Cop-Width, Flip-Width 和强着色数

Robert Hickingbotham*

19th April 2025

Abstract

Cop-width 和 flip-width 是 Toruczyk（2023）引入的新图参数家族，它们推广了树宽、退化度、广义着色数、clique-width 和 twin-width。在这篇论文中，我们通过强着色数来限定一个图的 cop-width 和 flip-width。特别是，我们证明对于每一个 $r \in \mathbb{N}$，每个图 G 都有 $\text{copwidth}_r(G) \leqslant \text{scol}_{4r}(G)$。这意味着具有线性强着色数的所有图类都具有线性的 cop-width 和线性的 flip-width。我们利用这一结果来推导各种稀疏图类的 cop-width 和 flip-width 的改进界限。

1 介绍

Kierstead and Yang [23] 引入了以下定义 [1]。对于图 G，一个全序 $\preceq$ 的 $V(G)$，一个顶点 $v \in V(G)$，和一个整数 $r \geqslant 1$，令 $R(G, \preceq, v, r)$ 为满足存在长度为 $r' \in [0, r]$ 的路径 $(v = w_0, w_1, \dots, w_{r'} = w)$ 的顶点 $w \in V(G)$ 的集合，使得对于所有 $i \in [r'-1]$ 都有 $w \preceq v$ 和 $v \prec w_i$，并令 $Q(G, \preceq, v, r)$ 为满足存在长度为 $r' \in [0, r]$ 的路径 $v = w_0, w_1, \dots, w_{r'} = w$ 的顶点 $w \in V(G)$ 的集合，使得对于所有 $i \in [r'-1]$ 都有 $w \preceq v$ 和 $w \prec w_i$。对于图 G 和整数 $r \geqslant 1$，*r-强着色数的 G,$\text{scol}_r(G)$,* 是满足以下条件的最小整数：存在一个总序 $\preceq$ 在 $V(G)$ 上，使得对于 G 的每个顶点 v 都有 $|R(G, \preceq, v, r)| \leqslant \text{scol}_r(G)$。类似地，*$r$-弱着色数为 G,$\text{wcol}_r(G)$,* 是最小的整数，使得存在一个总排序 $\preceq$ 的 $V(G)$ 具有对于 G 的每个顶点 v 的 $|Q(G, \preceq, v, r)| \leqslant \text{wcol}_r(G)$。广义着色数提供了几个感兴趣图参数的上界。首先注意，$\text{scol}_1(G) = \text{wcol}_1(G)$ 等于 G 的简并度加 1，这意味着 $\chi(G) \leqslant \text{scol}_1(G)$。一个适当的

*School of Mathematics, Monash University, Melbourne, Australia (`robert.hickingbotham@monash.edu`). Research supported by an Australian Government Research Training Program Scholarship.

[1]我们考虑简单、有限、无向图 G，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。参见 [5] 获取此处未给出的图论定义。设 $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$。对于整数 a, b，其中 $a \leqslant b$，令 $[a, b] := \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$，且对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $[n] := [1, n]$。A *图类* 是一组在同构下封闭的图。对于图 G 和一个顶点 $v \in V(G)$，令 $N_G(v) := \{w \in V(G) \colon vw \in E(G)\}$。

图着色是无环的 ，如果任意两个颜色类的并集诱导出一个森林；也就是说，每个环都被分配了至少三种颜色。对于图 G，无环着色数为 G,$\chi_a(G)$, 是最小整数 k，使得 G 具有一个无环的 k-着色。Kierstead and Yang [23] 证明了对于每个图 G 都有 $\chi_{\rm a}(G) \leqslant \operatorname{scol}_2(G)$。其他可以通过强弱着色数来限定的参数包括游戏色数 [22, 23]、拉姆齐数 [4]、定向色数 [24]、排列性 [4]、盒子度数 [15]、奇色数 [19] 和无冲突色数 [19]。强着色数的另一个吸引人之处在于它们介于退化度和树宽之间 [2]。如前所述，$\operatorname{scol}_1(G)$ 等于 G 的退化度加上 1。在另一个极端，Grohe, Kreutzer, Rabinovich, Siebertz, and Stavropoulos [17] 表明了对于每一个 $r \in \mathbb{N}$ 都有 $\operatorname{scol}_r(G) \leqslant \operatorname{tw}(G)+1$，事实上 $\operatorname{scol}_r(G) \to \operatorname{tw}(G)+1$ 作为 $r \to \infty$。

