A_∞- ZIGZAG 代数
的变形通过 GINZBURG DG 代数

JUNYANG LIU AND ZHENGFANG WANG

摘要. 本笔记旨在给出 Etgü–Lekili（2017）和 Lekili–Ueda（2021）最近结果的简短证明：在特征为 0 的域上的任何有限树的锯齿形代数本质上是形式化的当且仅当该树是类型 ADE。我们还通过考虑类型 E 的任意特征域来完成此结果的证明，这仍然是一个开放问题。

1. 介绍

与图相关的折线代数是出现在表示论、辛几何和范畴化等多个领域中的重要代数；参见例如 [6, 4, 16, 3, 12]。这些代数有许多很好的特性。例如，它们是对称的，并且通过导出 Koszul 对偶与 Ginzburg dg 代数相关联；更多性质参见 [6]。

在这篇简短的笔记中，我们提供了以下结果的代数证明，该结果归功于 [3] 和 [11]。

定理 1.1. *令 $\Bbbk$ 是一个域，Γ 是一棵有限树。然后，由路径长度分级的曲折代数 $Z(\Gamma)$ 在本质上是形式化的当且仅当 Γ 属于 ADE 类型，并且 $\Bbbk$ 的特征不是 bad（对于类型 D 为 2，对于 E_6 和 E_7 为 2 或 3，以及对于 E_8 为 2、3 或 5）。*

我们提到这个形式化结果在 4 维辛几何中的作用至关重要，正如在 [3] 中所见。结果对于类型 A 和 D 在 [3, Thm. 40] 和 [3, Thm. 44] 中被证明（另见 [16, Lem. 4.21] 关于类型 A）。类型 E 在 [3, Conj. 19] 中被猜想，并在 [11, §5] 中得到验证，当 $\Bbbk$ 的特征为 0 时，通过基于矩阵分解的 Hochschild 上同调计算的几何方法进行验证 [2]。我们通过考虑类型 E 的任意特征域 $\Bbbk$ 来完成定理 1.1 的证明。

我们的证明完全是代数的，并且相对直接。首先，通过导出的 Koszul 对偶性在 $Z(\Gamma)$ 和 2 维 Ginzburg dg 代数 $\Pi_2(Q)$ 之间，其中 Q 是一个其基础图是 Γ 的拟序图，存在一个同构

$$\mathrm{HH}^{p,q}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^{p,q}(\Pi_2(Q), \Pi_2(Q))$$

对于所有整数 p 和 q 的双梯度 Hochschild 上同调之间。这里将 $Z(\Gamma)$ 和 $\Pi_2(Q)$ 均视为微分双梯度代数；参见命题 4.4。

其次，我们在命题 3.2 中表明，对于所有整数 q，我们有

$$\mathrm{HH}^{2,q}(\Pi_2(Q), \Pi_2(Q)) \xrightarrow{\sim} (\Lambda_Q/[\Lambda_Q, \Lambda_Q])^{q+2}$$

，其中 Λ_Q 是 Q 的前射代数；参见 [5]。这个同构是我们证明的关键部分，可以被视为 Van den Bergh 对偶的一个双分级版本；参见备注 3.3。结合上述两个同构，我们得到

$$\mathrm{HH}^{2,q}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} (\Lambda_Q/[\Lambda_Q, \Lambda_Q])^{q+2}$$

Date: 2025 年 4 月 29 日.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16E05, 13D03, 16G20, 16E60.

Key words and phrases. A_∞-deformation，锯齿代数，Ginzburg dg 代数，Hochschild 上同调，预先射代数.

对于所有整数 q。然后定理 1.1 通过使用内禀形式性的标准（定理 4.2）以及由于 [17, Thm. 13.1.1] 和 [13, Thm. 1.4] 描述的 $\Lambda_Q/[\Lambda_Q,\Lambda_Q]$，这涉及到不良特征；参见推论 3.4。

2. 双分次 Hochschild 上同调

由于我们将使用曲折代数的双分级和 2 维 Ginzburg dg 代数，并考虑双分级霍赫希尔德上同调，让我们为微分双分级代数固定符号；参见 [9]。

微分双梯度向量空间 (V,d) 是一个双分级向量空间 $V=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}}V^{p,q}$，连同一个双次数为 $(1,0)$ 的微分 d，其中第一个分级表示上同调分级，第二个分级表示被视为额外分级的 Adams 分级。请注意，对于每个固定的整数 q，我们得到一个复形 $V^{\bullet,q}$。

