是柯西环面积分。

备注 1. 请注意，这里的典范定义类似于 Hörmander 的在域 $\mathbb{D}^n$ 上带有先验 L^2 估计的 $\bar{\partial}$ 方程的典范解。确实，回想一下 Hörmander 的解在这个意义上是典范的：它相对于 $\mathbb{D}^n$ 上的加权内积与 $\bar{\partial}$ （即解

析函数) 的核正交。类似地, $KH = 0$ 的性质等价于对所有 $g \in A(\mathbb{D}^n) \cap C^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 都有 $B[H[f], g] := \int_{(\partial\mathbb{D})^n} H[f](\zeta)g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n = 0$ 成立。从这个意义上说, $H[f]$ 与 $\bar{\partial}$ 的核正交。请注意, 上面定义的 B 并不是一个复内积, 而是一个对称双线性形式。

2 初步结果

主要定理的证明基于对 Henkin 在多圆盘上求解 $\bar{\partial}$ - 方程的加权公式进行分析, 该公式在他 1985 年的综述论文 [Hen85] 中有所提及。将所有权重设为 0 时, 这个公式的最简单形式如下。

定理 2. 令 $Z_{(0,1)}(\bar{\mathbb{D}}^n) \subseteq C_{(0,1)}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ 表示多圆盘上的 (一致) 连续的, $\bar{\partial}$ - 闭合 $(0,1)$ - 形式的空间。固定 $g \in Z_{(0,1)}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ 。然后,

$$u(z) = H[g](z) = - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|J|=r} (-1)^{c(n,r)} \int_{\gamma_J(z)} g(\zeta) \wedge H_J(\zeta, z)$$

是方程 $\bar{\partial}u = g$ 的分布解。这里, $c(n, r)$ 是仅依赖于常数 n, r 的整数, 而求和范围覆盖所有有序的 r 元组 $J = (j_1, \dots, j_r)$, 使得 $\{j_1, \dots, j_r\}$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的大小为 r 的子集。 J 在 $\{1, \dots, n\}$ 中的补集记为 $\{k_1, \dots, k_{n-r}\}$, 而积分区域 $\gamma_J(z)$ 则由

$$\gamma_J(z) = \{\zeta \in \mathbb{D}^n : \zeta_{j_1} = z_{j_1}, \dots, \zeta_{j_r} = z_{j_r}, |\zeta_{j_1}| \geq \dots \geq |\zeta_{j_r}| \geq |\zeta_{k_1}| = \dots = |\zeta_{k_{n-r}}|\}.$$

给出。积分核是 $n - r$ 形式

$$H_J(\zeta, z) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-r}} \cdot \bigwedge_{s=1}^{n-r} \frac{d\zeta_{k_s}}{\zeta_{k_s} - z_{k_s}}.$$

此外, $KH \equiv 0$ 其中 K 是柯西托勒积分。

该公式的一种带权重等于 1 的版本在 [HP84] 中用于解决多圆盘中的插值问题, 而更一般的解析多面体类的加权公式的证明则出现在 [HP90] 中。根据 [HP90], Henkin 的公式给出了 sup-范数中 $\bar{\partial}$ - 方程的一致估计。此外, Henkin 的公式还提供了一个保持 Hölder 正规性的有界解算子用于 $\alpha \in (0, 1)$ 。精确地讲, 我们有以下定理。

定理 3. 令 $0 < \alpha < 1$ 和 $g \in Z_{(0,1)}^\alpha(\bar{\mathbb{D}}^n)$ 是一个 $\bar{\partial}$ - 闭合的 Hölder- α , $(0,1)$ - 形式在分布意义下。然后 Henkin 的解算子对于 $\bar{\partial}$ - 方程, 限制为一个有界线性算子

$$H : Z_{(0,1)}^\alpha(\bar{\mathbb{D}}^n) \rightarrow C^\alpha(\bar{\mathbb{D}}^n).$$

事实上, Henkin 公式产生的解与 Nijenhuis 和 Woolf 在 [NW63] 中产生的解一致, 并且被 Pan 和 Zhang 在 [PZ21a] 和 [Zha22] 中研究过。