广义着色数很重要，因为它们表征了有界扩张类 [36] 和无处稠密类 [17]，并且有几个算法应用 [9, 18]。设 G 是一个图，$r \geqslant 0$ 是一个整数。图 H 是 r-浅次要 的 G 如果 H 可以通过收缩 G 的一个子图中的每个半径至多为 r 的不相交子图而得到。设 $G \triangledown r$ 为所有 r-浅 minors 的 G 的集合，设 $\nabla_r(G)$:= $\max\{|E(H)|/|V(H)|\colon H \in G \triangledown r\}$ 。一个遗传图类 $\mathcal{G}$ 具有有界扩张 ，如果扩展函数 $f_{\mathcal{G}} : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ 对于每一个 $\nabla_r(G) \leqslant f_{\mathcal{G}}(r)$ 和图 $r \geqslant 0 G \in \mathcal{G}$。有界扩张是稀疏性的一个稳健度量，具有许多特征 [25, 26, 36]。例如，Zhu [36] 表明，遗传图类 $\mathcal{G}$ 具有有界扩张，如果存在一个函数 f 使得 $\operatorname{scol}_r(G) \leqslant f(r)$ 对于每一个 $r \geqslant 1$ 和图 $G \in \mathcal{G}$ 成立。具有有限扩展的图类示例包括最大度数有界的类 [26]，栈数有界的类 [27]，队列数有界的类 [27]，非重复色数有界的类 [27]，强亚线性分离器 [11]，以及适当的子图闭合图类 [26]。有关有限扩展的更多背景，请参阅 Nešetřil and Ossona de Mendez [25] 的书籍。

鉴于广义着色数的丰富性，已经有人试图将这些参数扩展到稠密图的设置中。在最近的一项突破中，Toruńczyk [32] 引入了捕警宽度和翻转宽度，这是两类新的图参数家族，它们概括了树宽、退化度、广义着色数、团宽和双宽度。它们的定义受到了 Seymour and Thomas [31] 提出的“警察抓小偷”游戏的启发。

强盗站在图的一个顶点上，可以随时沿着图的路径以极快的速度跑到任何其他顶点。然而，他不得从一名警官身旁跑过。有 k 名警官，他们中的任何一个在任何时候要么站在一个顶点上，要么在直升机中（也就是说，暂时离开了游戏）。控制警官移动的玩家的目标是通过直升机将警官降落在强盗所占有的顶点上，而强盗的目标则是逃脱被捕。（直升机的作用在于，警官们不必沿着图的路径移动——他们可以从一个顶点随意移动到另一个顶点。）强盗可以看到直升机朝其着陆地点接近，并可以在直升机实际降落之前跑到一个新的顶点。[31].

Seymour and Thomas [31] 表明在图 G 上赢得这个游戏所需的最少警官数量实际上等于 $\operatorname{tw}(G)+1$，从而给出了一个关于树宽的极小极大定理。Toruńczyk [32] 引入了该游戏的以下参数化版本：对于某个固定的 $r \in \mathbb{N}$，强盗以速度 r 行动。因此，在每一回合中，警官们在直升机上飞往他们的新位置（他们也可以选择留在原地），这些位置对强盗来说