对于任意两个微分双梯度向量空间 (U,d_U) 和 (V,d_V)，我们可以考虑微分双梯度 Hom-空间 $\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(U,V)=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^{p,q}(U,V)$ 以及带有通常的微分的张量积 $U\otimes V=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}}(U\otimes V)^{p,q}$，其中

$$\mathrm{Hom}^{p,q}(U,V)=\prod_{i,j\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U^{i,j},V^{p+i,q+j})\,,\ (U\otimes V)^{p,q}=\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}}U^{i,j}\otimes_{\Bbbk}V^{p-i,q-j}\,.$$

令 (A,d) 为一个微分双梯度代数（其乘法是双次数 $(0,0)$）。如常，我们可以定义双梯度微分 A-模（其微分为双梯度 $(1,0)$）及其相关的导出范畴。然后，对于任意两个差分双分级 A-模 M 和 N，导出的 Hom-空间 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A^{\bullet,\bullet}(M,N)$ 携带一个双分级，使得我们有

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A^{\bullet,q}(M,N))=\mathrm{Ext}_A^{p,q}(M,N)$$

对于所有整数 p 和 q。类似于通常情况，双分次 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^{p,q}(A,A)=\mathrm{Ext}_{A^e}^{p,q}(A,A)$ 可以通过具有通常微分的双分次 Hochschild 上链复形 $C^{\bullet,\bullet}(A,A)$ 来计算，其中

$$C^{p,q}(A,A)=\prod_{i\geq 0}\mathrm{Hom}^{p-i,q}(A^{\otimes i},A)\,.$$

也就是说，我们有

$$\mathrm{HH}^{p,q}(A,A)=\mathrm{H}^p(C^{\bullet,q}(A,A))\,.$$

这里我们将 A 的包络代数记为 $A^e=A\otimes A^{\mathrm{op}}$，它带有自然的双分次。

3. 2-维 GinzburgDG 代数和 Hochschild 上同调

3.1. 2-维的 Ginzburg dg 代数. 令 $\Bbbk$ 是任意特征的域，Q 是有限连通拟序。用 $\widetilde{Q}$ 表示从 Q 中通过为每个箭头 $\alpha\colon i\to j$ 添加一个箭头 $\alpha^*\colon j\to i$ 而得到的双倍有向图。用 $\overline{Q}$ 表示从 $\widetilde{Q}$ 获得的，在每个顶点 $i\in Q_0$ 处额外添加一个环 t_i 的有向图。我们将 $\overline{Q}$ 视为一个分级拟序图，通过将 $\widetilde{Q}$ 中的每个箭头分配度数 0，并将每个环 t_i 分配度数 -1。根据定义，2-维（非完备）*Ginzburg dg* 代数 $\Pi_2(Q)$ 是 dg 路径代数 $(\Bbbk\overline{Q},d)$，其中微分 d 由

$$d(\alpha)=0=d(\alpha^*)\text{ for all }\alpha\in Q_1\quad\text{and}\quad d(t)=\sum_{\alpha\in Q_1}[\alpha,\alpha^*]\,,\text{ where }t=\sum_{i\in Q_0}t_i\,.$$

确定。然后我们有 $d(t_i)=e_id(t)e_i$，因为对于所有 $i\in Q_0$ 都有 $d(e_i)=0$。

3.2. **一个小的紧致化解析.** 我们简单地用 B 表示 2 维的 Ginzburg dg 代数 $\Pi_2(Q)$。从现在起我们也表示 $\otimes = \otimes_{\Bbbk Q_0}$ 和 $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{(\Bbbk Q_0)^e}$。

我们从 [10] 回忆起 B 的一个小紧致化解。首先，我们有一个余纤维化 dg B-双模 $(B\otimes\Bbbk\overline{Q}_1\otimes B, \delta)$，其中微分 δ 定义为组合

$$B\otimes \Bbbk\overline{Q}_1\otimes B \xrightarrow{d'} B\otimes B\otimes B \xrightarrow{\rho} B\otimes\Bbbk\overline{Q}_1\otimes B\,.$$

