

Tsirelson 问题否定解决的可能物理后果

Adán Cabello^{1,2}, Marco Túlio Quintino³, and Matthias Kleinmann⁴

¹ Departamento de Física Aplicada II, Universidad de Sevilla, 41012 Sevilla, Spain

² Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional, Universidad de Sevilla, 41012 Sevilla, Spain

³ Sorbonne Université, CNRS, LIP6, F-75005 Paris, France

⁴ Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät, Universität Siegen, Walter-Flex-Straße 3, 57068 Siegen, Germany

2020 年, Ji 等。[arXiv:2001.04383 和 Comm. ACM 64, 131 (2021)] 提供了一个证明, 表明复杂度类 MIP* 和 RE 是等价的。这一结果意味着 Tsirelson 问题的否定解答, 即 C_{qa} (张量积相关性的闭包) 和 C_{qc} (交换相关性集) 可以通过超平面 (即类似于贝尔不等式的形式) 来分离。特别是, 存在由无穷维量子系统上的有限数量的交换测量产生的相关性 (具有有限数量的结果), 这些相关性不能通过有限维张量积相关性的序列来逼近。这里我们指出这个结果有四种逻辑可能性。每种可能性都因其从根本上以不同方式挑战空间上分离系统的性质而有趣。我们列出了一些开放问题, 以便为决定哪种可能性是正确的取得进展。

1 定义

关于复杂性类 MIP* 和 RE, Ji 的等人士。[1, 2] 结果对两种量子关联集之间的关系具有影响。因此, 适当地从提供相关关联集的定义开始是合适的。

定义 1 (相关性). 对于一个二部贝尔场景 $(|X|, |Y|, |A|, |B|)$ [3, 4], 其中爱丽丝的所有测量 $x \in X$ 具有相同的输出集 A , 鲍勃的所有测量 $y \in Y$ 具有相同的输出集 B , 且 A, B, X, Y 是有限集, 一个相关性 (例如在 [5] 中使用的术语), 或相关矩阵 (例如在 [6] 中使用的术语), 或行为 [7], 或经验模型 [8], 或概率模型 [9], 或框 (例如在 [10] 中使用的术语) 是所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 以及所有 $a \in A$

和 $b \in B$ 的集合 $p(a, b|x, y)$ 。也就是说, 这是一个概率分布列表, 每对 (x, y) 都有一个。

请注意, 在这里以及以下内容中, 集合 A, B, X, Y 是任意的, 但固定的。

定义 2 (量子关联的集合 C_q [11–13]). 一个相关性 p 在集合 C_q 中, 如果存在有限维的可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$, 正算子值测度 (POVMs) (在有限结果的情况下, 是一组求和单位矩阵的半正定算子) $A^x = \{A_a^x\}_{a \in A}$ 对于所有 $x \in X$ 在 $\mathcal{H}_A$ 上, 以及 $B^y = \{B_b^y\}_{b \in B}$ 对于所有 $y \in Y$ 在 $\mathcal{H}_B$ 上, 并且存在密度算子 (即带有单位迹的半正定算子) ρ 在 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上, 使得

$$p(a, b|x, y) = \text{tr}(A_a^x \otimes B_b^y \rho). \quad (1)$$

定义 3 (量子空间相关性集 C_{qs} [11–13]). 与定义 2 相同, 但将 C_q 替换为 C_{qs} , 并将“有限维”替换为“(可能无限维)”。

定义 4 (量子近似关联的集合 C_{qa} [11–13]). C_{qa} 是 C_q 的闭包。也就是说, 所有可以被有限维近似任意好的张量积相关性。

定义 5 (量子交换关联的集合 C_{qc} [11–13]). 如果相关性 p 在集合 C_{qc} 中, 则存在一个可分的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ (可能为无限维), 对于所有 $x \in X$ 在 $\mathcal{H}$ 上的 POVMs $A^x = \{A_a^x\}_{a \in A}$, 以及对于所有 $y \in Y$ 在 $\mathcal{H}$ 上的 $B^y = \{B_b^y\}_{b \in B}$, 使得对所有 x, y, a, b 成立 $[A_a^x, B_b^y] = 0$, 并且存在一个密度算子 ρ 在 $\mathcal{H}$ 上, 满足