定义 1. (尼耶努伊斯和伍尔夫的公式)

令 $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ 。对于任何 $f \in C^{k+\alpha}(D)$, $z \in D$, 令

$$T_j[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j} d\zeta_j \wedge d\bar{\zeta}_j$$

$$S_j[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j} d\zeta_j.$$

令

$$\tilde{S}_1 = id, \tilde{S}_k = S_{k-1} \dots S_1, \text{ for all } 1 < k \leq n.$$

对于任意的 $g \in Z_{(0,1)}(\mathbb{D}^n)$, $g = \sum_i g_i d\bar{z}_i$ 定义 Nijenhuis 和 Woolf 的公式为

$$T[g] = \sum_{j=1}^n T_j \tilde{S}_j[g_j],$$

然后是 $\bar{\partial}T[g] = g$ 。

备注 2. 正如引言中所述, 使用 Nijenhuis 和 Woolf 的公式直接估计算子范数 T 对 $n \geq 2$ 的结果表明它会失去 (任意小量) Hölder 正则性。这是由于 Cauchy 积分算子 S_j 在参数中失去了 Hölder 正则性, 如在 [Tum96] 和 [PZ21a] 中所观察到的。然而, Henkin 的公式以及 Nijenhuis 和 Woolf 的公式实际上描述了相同解算子。也就是说, $T = H$ 。这是后续引理的内容。之后, 我们将利用这种关系来证明 H (因此也是 T) 实际上具有保持 Hölder 连续性。

引理 1. $KT \equiv KH \equiv 0$ 因此, 对于所有 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha \in (0, 1)$ 和 $f \in Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 我们有 $T[f] = H[f]$

Proof. 假设目前 $KT \equiv KH \equiv 0$ 成立。固定 $f \in Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 并令 $w := H[f] - T[f]$ 。那么 $\bar{\partial}w = f - f = 0$, 使得 w 是全纯的。因此, $w = K[w] = KH[f] - KT[f] = 0$ 。所以 $T[f] = H[f]$ 。

还需证明 $KH \equiv 0$ 和 $KT \equiv 0$ 。为了证明前者, 固定 $g \in Z_{(0,1)}(\mathbb{D}^n)$, 并设 $d^2\zeta_j = d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_j$ 。请注意, 对于 $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$, H 是每一项的和, 每项的积分区域由某个 r 元组 $J = (j_1, \dots, j_r)$ 给定的

$$\gamma_J(z) = \{\zeta \in \mathbb{D}^n : \zeta_{j_1} = z_{j_1}, \dots, \zeta_{j_r} = z_{j_r}, 1 \geq |\zeta_{k_1}| = \dots = |\zeta_{k_{n-r}}|\}.$$

表示。因此, $K[H[g]]$ 由 K 应用于形式为

$$\begin{aligned} & \int_{|\zeta_{k_1}|=\dots=|\zeta_{k_{n-r}}|\leq 1} \frac{g_{k_s}(\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{n-r}}, z_J)}{(\zeta_{k_1} - z_{k_1}) \dots (\zeta_{k_{n-r}} - z_{k_{n-r}})} d\zeta_{k_1} \wedge \dots \wedge d^2\zeta_{k_s} \wedge \dots \wedge d\zeta_{k_{n-r}} \\ &= \int_{|\zeta_{k_s}|\leq 1} \left(\int_{|\zeta_{k_1}|=\dots=|\widehat{\zeta_{k_s}}|\dots=|\zeta_{k_{n-r}}|\leq 1} \frac{g_{k_s}(\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{n-r}}, z_J)}{(\zeta_{k_1} - z_{k_1}) \dots (\widehat{\zeta_{k_s} - z_{k_s}}) \dots (\zeta_{k_{n-r}} - z_{k_{n-r}})} d\zeta_{k_1} \dots \widehat{d\zeta_{k_s}} \dots d\zeta_{k_{n-r}} \right) \frac{d^2\zeta_{k_s}}{(\zeta_{k_s} - z_{k_s})} \\ &= T_{k_s}[G]. \end{aligned}$$