这里 $\overline{Q}_1$ 是箭图 $\overline{Q}$ 中的箭头集，而两个映射 d' 和 ρ 由以下内容确定

$$d'(a\otimes x\otimes b) = (-1)^{|a|}ad(x)b \quad \text{and}$$

$$\rho(a\otimes x_1x_2\dots x_p\otimes b) = \sum_{i=1}^{p} ax_1\dots x_{i-1}\otimes x_i\otimes x_{i+1}\dots x_pb$$

对于所有在 $\overline{Q}$ 中的箭头 x，路径 $x_1x_2\dots x_p$ 在 $\overline{Q}$ 中，以及 a 和 $b\in B$。

命题 3.1 ([10, Proposition 3.7])**.** 映射的映射锥 $\mathrm{Cone}(\theta)$

$$\theta\colon (B\otimes\Bbbk\overline{Q}_1\otimes B,\delta)\longrightarrow B\otimes B$$

由 $\theta(a\otimes x\otimes b) = ax\otimes b - a\otimes xb$ 给出，作为 dgB-双模是 B 的一个余纤维化解。

3.3. **2 维 Ginzburg dg 代数的霍奇希勒上同调.** 我们将命题 3.1 中的解析应用于计算双分级霍奇科赫上同调 $\mathrm{HH}^{2,q}(B,B)$。

为此，我们将 B 视为一个微分双梯度代数，通过将双重拟维箭头 $\widetilde{Q}$ 的每个箭头赋予双梯度 $(0,1)$，并将每个环 t_i 赋予双梯度 $(-1,2)$。然后，每个路径都通过乘法（其具有双梯度 $(0,0)$）被赋予一个双梯度。显然，微分 d 是双次数 $(1,0)$。注意命题 3.1 中的自由化解 $\mathrm{Cone}(\theta)$ 与双分级兼容，因此可以用于计算双分级霍奇科赫上同调。

以下结果是本通知的关键观察。

命题 3.2. 对于任意整数 q，我们有

$$\mathrm{HH}^{2,q}(B,B)\xrightarrow{\sim}(\Lambda_Q/[\Lambda_Q,\Lambda_Q])^{q+2}\,,$$

其中 $\Lambda_Q = \Bbbk\widetilde{Q}/\sum_{\alpha\in Q_1}[\alpha,\alpha^*]$ 是 Q 的前射代数。

证明. 请注意，对于任意整数 p 和 q，我们有

$$\mathrm{Hom}^{p,q}_{B^e}(\mathrm{Cone}(\theta),B)\xrightarrow{\ \sim\ }\mathrm{Hom}^{p,q}(\Bbbk Q_0,B)\oplus\mathrm{Hom}^{p-1,q}(\Bbbk\overline{Q}_1,B)\,,$$

其中我们使用自然同构

$$\mathrm{Hom}^{p,q}_{B^e}(B\otimes X\otimes B,B)\xrightarrow{\ \sim\ }\mathrm{Hom}^{p,q}(X,B)$$

对于 $X=\Bbbk Q_0$ 和 $X=\Bbbk\overline{Q}_1$。回想我们用 $\otimes=\otimes_{\Bbbk Q_0}$ 和 $\mathrm{Hom}=\mathrm{Hom}_{(\Bbbk Q_0)^e}$ 表示的。显然，我们有以下 $\Bbbk Q_0$-双模（即 $(\Bbbk Q_0)^e$-模）的分解

$$\Bbbk\overline{Q}_1 = \Bbbk\widetilde{Q}_1\oplus\Bbbk Q_0 t\,,$$

其中需要注意的是 $t=\sum_{i\in Q_0}t_i$ 是 $\Bbbk Q_0$-中心的。得到以下分解

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}^{p-1,q}(\Bbbk\overline{Q}_1,B) &\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}^{p-1,q}(\Bbbk\widetilde{Q}_1,B)\oplus\mathrm{Hom}^{p-1,q}(\Bbbk Q_0 t,B)\\ &\simeq\mathrm{Hom}(\Bbbk\widetilde{Q}_1,B^{p-1,q+1})\oplus\mathrm{Hom}(\Bbbk Q_0,B^{p-2,q+2}),\end{aligned}$$

其中第二个同构成立是因为 $\Bbbk\widetilde{Q}_1$ 集中在双次数 $(0,1)$，而 $\Bbbk Q_0 t$ 集中在双次数 $(-1,2)$。

由于 B 集中在（上同调）非正次数中，因此我们有

$$\mathrm{Hom}^{\geq 1,q}(\Bbbk Q_0, B) = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Hom}^{\geq 2,q}(\Bbbk\overline{Q}_1, B) = 0\,.$$