$$p(a, b|x, y) = \text{tr}(A_a^x B_b^y \rho), \quad (2)$$

其中 $A_a^x B_b^y$ 是算子 A_a^x 和 B_b^y 的乘积。

Adán Cabello: adan@us.es

Marco Túlio Quintino: Marco.Quintino@lip6.fr

Matthias Kleinmann: matthias.kleinmann@uni-siegen.de

备注 1. C_{qs} 在非相对论量子力学 (QM) 和非相对论量子信息 [14, 15] 中常用于建模两个空间上分离系统之间的测量相关性。

备注 2. 在代数量子场论 (AQFT) 中, 局部可观测量由作用于联合希尔伯特空间上的算子表示, C_{qc} 在原则上是时空分离区域实验之间相关性的集合 [16, 17]。然而, 有时会添加额外的约束条件以处理无限多自由度的问题。这些约束意味着严格分离的时空区域的局部代数包含在希尔伯特空间张量因子中。这被称为“分裂性质” [18]。因此, C_{qs} 将是满足这种分裂性质的时空分离区域之间的相关性集合。然而, “如果能够构建并实现实验室中的适当相关表达式, 就可能通过实验反驳分裂性质” [19]。

备注 3. C_{qc} 也是量子力学模型描述互不干扰的、可联合测量的尖锐可观测量之间相关性的方式。例如, 由 Kochen-Specker 情境性可联合测量的尖锐可观测量顺序理想测量产生的那些 [20]。

备注 4. 符号 $C_q, C_{qs}, C_{qa}, C_{qc}$ 可追溯到参考文献 [11–13, 21]。这些定义直接意味着 $C_q \subseteq C_{qs} \subseteq C_{qa} \subseteq C_{qc}$, 且可以发现 C_{qc} 已经封闭 [12, 13]。

定义 6 (Tsi 列森问题 [22])。 C_{qa} 是否等于 C_{qc} ? 或者, 等价地说, 所有无限维的交换相关性能否被有限维张量积相关性的序列近似?

2 先前结果的总结

结果 1. Scholz 和 Werner [22] 表明在假设 Alice 的或 Bob 的算子代数是核的情况下, $C_{qa} = C_{qc}$ 成立。例如, 如果 Alice 被限制执行两种不同的二值测量, 或者基础希尔伯特空间是有限维的 [23]。

结果 2. Junge 等人。 [19] 和 Fritz [24] 表明 Tsirelson 的问题和 Connes 关于 von Neumann 代数中有限近似的嵌入问题 (已知等价于 Kirchberg 的 QWEP 猜想) 是等价的。

结果 3. Coladangelo 和 Stark [25] 表明, 在二分贝尔场景 (4, 5, 3, 3) 中, Alice (Bob) 有 4 (5) 设置和 3 结果的情况下, 存在一种相关性在 C_q 中无法实现但在无限维量子系统中通过 C_{qs} 实现了这种相关性, 因此 $C_q \neq C_{qs}$ 。

结果 4. Slofstra [6] 表明 $C_{qs} \neq C_{qa}$, 也就是说集合 C_{qs} 不是闭合的。证明是构造性的, 在讨论的贝尔场景中, 输入集的大小分别为 184 和 235, 输出集的大小为 8 和 2。因此该贝尔场景是 (184, 235, 8, 2)。后来, Dykema 等。 [26] 表明 $C_{qs} \neq C_{qa}$ 在 (5, 5, 2, 2) 场景中已经成立。此证明随后在文献 [27] 中得到了简化。

结果 5. Ji 等。 [1, 2] 表明了复杂性类 MIP^* 和 RE 的等价性, 并且这进一步意味着在某个具有有限 $n = |A| = |B|$ 和 $k = |X| = |Y|$ 的贝尔场景中存在 $C_{qa} \neq C_{qc}$ 。因此, 并非所有无限维的交换相关性都可以通过有限维张量积相关性的序列来逼近。

$MIP^* = RE$ [1, 2] 的另一个结果是, 对于某些 $\varepsilon > 0$, C_{qa} 的 ε -弱成员问题不可判定。也就是说, 无法设计一个通用算法来判断来自任意贝尔场景的相关性 p 是否接近 (在 l_1 距离下) 集合 C_{qa} 的 ε 。