的项的和这里,

$$G(z_1, \dots, \zeta_{k_s}, \dots, z_n) = \int_{|\zeta_{k_1}|=\dots=|\widehat{\zeta_{k_s}}|\dots=|\zeta_{k_{n-r}}|\leq 1} \frac{g_{k_s}(\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{n-r}}, z_J)}{(\zeta_{k_1} - z_{k_1}) \dots (\widehat{\zeta_{k_s} - z_{k_s}}) \dots (\zeta_{k_{n-r}} - z_{k_{n-r}})} d\zeta_{k_1} \dots \widehat{d\zeta_{k_s}} \dots d\zeta_{k_{n-r}}.$$

然而, 由于 $S_j T_j = 0$ 对于所有 $j = 0, \dots, n$ 和 $K = S_n \dots S_1$ 都成立, 因为这些算子是可交换的, $KT_{k_s}[G] = 0$ 。因此 $KH[g] = 0$ 。由于 g 是任意的, $KH = 0$ 。类似地, 由于 $T[g] = \sum_{j=1}^n T_j \tilde{S}_j[g_j]$, 我们有 $KT = 0$ 。□

备注 3. 作为引理 1 的证明结果, 存在一个唯一的解算子使得 $\bar{\partial}$ 方程的柯西环面积分消失。此外, 我们可以将 H 和 T 视为该典范解算子的不同公式。由于 T 和 H 描述了相同的解算子, Pan 和 Zhang 使用公式 T 在 [PZ21a] 和 [PZ21b] 中获得的结果可以转移到 Henkin 的公式 H 上。因此, 以下命题成立。

命题 1. 对于所有 $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ 和 $0 < \alpha < 1$, *Henkin* 的解算子 H 是一个有界线性算子

$$H : Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n) \rightarrow C(\bar{\mathbb{D}}^n).$$

。此外, 它是最 *canonical* 的解算子, 使得 $KH = 0$ 。

备注 4. 该结果可以从 Nijenhuis 和 Woolf 的公式 T 通过反复应用一维结果得到, 即 $T_j[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j} d\zeta_j$. $d\bar{\zeta}_j$ 保持 Hölder 正则性, 而 $S_j[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j} d\zeta_j$ 仅损失微小的 Hölder 正则性。此论证在 [PZ21a] 中被详细描述。

3 定理的证明 3

固定 $g = \sum_{i=1}^n g_i d\bar{\zeta}_j \in Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ 。为了证明定理 3, 我们稍作偏离。固定排列 σ 的 $\{1, \dots, n\}$, 并令 D_σ 表示开扇区 $\{z \in \mathbb{D}^n : |z_{\sigma(1)}| > \dots > |z_{\sigma(n)}|\}$ 。注意这些扇形区域的闭包覆盖了 $\mathbb{D}^n$ 。因此, 根据命题 1, 为了得到 $H[g]$ 的 C^α 估计值, 我们只需要在每个开扇形 D_σ 上获得相同的估计。此外, 根据定理 2 中积分区域 $\gamma_J(z)$ 的定义, 可以看出对于每个 $z \in D_\sigma$, $H[g](z)$ 中不消失的项具有以下简单的形式 (忽略乘以常数)。

$$\int_{|\zeta_{k_1}|=\dots=|\zeta_{k_{n-r}}|\leq|z_{j_r}|} \frac{g_{k_s}(\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{n-r}}, z_{J_\sigma})}{(\zeta_{k_1} - z_{k_1}) \dots (\zeta_{k_{n-r}} - z_{k_{n-r}})} d\zeta_{k_1} \wedge \dots \wedge d^2\zeta_{k_s} \wedge \dots \wedge d\zeta_{k_{n-r}}.$$

这里, $(j_1, \dots, j_r)$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 中一个有序的 r 元组并且 $J_\sigma = (\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_r))$ 。这促使了以下定义。