因此，对于任何固定的整数 q，复形 $\mathrm{Hom}_{B^e}^{\bullet,q}(\mathrm{Cone}(\theta), B)$ 在次数 1,2,3 中由以下给出：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{B^e}^{1,q} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{B^e}^{2,q} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{B^e}^{3,q} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}(\Bbbk\widetilde{Q}_1, B^{0,q+1}) \oplus \bigoplus_{i\in Q_0} e_i B^{-1,q+2} e_i \arrow[r, "\partial = {[\partial_1\ \partial_2]}"] & \bigoplus_{i\in Q_0} e_i B^{0,q+2} e_i \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

其中我们表示 $\mathrm{Hom}_{B^e}^{p,q} = \mathrm{Hom}_{B^e}^{p,q}(\mathrm{Cone}(\theta), B)$ 并使用同构

$$\mathrm{Hom}(\Bbbk Q_0, B^{p,q}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in Q_0} e_i B^{p,q} e_i\,.$$

映射 $\partial = \begin{bmatrix}\partial_1 & \partial_2\end{bmatrix}$ 如下给出。对于任意的 $f \in \mathrm{Hom}(\Bbbk\widetilde{Q}_1, B^{0,q+1})$，我们有

$$\partial_1(f) = \sum_{\alpha\in Q_1} \left(f(\alpha)\alpha^* + \alpha f(\alpha^*) - f(\alpha^*)\alpha - \alpha^* f(\alpha)\right) = \sum_{\alpha\in Q_1} \left([f(\alpha), \alpha^*] + [\alpha, f(\alpha^*)]\right)\,. \tag{3.1}$$

对于任意的 $p \in \bigoplus_{i\in Q_0} e_i B^{-1,q+2} e_i$，我们有 $\partial_2(p) = d(p)$，其中 d 是 B 的微分。请注意，我们有 $\mathrm{HH}^{2,q}(B,B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(\partial)$。由同构 $\mathrm{H}^0(B^{\bullet,q}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_Q^q$，参见例如 [3, Thm. 7]，我们推断出我们有

$$\mathrm{Coker}(\partial_2) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in Q_0} e_i \mathrm{H}^0(B^{\bullet,q+2}) e_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in Q_0} e_i \Lambda_Q^{q+2} e_i\,,$$

其中 $\bigoplus_{i\in Q_0} e_i \Lambda_Q^{q+2} e_i$ 由长度为 $q+2$ 的循环生成。然后映射 ∂_1 诱导出

$$\overline{\partial_1}\colon \mathrm{Hom}(\Bbbk\widetilde{Q}_1, B^{0,q+1}) \longrightarrow \bigoplus_{i\in Q_0} e_i \Lambda_Q^{q+2} e_i\,.$$

显然，我们有 $\mathrm{Coker}(\partial) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(\overline{\partial_1})$ 因此

$$\mathrm{HH}^{2,q}(B,B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(\overline{\partial_1}) \xrightarrow{\sim} (\Lambda_Q/[\Lambda_Q, \Lambda_Q])^{q+2}\,.$$

在这里让我们解释最后一个同构。我们有自然映射（由包含诱导）

$$\varphi\colon \bigoplus_{i\in Q_0} e_i \Lambda_Q^{q+2} e_i \longrightarrow (\Lambda_Q/[\Lambda_Q, \Lambda_Q])^{q+2}\,.$$

注意到 φ 是满射的，因为 Λ_Q 中的任何非循环路径都属于 $[\Lambda_Q, \Lambda_Q]$。通过等式 (3.1)，我们有 $\varphi \circ \overline{\partial_1} = 0$。因此，只需证明我们有 $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{\partial_1})$。对于此，注意到任何非平凡循环 $x_1x_2\ldots x_{p+q} \in \Lambda_Q$ 带有 $x_i \in \widetilde{Q}_1$，以下等式

$$[x_1\ldots x_p, x_{p+1}\ldots x_{p+q}] = [x_1, x_2\ldots x_{p+q}] + \cdots + [x_p, x_{p+1}\ldots x_{p+q}x_1\ldots x_{p-1}] \tag{3.2}$$