备注 5. Ref. [1] 中的证明 “给出了一个明确的相关性, 该相关性属于集合 C_{qc} 但不属于 C_{qa} 。” [...] 原则上可以确定参数 n [爱丽丝和鲍勃的测量设置数量, 即 $n = |X| = |Y|$] 和参数 k [所有测量的结果数量, 即 $k = |A| = |B|$] 的上限来从证明中分离相关性。虽然我们没有提供这样的界限, 但证明中的任何一步都不需要这个界限达到天文数字; 例如, 我们认为 (未经证明) 10^{20} 是一个明确的上限” [1]。特别是, 参考文献 [1] 的结果确保了一个非局域游戏 (贝尔不等式的一个特例) 的存在, 使得来自 C_{qc} 的关联可以以单位概率获胜, 但来自 C_{qa} 的关联无法达到大于 $1/2$ 的值。

结果 6. 通过结合上述结果, 我们看到存在有限集 A, B, X, Y , 使得对于它们相关的场景, 我们有严格包含

$$C_q \subsetneq C_{qs} \subsetneq C_{qa} \subsetneq C_{qc}. \quad (3)$$

3 物理可能的后果

数学事实表明, C_{qa} 和 C_{qc} 可以通过一个类似贝尔的不等式分开, 以后称为量子张量不等式, 并且量子力学和阿基米德量子场论原则上允许存在 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$, 这为检测量子张量不等式的违反情况打开了实验的道路。然而, 目前还不清楚这样的

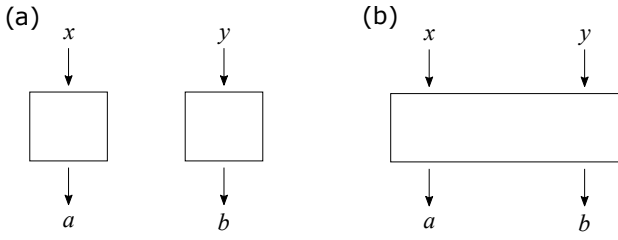


图 1: (a) 两位独立观察者 Alice 和 Bob 分别对两个空间上分离的系统进行测量的实验。(b) Alice 和 Bob 在一个单独的系统中执行可交换测量的实验。在这两种情况下, $x(y)$ 是 Alice (Bob) 的测量结果, $a(b)$ 是相应的输出。

实验是否可以在原则上进行, 以及它们的结果会是什么。

我们的目标是根据哪些实验可行及其结果来识别逻辑可能性。为此, 我们将系统之间存在空间分离的实验 (如图 1(a)) 与在同一系统上执行的可交换测量实验 (如图 1(b)) 区分开来。在第一种情况下, 我们还将事件呈空间分离的实验 (如图 2(a)) 与事件不呈空间分离的实验 (如图 2(b)) 区分开来。

可能性 1. 没有 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 是可行的, 即使在单个系统进行可交换测量的实验中也是如此。

可能性 2. 没有 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 在两个空间分离系统的实验中是可行的, 但 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 在单个系统上的可交换测量实验中是可行的。

可能性 3. $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 在两个空间上分离的系统实验中是可行的, 但前提是这些事件不能时空分离。

可能性 4. $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 在两个空间上分离的系统中的实验中是可行的, 即使这些事件在时空上是分离的。

可能性 2 意味着在单一系统上存在无法在空间分离系统上实现的相关性。换句话说, 对于具有相同可联合测量关系的观测值场景, 存在 Kochen-Specker 情境相关性 (非干扰的共同可观测量测量之间相关性) 比任何空间分离的相关性 “更大”。

可能性 3 意味着, 在复合系统中存在相关性, 如果事件不是类空间隔的, 将违反量子张量不等式, 而当事件是类空间隔时, 这种违反就会消失。

任何可能性 2、3 和 4 都允许在特定条件下产生相关性 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$, 从而开辟了一条通过实验证明具有无限多自由度系统存在的途径。

相关性 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 可能由于各种障碍而无法实现, 包括:

- (a) 在接受的量子力学/代数量子场论框架内, 无法表示导致 p 的状态和测量 (参见例如参考文献 [28])。
- (b) 实现导致 p 的状态和测量的设备的存在与某些基本的实际限制相矛盾 (例如, 由于宇宙学约束而无法访问的能量或时间需求)。
- (c) 这些设备无法实现, 因为受到基本定律的限制 (例如, 对清晰可观测量的理想测量可能需要无限的时间或能量, 参见文献 [29, 30])。
- (d) 对无限维系统进行测量是不可能的, 这些测量不对应于有限维系统的测量 (例如, 请参见参考文献 [31, 32])。

尽管存在所有可能的障碍, 我们认为设计一种策略来尝试确定四种可能性 1–4 中的哪一种发生并识别其原因是很重要的。

4 实验测试路线图

问题 1. 在物理学中哪些可能性 1–4 是适用的?