定义 2. 令 $a, b \in \mathbb{D}$, $\zeta, z \in \mathbb{D}^q$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_q)$, $z = (z_1, \dots, z_q)$ 和 $h \in C^\alpha(\mathbb{D}^q \times \mathbb{D} \times \mathbb{D})$ 。我们记 $d^2\zeta_j$ 为 $d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_j$ 并定义

$$P[h](z, a, b) = \int_{|\zeta_1|=\dots=|\zeta_q|\leq|a|} \frac{h(\zeta, a, b)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_q - z_q)} d^2\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_q.$$

以下引理适用。

引理 2. 对于每个 $s \in \{0, \dots, q\}$, 令 $D_s = \{(z, a, b) \in \mathbb{D}^{q+2} : |z_1| < \dots < |z_s| < |a| < |z_{s+1}| < \dots < |z_q|\}$ 。固定某个 $t \in \{1, \dots, q\}$ 。然后在每个开扇形上 D_s , $P[h]$ 是 Hölder- α 均匀地在变量 z_t 中, 系数与 z, a, b 无关, 并且与 $\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 成正比。

Proof. 我们首先考虑情形 $t = 1$ 。注意到

$$\begin{aligned} P[h](z, a, b) &= \int_{|\zeta_1|=\dots=|\zeta_q|\leq|a|} \frac{h(\zeta, a, b)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_q - z_q)} d^2\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_q \\ &= \int_{|\zeta_1|\leq|a|} \left(\int_{|\zeta_2|=\dots=|\zeta_q|=|\zeta_1|} \frac{h(\zeta, a, b)}{(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_q - z_q)} d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_q \right) \frac{d^2\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)} \\ &=: \int_{|\zeta_1|\leq|a|} \tilde{h}(\zeta_1, z_2, \dots, z_q, a, b) \frac{d^2\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)}. \end{aligned}$$

我们声称 $\tilde{h}$ 是一致有界的, 其系数与 z, a, b 无关, 并且与 $\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 成正比。确实,

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\zeta_1, z_2, \dots, z_q, a, b) &= \int_{|\zeta_2|=\dots=|\zeta_q|=|\zeta_1|} \frac{h(\zeta, a, b)}{(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_q - z_q)} d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_q \\ &= \int_{|\xi_2|=\dots=|\xi_q|=1} \frac{h(\zeta_1, |\zeta_1|\xi_2, \dots, |\zeta_1|\xi_q, a, b)}{(\xi_2 - \frac{z_2}{|\zeta_1|}) \dots (\xi_q - \frac{z_q}{|\zeta_1|})} d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_q.\end{aligned}$$

由于函数 $(\zeta_1, \xi_2, \dots, \xi_q, a, b) \mapsto h(\zeta_1, |\zeta_1|\xi_2, \dots, |\zeta_1|\xi_q, a, b)$ 在积分区域上是 C^α , 其柯西环面积分是一致有界的, 因此 $\tilde{h}$ 也是一致有界。此外, $\|\tilde{h}\|_{L^\infty} \lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{p+q})}$ 。此外, 由于 $P[h]$ 是通过对域上的柯西积分应用于 $\tilde{h}$ 而得到的, 我们可以看到对于每一个 $0 < \epsilon < 1$, $P[h](z, a, b)$ 在 D_s 中是 $C^{1-\epsilon}$ 均匀地在 z_1 中。特别地, 在扇形 D_s 上, $P[h]$ 在变量 z_1 上一致地为 C^α 。

我们现在考虑案例 $t \neq 1$ 。注意到 $\zeta_t \bar{\zeta}_t = \zeta_1 \bar{\zeta}_1$, 因此 $d\bar{\zeta}_1 = \frac{\zeta_t}{\zeta_1} d\bar{\zeta}_t$ 。因此, 在忽略符号变化后,

$$P[h](z, a, b) = \int_{|\zeta_1|=\dots=|\zeta_q|\leq|a|} \frac{\zeta_t \zeta_1^{-1} h(\zeta, a, b)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_q - z_q)} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d^2 \zeta_t \wedge \dots \wedge d\zeta_q.$$