成立。显然，$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 由等于号左侧形式的换位子生成 (3.2)。我们声称等式右侧的每一项 (3.2) 属于 $\mathrm{Im}(\overline{\partial_1})$。确实，对于每个 $1 \leq i \leq p$，我们定义一个元素 $f_i \in \mathrm{Hom}(\Bbbk\widetilde{Q}_1, B^{0,q+1})$ 如下。如果 x_i 等于 α 对某些 $\alpha \in Q_1$ 成立，那么我们定义

$$f_i(\alpha^*) = x_{i+1}\ldots x_{p+q}x_1\ldots x_{i-1}$$

和 $f_i(\beta) = 0$ 对所有在 $\widetilde{Q}_1$ 中的 $\beta \neq \alpha^*$。如果对于某个 $\alpha \in Q_1$，x_i 等于 α^*，那么我们定义

$$f_i(\alpha) = -x_{i+1}\ldots x_{p+q}x_1\ldots x_{i-1}$$

和 $f_i(\beta)=0$ 对于所有在 $\widetilde{Q}_1$ 中的 $\beta\neq\alpha$。然后由等式 (3.1)，我们有

$$\overline{\partial_1}(f_i)=[x_i,x_{i+1}\dots x_{p+q}x_1\dots x_{i-1}].$$

这证明了声明。所以 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 包含于 $\mathrm{Im}(\overline{\partial_1})$。 □

备注 3.3. 此备注归因于伯纳德 · 凯勒。设 B 是一个连通的左 d-卡拉比—丘 dg 代数（在我们的例子中，d 等于 2）。然后我们有同构

$$\mathrm{HH}^d(B,B)\xleftarrow{\sim}\mathrm{H}^d(B\otimes^{\mathbb{L}}_{B^e}\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^e))\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^0(B\otimes^{\mathbb{L}}_{B^e}B)\simeq\mathrm{H}^0(B)\otimes_{(\mathrm{H}^0(B))^e}\mathrm{H}^0(B)\,,$$

其中第一个同构使用了 B 的光滑性，第二个使用了卡拉比—丘性质（即 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^e)[d]\xrightarrow{\sim}B$），第三个使用了连通性（即 $\mathrm{H}^{>0}(B)=0$）。

此论证在不使用小紧集分辨率的情况下，给出了命题 3.2 中同构的证明，在忽略 Adams 分级后。命题 3.2 中的同构可以视为范登贝格对偶性 [18] 的一个双级版本。双分级有助于明确写出对应于第 4.4 节中 $\mathrm{HH}^{2,q}(B,B)$ 元素的 B 的 dg 形变。

推论 3.4. *令 Q 是任意有限连通拟定向量，并且 B 是 2 维的 Ginzburg 差分梯度代数 $\Pi_2(Q)$。然后我们有 $\mathrm{HH}^{2,q}(B,B)=0$ 对所有正整数 q 成立当且仅当 Q 的基础图是类型 ADE 并且域 $\Bbbk$ 不具有不良特征。*

证明. 如果底层图 Q 是类型 ADE，则这遵循命题 3.2 和 [17, Thm. 13.1.1]，其中涉及不良特征。否则，箭图 Q 包含一个子箭图 Q'，其基础图是扩展 ADE 类型的，因此映射 $\Lambda_Q/[\Lambda_Q,\Lambda_Q]\to\Lambda_{Q'}/[\Lambda_{Q'},\Lambda_{Q'}]$ 是满射的。由 [17, Thm. 13.1.1] 可知，后者总是无限维的，因此根据命题 3.2，对于任意域 $\Bbbk$，$\mathrm{HH}^{2,>0}(B,B)$ 也是无限维的。 □

4. A_∞-齐次变形的折线代数

4.1. **A_∞-变形.** 我们回顾一些关于分级代数的 A_∞-形变的基本概念。我们参考 [8] 中关于 A_∞-代数的基本概念。

定义 4.1. 令 (A,μ) 是一个带有乘法 μ 的分次代数。一个 A_∞-变形的 A 是一个具有单位元的 A_∞-代数 $(A,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\dots)$，使得 $\mu_1=0$ 和 $\mu_2=\mu$。两个 A_∞-变形的 A 是等价，如果它们彼此 A_∞-同构。

我们说 A 是内在形式化如果它不接受任何非平凡的 A_∞- 变形。

请注意，一个分级代数 A 可以被视为双分级代数，通过给 A^i 中的每个元素赋予双次数 $(i,-i)$。以下是有用的内在形式性的判据。

定理 4.2 ([7, Cor. 4][16, Thm. 4.7] 和 [15, Cor. 5.4]). *设 A 是一个分次代数。如果对于所有正整数 q 我们有 $\mathrm{HH}^{2,q}(A,A)=0$，则 A 内在形式化。*