解决 1 问题的一种方法是解答以下问题:

问题 2. 明确地识别出存在 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 的场景。在这里, 我们所说的场景不是贝尔场景, 而是科赫恩-斯佩克尔的上下文性场景, 其中可观测量的关系与贝尔场景中的联合可测量关系相同。据我们所知, 这些场景甚至可能包括那些具有与 (3, 3, 2, 2) [33] 或 (4, 5, 3, 3) [25] 贝尔场景相同的联合可测量关系的场景。

问题 3. 对于通过解决 2 问题所获得的任何场景, 明确识别出 $p \in C_{qc} \setminus C_{qa}$ 。

吉等。[1, 2] 的结果表明问题 2 和 3 可以解决。

问题 4. 检查通过求解问题 3 所获得的相关性在量子力学/代数量子场论中是否有表示。考虑其物理实现的障碍。

问题 5. 如果没有障碍, 识别由 p 违反的量子张量不等式, 并找到可以在实际 (不完美) 实验中进行测试的违反情况。

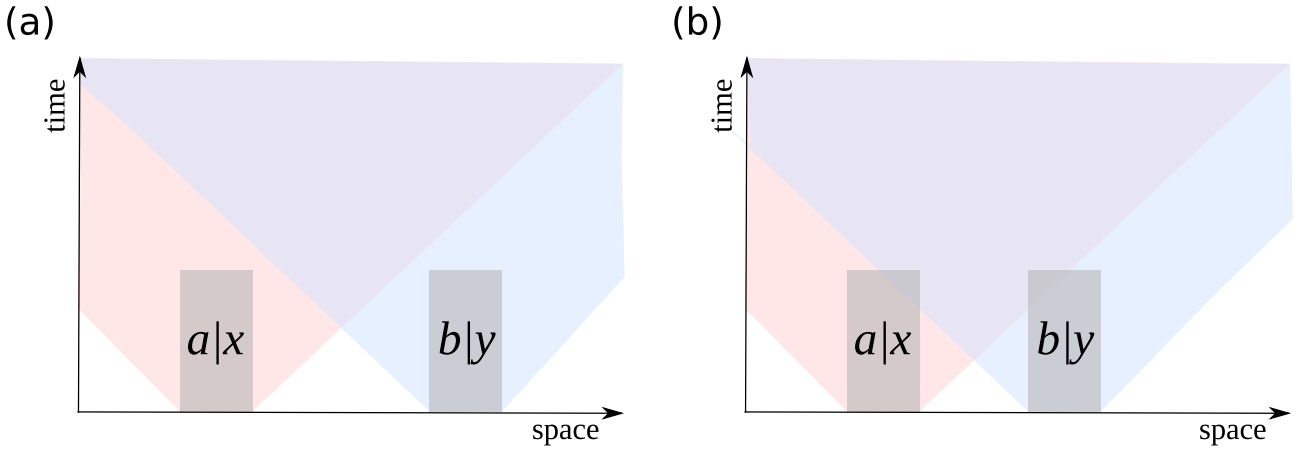


图 2: 时空图展示了测量 x 和 y 的一个实现及其相应结果 a 和 b 。每次测量都需要从决定进行测量的点到记录其结果之间的一定时空区域, 这一区域的大致范围用灰色框表示。为了具有类空间隔, 测量 y 的结果 b 必须位于任何测量 x 结果 a 的未来光锥之外, 反之亦然。在 (a) 中, $a|x$ 和 $b|y$ 是类空间隔的。在 (b) 中, $a|x$ 的一部分位于 $b|y$ 的光锥内, 而 $b|y$ 的一部分位于 $a|x$ 的光锥内。