同样的分析表明, $P[h](z, a, b)$ 在 z_t 中一致地是 C^α , 系数与 z, a, b 无关, 并且与 $\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 成正比。 $\square$

引理 3. 在每个开扇形区域 D_s 上, $P[h]$ 是 Hölder- α 型的, 并且参数 a, b 中的一致系数独立于 z, a, b , 与 $\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 成比例。

Proof. 我们首先证明 $P[h]$ 是在 b 上一致的 C^α 。事实上, 设 $\epsilon \in \mathbb{C}$ 。

$$\begin{aligned}
|P[h](z, a, b + \epsilon) - P[h](z, a, b)| &\leq \int_{|\zeta_1|=\dots=|\zeta_q|\leq|a|} \frac{\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha}{|\zeta_1 - z_1|\dots|\zeta_q - z_q|} |d^2\zeta_1|\dots|d\zeta_q| \\
&\leq \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha \int_0^1 \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{r^q \cdot d\theta_1 \dots d\theta_q dr}{|re^{i\theta_1} - z_1|\dots|re^{i\theta_q} - z_q|} \\
&\lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha \int_0^1 \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{r^q \cdot d\theta_1 \dots d\theta_q dr}{|r\theta_1 + |r - |z_1||\dots|r\theta_q + |r - |z_q||} \\
&\lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha \int_0^1 [\ln(r\theta_1 + |r - |z_1||)]_0^{2\pi} \dots [\ln(r\theta_q + |r - |z_q||)]_0^{2\pi} dr \\
&\lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha \int_0^1 |\ln(|r - |z_1||)| \dots |\ln(|r - |z_q||)| dr \\
&\lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha \int_0^1 \sum_{i=1}^q |\ln(|r - |z_i||)|^q dr \\
&\lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha \int_0^1 |\ln(r)|^q dr \\
&\lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha.
\end{aligned}$$

同样, 我们可以证明 $P[h]$ 是在 a 中一致地等于 C^α 。

$$\begin{aligned}
P[h](z, a + \epsilon, b) - P[h](z, a, b) &= \int_{|\zeta_1|=\dots=|\zeta_q|\leq|a+\epsilon|} \frac{h(\zeta, a + \epsilon, b) - h(\zeta, a, b)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_q - z_q)} d^2\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_q \\
&+ \int_{|a|\leq|\zeta_1|=\dots=|\zeta_q|\leq|a+\epsilon|} \frac{h(\zeta, a, b)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_q - z_q)} d^2\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_q =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

我们分别估计 I_1 和 I_2 。对于 I_1 , 我们可以重复与对 b 进行的相同分析来看到 $|I_1| \lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}|\epsilon|^\alpha$ 。因此我们只需要估计 I_2 。

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_{|a|}^{|a+\epsilon|} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{h(re^{i\theta_1}, \dots, re^{i\theta_q}, a, b)}{(re^{i\theta_1} - z_1)\dots(re^{i\theta_q} - z_q)} r d\theta_1 (ire^{i\theta_2} d\theta_2) \dots (ire^{i\theta_q} d\theta_q) dr \right| \\
&\lesssim |\epsilon| \left| \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{h(|a|e^{i\theta_1} \dots |a|e^{i\theta_q}, a, b)}{(|a|e^{i\theta_1} - z_1)\dots(|a|e^{i\theta_q} - z_q)} |a|^q d\theta_1 (ie^{i\theta_2} d\theta_2) \dots (ie^{i\theta_q} d\theta_q) \right| \\
&\lesssim |\epsilon| \left| \int_{|\xi_1|=1} \dots \int_{|\xi|=1} \frac{h(|a|\xi, a, b) i \bar{\xi}_1}{(\xi_1 - \frac{z_1}{|a|}) \dots (\xi_q - \frac{z_q}{|a|})} d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_q \right| \\
&\lesssim |\epsilon| \cdot \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}.
\end{aligned}$$

这里, 最后一个不等式成立是因为函数 $(\zeta, a, b) \mapsto h(|a|\xi, a, b) i \bar{\xi}_1$ 是 C^α , 因此其柯西托勒斯积分是有界的, 仅依赖于 $\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 。特别是, P 在参数 a, b 中保持 Hölder- α 正则性。□