4.2. **锯齿代数.** 我们感兴趣的是锯齿代数的 A_∞-形变。

定义 4.3 ([6, §3]). 令 Γ 为一个没有环和多重边的有限连通图。如果 Γ 有超过两个顶点，则之字形代数 $Z(\Gamma)$ 是双拟定向图 $\overline{\Gamma}$ 的路径代数 $\Bbbk\overline{\Gamma}$（即，用两个相反方向的箭头替换每条边）模去关系：每个顶点处的所有 2-环都相等（但非零），且所有长度为 2 但不包括 2-环的路径均为零。如果图 Γ 是 A_1，则按惯例我们定义 $Z(\Gamma)=\Bbbk[x]/(x^2)$。如果图 Γ 是 A_2，则我们定义 $Z(\Gamma)$ 为由长度大于 2 的所有路径生成的双边理想除 $\Bbbk\overline{\Gamma}$ 的商。

我们将 $Z(\Gamma)$ 视为一个分级代数，通过赋予每个箭头度数 1 并研究其 A_∞-形变。请注意，$Z(\Gamma)$ 是有限总维度，并集中在等级 $0, 1$ 和 2，使得我们有 $\dim Z(\Gamma)^0 = |\Gamma_0| = \dim Z(\Gamma)^2$ 和 $\dim Z(\Gamma)^1 = 2|\Gamma_1|$。例如，设 $\Gamma = D_4$。然后我们有 $Z(\Gamma) = \Bbbk\overline{\Gamma}/(\alpha_i\beta_i = \alpha_j\beta_j, \beta_i\alpha_j = 0)_{i\neq j}$，其中 $\overline{\Gamma}$ 如下给出。

$$\overline{\Gamma} = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, shift left, "\alpha_2"] & \\ \bullet \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[u, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift left, "\beta_3"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

4.3. **从 zigzag 代数到 2 维 Ginzburgdg 代数的衍生 Koszul 对偶关系.** 令 Γ 是一棵有限树，Q 是任意固定的拟序图，其基础图是 Γ，且每个顶点都是汇或源。回顾第 3.3 节的内容，$\Pi_2(Q)$ 是双分次的。类似地，代数 $Z(\Gamma)$ 也是双分次的，其箭头是双次数为 $(1, -1)$ 的。

由 [3, § 5.3] 可知，$Z(\Gamma)$ 是 $\Pi_2(Q)$ 的导出 Koszul 对偶，即存在微分双梯度代数的准同构

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}_{Z(\Gamma)}(\Bbbk\Gamma_0, \Bbbk\Gamma_0) \simeq \Pi_2(Q) \quad \text{and} \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}_{\Pi_2(Q)}(\Bbbk Q_0, \Bbbk Q_0) \simeq Z(\Gamma) \tag{4.1}$$

。我们注意到，如果我们把 $Z(\Gamma)$ 看作是没有 Adams 分级的普通分级代数，则 dg 代数 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{Z(\Gamma)}(\Bbbk\Gamma_0, \Bbbk\Gamma_0)$ 准同构于以长度滤过为标准完成化的 $\Pi_2(Q)$。

以下结果将在我们的证明中使用。

命题 4.4 ([3, Thm. 27] 和 [9, § 3.1]). *对于任何整数 p 和 q，我们有一个同构。*

$$\mathrm{HH}^{p,q}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^{p,q}(\Pi_2(Q), \Pi_2(Q))\,. \tag{4.2}$$

备注 4.5. 上述推导的 Koszul 对偶 (4.1) 可能在 Γ 不是树时不起作用。然而，回顾 [14]，对于定义 4.3 中的任意图 Γ，如果 Γ 不是类型 ADE 的，则 $Z(\Gamma)$ 总是 Koszul（在经典意义上），并且其 Koszul 对偶 $Z(\Gamma)^!$ 是路径代数 $\Bbbk\overline{\Gamma}$ 模去关系：所有 2-循环的和为零；参见 [6, § 6.1]。然后根据 [9, § 3.5]，我们有

$$\mathrm{HH}^{p,q}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^{p,q}(Z(\Gamma)^!, Z(\Gamma)^!)\,,$$