备注 6. Navascués-Pironio-Acín 层次 [34, 35] 是一个外逼近族, 收敛到 C_{qc} 。然而, 我们没有任何内逼近层次收敛到 C_{qc} 。因此, 对于 C_{qc} 的 ε -弱成员问题可能是不可判定的, 就像 C_{qa} [2] 的情况一样, 参见结果 5 和参考文献 [1, 2]。然而, 即使它是不可判定的, 找到一个量子张量不等式只需要为 C_{qa} 中的任意元素找到函数 T 的一个上界, 这个上界要小于 C_{qc} 中 T 的最大值。

到目前为止, 我们只考虑了二部图的情况。然而, 一种更实用的方法来研究关联的物理可能是将 C_{qs} , C_{qc} , 以及问题 1–5 扩展到多部图的情况。从这个角度来看, 考虑以下内容会有所帮助。

问题 6. 张量和交换相关性之间的差距随着系统数量的增加如何增长?

5 致谢

这项工作源于在西班牙本阿斯科的佩德罗·帕斯克库阿尔科学中心于 2023 年 6 月 22 日举办的“量子信息”研讨会上关于“Physical consequences of $MIP^* = RE$ ”的一次讨论。本文的手稿更新版本完成于 2025 年的“量子信息”研讨会中。感谢所有参与者的反馈, 特别是 Zoltán Zimborás 提供的有用见解和富有成效的讨论。我们也感谢 Andrea Coladangelo 和 Marcelo França Santos 的帮助。这项工作得到了以下机构的支持: AEI/MICINN (项目编号 PID2020-113738GB-I00), 加拿大-欧

盟项目“量子计算优势的基础”(FoQaCiA) (doi: 10.3030/101070558), 德国研究基金会 (DFG, 项目编号 447948357 和 440958198), 中德科学中心 (项目编号 M-0294), ERC (Consolidator Grant 683107/TempoQ), 以及德国联邦教育与研究部 (项目 QuKuK, BMBF 资助号 16KIS1618K)。

参考文献

- [1] Zhengfeng Ji, Anand Natarajan, Thomas Vidick, John Wright, and Henry Yuen. “ $MIP^* = RE$ ” (2022). [arXiv:2001.04383](#).
- [2] Zhengfeng Ji, Anand Natarajan, Thomas Vidick, John Wright, and Henry Yuen. “ $MIP^* = RE$ ”. [Comm. ACM](#) **64**, 131–138 (2021).
- [3] John S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. [Physics](#) **1**, 195–200 (1964).
- [4] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”. [Phys. Rev. Lett.](#) **23**, 880–884 (1969).
- [5] Victoria J. Wright and Máté Farkas. “Invertible map between Bell nonlocal and contextuality scenarios”. [Phys. Rev. Lett.](#) **131**, 220202 (2023). [quant-ph:2211.12550](#).
- [6] William Slofstra. “The set of quantum correla-