通过结合引理 2 和引理 3 的结果，我们得到以下命题。

命题 2. 设 $0 < \alpha < 1$ ，则对于每个开扇形 D_s ， $P : C^\alpha(\mathbb{D}^q \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}) \rightarrow C^\alpha(D_s)$ 是有界线性算子。

Proof. 由前面两个引理， $P[h]$ 是在 D_s 中每个变量 z_t 和参数 a, b 上一致的 C^α ，并且系数与 $\|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 成正比。因此 $\|P[h]\|_{C^\alpha(D_s)} \lesssim \|h\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^{q+2})}$ 。□

定理 3 立即由命题 2 得出。

Proof. (定理 3) 注意，有限多个开扇形的闭包 D_σ 覆盖多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 。由命题 1， $H[g]$ 在多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上一致连续。因此，为了证明 $H : Z_{(0,1)}^\alpha(\mathbb{D}^n) \rightarrow C^\alpha(\mathbb{D}^n)$ 是一个有界线性算子，我们只需要证明给定 Hölder- α 数据 $g \in Z_{(0,1)}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ ，解 $H[g]$ 在每个开扇形区域 D_σ 上是 C^α ，系数与 $\|g\|_{C^\alpha(\mathbb{D}^n)}$ 成正比。但这立即由命题 2 得出。□

4 定理的证明 1

证明了定理 3 后，我们看到对于 $0 < \alpha < 1$ ， $H : Z_{(0,1)}^\alpha(\mathbb{D}^n) \rightarrow C^\alpha(\mathbb{D}^n)$ 是一个有界线性算子。为了完成定理 1 的证明，我们再次利用了 $T = H$ 这一事实，并通过使用 Nijenhuis 和 Woolf 的公式 $T : Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n) \rightarrow C^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 对 k 进行归纳，其中定理 3 作为基础情况。

Proof. (定理 1) 固定一个整数 $k \geq 0$ 。如 [Vek62] 中所指出的，我们可以对奇异积分 T_j 关于 z_j 和 $\bar{z}_j$ 进行微分。由此我们得到

$$\frac{\partial}{\partial z_j} T_j[g](z) = \Pi_j[g](z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} \frac{g(z_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)}{(\zeta_j - z_j)^2} d\zeta_j \wedge d\bar{\zeta}_j$$

和

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} T_j[g](z) = g.$$

假设现在 $T = H : Z_{(0,1)}^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n) \rightarrow C^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 是有界线性算子。固定 $g \in Z_{(0,1)}^{k+1+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 。

然后，由于 T 是 $\bar{\partial}$ -方程的解算子，我们有 $\bar{\partial} T[g] = g$ 。此外，对于所有 $j = 1, \dots, n$ ， $\frac{\partial}{\partial z_j} T_j[g](z) = \Pi_j[g](z)$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} S_j[g](z) = S_j[\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}](z)$ 。因此通过在可能的情况下交换微分符号与算子的位置，我们得到公式

$$\frac{\partial}{\partial z_j} T[g](z) = \sum_{i \neq j} T_i \tilde{S}_i[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g_i] + \Pi_j \tilde{S}_j[g_j].$$

由于 $k+1 \geq 1$ ，我们可以将斯托克斯定理应用于项 $\Pi_j \tilde{S}_j[g_j]$ ，如 [Vek62] 所示，从而得到

$$\Pi_j \tilde{S}_j[g_j] = T_j \tilde{S}_j[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g_j] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\tilde{S}_j[g_j](z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta_j, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j} d\bar{\zeta}_j = T_j \tilde{S}_j[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g_j] + S_j[\tilde{S}_j[g_j] \cdot \bar{\zeta}_j^2].$$

由此立即得到

$$\frac{\partial}{\partial z_j} T[g](z) = \sum_i T_i \tilde{S}_i[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g_i] + S_j[\tilde{S}_j[g_j] \cdot \bar{\zeta}_j^2] = T[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g] + S_j[\tilde{S}_j[g_j] \cdot \bar{\zeta}_j^2].$$