其中代数 $Z(\Gamma)^!$ 是双分级的，其箭头是双次数为 $(0, 1)$ 的。如果图 Γ 是一棵树且不是类型 ADE，那么这与同构 (4.2) 相符，因为我们有

$$Z(\Gamma)^! \xrightarrow{\sim} \Lambda_Q \xleftarrow{\sim} \Pi_2(Q)\,;$$

请参见 [6] 以了解第一个同构。

4.4. **证明.** 现在让我们给出定理 1.1 的证明。

定理的另一个证明 1.1. 让我们首先证明充分性。由定理 4.2，只需证明如果 Γ 是类型 ADE 并且 $\Bbbk$ 不是坏特征，则对于所有正整数 q 我们有 $\mathrm{HH}^{2,q}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) = 0$。这可以通过结合命题 4.4 和推论 3.4 得出。

现在我们证明必要性。为此，根据推论 3.4 和命题 3.2，只需证明在 $(\Lambda_Q/[\Lambda_Q, \Lambda_Q])^{q+2}$ 中的任何非零元素 w 会诱导一个非平凡的 A_∞-形变到 $Z(\Gamma)$。元素 w 提升为长度大于 2 的 Λ_Q 中周期的线性组合 w'，这诱导了由 $d'(t) = d(t) + w'\epsilon$ 对 $\Pi_2(Q)$ 的非平凡一阶 dg 形变，其中 $t = \sum_{i\in Q_0} t_i$。请注意，这种变形自然扩展到一个实际（或全局）dg 变形

$$B' = (\Pi_2(Q), d'|_{\epsilon=1})$$

的 $\Pi_2(Q)$。然后，A_∞-代数 $Z(\Gamma)' = \mathrm{Ext}^\bullet_{B'}(\Bbbk Q_0, \Bbbk Q_0)$ 是一个非平凡的 A_∞-形变（比较 [1, Prop. 4.7]）的 $Z(\Gamma)$，使得 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{Z(\Gamma)'}(\Bbbk\Gamma_0, \Bbbk\Gamma_0)$ 与关于长度过滤的 B' 的完备化拟同构。这里我们需要取完备化，因为 B' 和 $Z(\Gamma)'$ 是普通 dg 代数，没有阿当斯分级；参见导出 Koszul 对偶 (4.1)。 □

备注 4.6. 定理 1.1 可能更一般。即，设 Γ 是定义 4.3 中的任意一个非类型 ADE 的图。那么分次代数 $\Pi_2(\Gamma)$ 不是本质形式的，也就是说它允许非平凡的 A_∞-形变。原因是如下。由备注 4.5，我们有

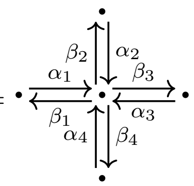
$$\begin{aligned}\mathrm{HH}^{2,q}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) &\simeq \mathrm{HH}^{2,q}(Z(\Gamma)^!, Z(\Gamma)^!)\\ &\simeq \mathrm{HH}_{0,q}(Z(\Gamma)^!, Z(\Gamma)^!)\\ &\simeq (Z(\Gamma)^!/[Z(\Gamma)^!, Z(\Gamma)^!])^{0,q+2}\,,\end{aligned}$$

其中第二个同构关系成立是因为 $Z(\Gamma)^!$ 是左侧 2-卡拉比-丘（因为 $Z(\Gamma)$ 是右侧 2-卡拉比-丘）。我们指出，除非 Γ 是一棵树（或二分图），$Z(\Gamma)^!$ 可能不会同构于一个预射代数；比较备注 4.5。但是通过与 [17, Thm. 13.1.1] 和 [13, Theorem 1.4.b] 类似的计算，也可以参考 [13, page 518]，我们可以证明 $(Z(\Gamma)^!/[Z(\Gamma)^!, Z(\Gamma)^!])^{0,>2}$ 的总维数是无限的。