- tions is not closed”. *Forum Math., Pi* **7** (2019). [arXiv:1703.08618](#).
- [7] B. S. Cirel’son. “Some results and problems on quantum Bell-type inequalities”. *Hadron. J. Suppl.* **8**, 329–345 (1993). url: <https://www.tau.ac.il/~tsirel/download/hadron.pdf>.
- [8] Samson Abramsky and Adam Brandenburger. “The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality”. *New J. Phys.* **13**, 113036 (2011). [arXiv:1102.0264](#).
- [9] Samson Abramsky and Lucien Hardy. “Logical Bell inequalities”. *Phys. Rev. A* **85**, 062114 (2012). [arXiv:1203.1352](#).
- [10] Ravishankar Ramanathan, Fernando G. S. L. Brandão, Karol Horodecki, Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Hanna Wojewódka. “Randomness amplification under minimal fundamental assumptions on the devices”. *Phys. Rev. Lett.* **117**, 230501 (2016). [arXiv:1504.06313](#).
- [11] Vern I. Paulsen and Ivan G. Todorov. “Quantum chromatic numbers via operator systems”. *Q. J. Math.* **66**, 677–692 (2015). [arXiv:1311.6850](#).
- [12] Vern I. Paulsen, Simone Severini, Daniel Stahlke, Ivan G. Todorov, and Andreas Winter. “Estimating quantum chromatic numbers”. *J. Funct. Anal.* **270**, 2188–2222 (2016). [arXiv:1407.6918](#).
- [13] William Slofstra. “Tsirelson’s problem and an embedding theorem for groups arising from non-local games”. *J. Am. Math. Soc.* **33**, 1–56 (2019). [arXiv:1606.03140](#).
- [14] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Lalœ. “Quantum mechanics”. Volume 1. Wiley-VCH. (2020).
- [15] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. “Quantum computation and quantum information”. *Cambridge University Press*. (2010).
- [16] Rudolf Haag. “Local quantum physics. fields, particles, algebras”. *Springer*. New York (1992).
- [17] Hans Halvorson. “Algebraic quantum field theory”. In Jeremy Butterfield and John Earman, editors, *Philosophy of Physics*. Pages 731–864. *Handbook of the Philosophy of Science*. North-Holland, Amsterdam (2007).
- [18] S. Doplicher and R. Longo. “Standard and split inclusions of von Neumann algebras”. *Invent. Math.* **73**, 493–536 (1984).
- [19] M. Junge, M. Navascués, C. Palazuelos, D. Pérez-García, V. B. Scholz, and R. F. Werner. “Connes’ embedding problem and Tsirelson’s problem”. *J. Math. Phys.* **52**, 012102 (2011). [arXiv:1008.1142](#).
- [20] Costantino Budroni, Adán Cabello, Otfried Gühne, Matthias Kleinmann, and Jan-Åke Larsson. “Kochen-Specker contextuality”. *Rev. Mod. Phys.* **94**, 045007 (2022). [arXiv:2102.13036](#).
- [21] Kenneth J. Dykema and Vern Paulsen. “Synchronous correlation matrices and Connes’ embedding conjecture”. *J. Math. Phys.* **57**, 015214 (2016). [arXiv:1503.07207](#).
- [22] V. B. Scholz and R. F. Werner. “Tsirelson’s problem” (2008). [arXiv:0812.4305](#).
- [23] Boris Tsirelson. “Bell inequalities and operator algebras”. See <https://math.huji.ac.il/~ohadfeld/Tsirelson/download/bellopalg.pdf>.
- [24] T. Fritz. “Tsirelson’s problem and Kirchberg’s conjecture”. *Rev. Math. Phys.* **24**, 1250012 (2012). [arXiv:1008.1168](#).
- [25] Andrea Coladangelo and Jalex Stark. “An inherently infinite-dimensional quantum correlation”. *Nat. Commun.* **11**, 3335 (2020).
- [26] Ken Dykema, Vern I. Paulsen, and Jitendra Prakash. “Non-closure of the set of quantum correlations via graphs”. *Comm. Math. Phys.* **365**, 1125–1142 (2019). [arXiv:1709.05032](#).
- [27] Magdalena Musat and Mikael Rørdam. “Non-closure of quantum correlation matrices and factorizable channels that require infinite dimensional ancilla”. *Comm. Math. Phys.* **375**, 1761–1776 (2020). [arXiv:1806.10242](#).
- [28] L. Borsten, I. Jubb, and G. Kells. “Impossible

- measurements revisited”. *Phys. Rev. D* **104**, 025012 (2021). [arXiv:1912.06141](#).
- [29] Brian C. Hall. “Quantum theory for mathematicians”. *Number 267 in Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York. (2013).
- [30] Yelena Guryanova, Nicolai Friis, and Marcus Huber. “Ideal projective measurements have infinite resource costs”. *Quantum* **4**, 222 (2020). [arXiv:1805.11899](#).
- [31] Marcelo França Santos. “Universal and deterministic manipulation of the quantum state of harmonic oscillators: A route to unitary gates for Fock state qubits”. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010504 (2005). [arXiv:quant-ph/0411078](#).
- [32] Marcelo França Santos. “Arbitrary unitary operations in confined harmonic oscillators”. In *Conference on Coherence and Quantum Optics*. *Page CMI32*. Optica Publishing Group (2007).
- [33] Károly F. Pál and Tamás Vértesi. “Maximal violation of a bipartite three-setting, two-outcome Bell inequality using infinite-dimensional quantum systems”. *Phys. Rev. A* **82**, 022116 (2010). [arXiv:1006.3032](#).
- [34] Miguel Navascués, Stefano Pironio, and Antonio Acín. “Bounding the set of quantum correlations”. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 010401 (2007). [arXiv:quant-ph/0607119](#).
- [35] Miguel Navascués, Stefano Pironio, and Antonio Acín. “A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations”. *New J. Phys.* **10**, 073013 (2008). [arXiv:0803.4290](#).