根据归纳假设, $\|T[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g]\|_{C^{k+\alpha}(\mathbb{D}^n)} \lesssim \|\frac{\partial}{\partial \zeta_j} g\|_{C^{k+\alpha}(\mathbb{D})} \lesssim \|g\|_{C^{k+1+\alpha}(\mathbb{D})}$ 。此外, 对于所有 $j, g_j \in C^{k+1+\alpha}(\mathbb{D}^n)$ 我们有 $\|S_j[\tilde{S}_j[g_j] \cdot \tilde{\zeta}_j^2]\|_{C^{k+\alpha}} \lesssim \|g_j\|_{C^{k+1+\alpha}}$ 作为 Cauchy 积分在参数中失去任意小量的 Hölder 正则性。这完成了归纳。□

5 结论与扩展

在这篇笔记中, 我们证明了在乘积域上存在一个保留 Hölder 正则性的解算子 H 。它是规范的, 具体来说 $KH = 0$ 其中 K 是在环面上的 Cauchy 积分。证明依赖于对 Henkin 的公式以及 Nijenhuis 和 Woolf 解决 polydisc 上 $\bar{\partial}u = g$ 问题的公式的仔细分析。这两个公式都适用于更一般的乘积域情况。事实上, Henkin 公式的一个版本对于包含乘积域的解析多面体是有效的, 而 Nijenhuis 和 Woolf 的公式则没有变化。因此原则上, 可以采用相同的证明策略将结果扩展到乘积域。然而, 在没有边界的显式公式的情况下, 引理 2 和 3 中的估计变得更为技术性。因此为了简单起见, 我们仅讨论 polydisc 的情况。

References

- [Vek62] I. N. Vekua. *Generalized analytic functions*. London-Paris-Frankfurt; Reading, Mass.: Pergamon Press; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962, pp. xxix+668.
- [NW63] A. Nijenhuis and W. B. Woolf. “Some integration problems in almost-complex and complex manifolds”. In: *Ann. of Math. (2)* 77 (1963), pp. 424–489.
- [SH80] A. G. Sergeev and G. M. Henkin. “Uniform estimates of the solutions of the $\bar{\partial}$ -equation in pseudoconvex polyhedra”. In: *Mat. Sb. (N.S.)* 112(154).4(8) (1980). (Russian), pp. 522–567.
- [HP84] G. M. Henkin and P. L. Polyakov. “Prolongement des fonctions holomorphes bornées d’une sous-variété du polydisque”. In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 298 (1984), pp. 221–224.
- [Hen85] G. M. Henkin. “The method of integral representations in complex analysis”. In: *Current problems in mathematics. Fundamental directions* 7 (1985). (Russian). English translation in: *Several Complex Variables I* (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 7), 1990, pp. 23–124, 258.
- [HP90] G. M. Henkin and P. L. Polyakov. “Integral formulas for solution of the $\bar{\partial}$ -equation, and interpolation problems in analytic polyhedra”. In: *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* 53 (1990). (Russian); translation in *Trans. Moscow Math. Soc.* (1991), 135–175, pp. 130–170, 260–261.
- [Tum96] A. Tumanov. “On the propagation of extendibility of CR functions”. In: *Complex analysis and geometry*. Vol. 173. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. (Trento, 1993). New York: Dekker, 1996, pp. 479–498.
- [PZ21a] Y. Pan and Y. Zhang. “Cauchy singular integral operator with parameters in log-Hölder spaces”. In: *J. Anal. Math.* 145.1 (2021), pp. 357–379.
- [PZ21b] Y. Pan and Y. Zhang. “Hölder estimates for the $\bar{\partial}$ problem for (p, q) forms on product domains”. In: *Internat. J. Math.* 32.3 (2021), Paper No. 2150014, 20 pp.
- [Zha22] Yuan Zhang. “Optimal Hölder regularity for the $\bar{\partial}$ problem on product domains in $\mathbb{C}^2$ ”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 150.7 (2022), pp. 2937–2943.