示例 4.7. *设 Γ 是扩展的 D_4 图。然后结合命题 3.2 和 4.4 与 [17, Thm. 13.1.1]，我们得到 $\mathrm{HH}^{2,>0}(Z(\Gamma), Z(\Gamma)) \simeq (e_4\Lambda_Q e_4)^{>2}$，其总维度为无限。这里 e_4 对应于下面箭图的底部顶点。因此，$Z(\Gamma)$ 允许一个无限维的 A_∞-变形家族。例如，周期 $\beta_4\alpha_1\beta_1\alpha_4$ 引发了一个非平凡的 A_∞-变形，使得 $Z(\Gamma)$ 的 m_4 仅在*

$$\begin{aligned}m_4(\beta_4\otimes\alpha_1\otimes\beta_1\otimes\alpha_4) = \beta_4\alpha_4\,,\ m_4(\alpha_4\otimes\beta_4\otimes\alpha_1\otimes\beta_1) = \alpha_1\beta_1\,,\\ m_4(\beta_1\otimes\alpha_4\otimes\beta_4\otimes\alpha_1) = \beta_1\alpha_1\,,\ m_4(\alpha_1\otimes\beta_1\otimes\alpha_4\otimes\beta_4) = \alpha_4\beta_4\end{aligned}$$

（相差一个标量）时是非零的，并且所有其他作用于箭头上的高乘法都消失。

$\overline{\Gamma} =$ 

致谢。Severin Barmeier, Bernhard Keller, Yankı Lekili 和 Travis Schedler 提供的许多有益的评论和讨论。第一作者还衷心感谢斯图加特大学代数与数论研究所在其撰写本文期间的热情款待。第二作者得到了中国国家重点研发计划（2024YFA1013803）、国家自然科学基金（项目编号：13004005, 12371043 和 12071137）以及德国研究基金会资助（WA 5157/1-1）的支持。作者们感谢审稿人提供的有益评论和建议。

References

[1] S. Barmeier, and Z. Wang, *A_∞ deformations of extended Khovanov arc algebras and Stroppel's conjecture*, arXiv:2211.03354 (2022).

[2] T. Dyckerhoff, *Compact generator in categories of matrix factorizations*, Duke Math. J. **159** (2) (2011), 223–274.

[3] T. Etgü, and Y. Lekili, *Koszul duality patterns in Floer theory*, Geom. Topol. **21** (6) (2017), 3313–3389.

[4] A. Evseev, and A. Kleshchev, *Blocks of symmetric groups, semicuspidal KLR algebras and zigzag Schur-Weyl duality*, Ann. of Math. **188** (2) (2018), 453–512.

[5] I.M. Gel′fand and V.A. Ponomarev, *Model algebras and representations of graphs*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **13**(3) (1979), 1–12.

[6] R.S. Huerfano, and M. Khovanov, *A category for the adjoint representation*, J. Algebra **246** (2) (2001), 514–542.

[7] T.V. Kadeishvili, *The structure of the $A(\infty)$-algebra, and the Hochschild and Harrison cohomologies*, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR 91 (1988) 19–27.

[8] B. Keller, *Introduction to A-infinity algebras and modules*, Homology, Homotopy and Appl. **3** (2001), 1–35.

[9] B. Keller, *Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex*, https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/dih.pdf (2003).

[10] B. Keller, *Deformed Calabi-Yau completions, with an appendix by Michel Van den Bergh*, J. Reine Angew. Math. **654** (2011), 125–180.

[11] Y. Lekili, and K. Ueda, *Homological mirror symmetry for Milnor fibers of simple singularities*, Algebr. Geom. **8** (5) (2021), 562–586.

[12] M. Mackaaij, and D. Tubbenhauer, *Two-color Soergel calculus and simple transitive 2-representations*, Canad. J. Math. **71** (6) (2019), 1523–1566.

[13] A. Malkin, V. Ostrik, and M. Vybornov, *Quiver varieties and Lusztig's algebra*, Adv. Math. **203** (2) (2006), 514–536.

[14] R. Martínez-Villa, *Application of Koszul algebras: the preprojective algebra*, in Representation Theory of Algebras, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, Vol. 18, 487–504, 1996.

[15] C. Roitzheim, and S. Whitehouse, *Uniqueness of A_∞-structures and Hochschild cohomology*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), no. 1, 107–143.

[16] P. Seidel, and R. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J. **108** (2001), 37–108.

[17] T. Schedler, *Zeroth Hochschild homology of preprojective algebras over the integers*, arXiv:0704.3278v2 (2016).

[18] M. Van den Bergh, *A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (5) (1998), 1345–1348. Erratum: **130** (9) (2002), 2809–2810.

刘俊阳

中国科学技术大学数学科学学院

安徽合肥 230026, 中国

liuj@imj-prg.fr

https://webusers.imj-prg.fr/~junyang.liu/

王正方

数学系，南京大学

南京 210093，中国

zhengfangw@gmail.com