[2]图 G 的一个树分解 是一个集合 $\mathcal{W} = (B_x : x \in V(T))$，由树 T 的节点索引的 $V(G)$ 的子集组成，使得 (i) 对于每条边 $vw \in E(G)$，存在一个节点 $x \in V(T)$ 满足 $v, w \in B_x$；并且 (ii) 对于每个顶点 $v \in V(G)$，集合 $\{x \in V(T) \colon v \in B_x\}$ 诱导 T 的一个（连通的）子树。宽度 的 $\mathcal{W}$ 是 $\max\{|B_x| \colon x \in V(T)\} - 1$。图 G 的树宽 $\operatorname{tw}(G)$ 是树分解 G 的最小宽度。

是已知的，在直升机降落之前，强盗可以穿过一条长度不超过 r 的路径，这条路径不经过仍停留在地面的警官。此变体称为*半宽度游戏，半径为 r，宽度为 k*，如果有 k 名警官，而抢劫者可以以速度 r 逃跑。对于一个图 G，*半径-r 共轭宽度的 G,$\mathrm{copwidth}_r(G)$,* 是使得警察在半径为 r 和宽度为 k 的图 G 上进行的警察宽度游戏中有获胜策略的最小数 $k \in \mathbb{N}$。

称一类图 $\mathcal{G}$ 满足*有界紧致宽度* 如果存在一个函数 f，使得对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和图 $G \in \mathcal{G}$，有 $\mathrm{copwidth}_r(G) \leqslant f(r)$。Toruńczyk [32] 表明有界 cop-宽度与有界扩展相吻合。

定理 1 ([32])**.** *一类图具有有界扩张当且仅当它具有有界抓捕宽度。*

因此，只有稀疏图类的追捕宽度是有界的。翻转宽度随后被定义为追捕宽度的一个稠密类比。在这里，警察能力增强，允许他们在图的顶点子集上进行翻转操作，目的是将小偷孤立。对于一个固定的图 G，在一对顶点集合 $A, B \subseteq V(G)$ 之间应用一次翻转操作，结果得到的图是从 G 出发，通过反转任意一对顶点 a, b 与 $a \in A$ 和 $b \in B$ 之间的邻接关系而获得的。如果 G 是一个图，并且 $\mathcal{P}$ 是 $V(G)$ 的一个划分，那么称图 G' 为 G 的一个*$\mathcal{P}$-翻转*，如果 G' 可以通过执行成对部分 $A, B \in \mathcal{P}$ 之间的翻转序列（可能带有 $A = B$）从 G 获得。最后，如果 G' 是 G 的一个 $\mathcal{P}$-翻转，则称 G' 为 *k-翻转* 的一个 G，对于某个分割 $\mathcal{P}$ 为 $V(G)$ 并且具有 $|\mathcal{P}| \leqslant k$。

翻转宽度游戏，半径为 $r \in \mathbb{N}$，宽度为 $k \in \mathbb{N}$ 是在一个图 G 上由两个玩家，翻转者和追逐者进行的游戏。初始时，$G_0 = G$ 和 x_0 是由追逐者选择的 G 的顶点。在每一回合 $i \geqslant 1$ 中，翻转者宣布一个新的 k-翻转 G_i 的 G。跑步者，在知道 G_i 的情况下，通过从 x_{i-1} 到 x_i 长度不超过 r 的路径移动到新顶点 x_i，在之前的图 G_{i-1} 中。游戏在 x_i 成为 G_i 中的孤立顶点时结束。对于固定的 $r \in \mathbb{N}$，*半径-r 翻转宽度的图 G，$\mathrm{flipwidth}_r(G)$* 是最小的数 $k \in \mathbb{N}$，使得翻转者在半径为 r 且宽度为 k 的翻转宽度游戏中，在 G 上有获胜策略。

与 cop 宽度不同，flip 宽度在稠密图上表现良好。例如，人们很容易观察到对于所有的 $r \in \mathbb{N}$，完整图的半径-$r$flip 宽度等于 1。此外，为了展示 flip 宽度的鲁棒性，Toruńczyk [32] 证明了以下结果。

定理 2 ([32])**.**

- *每个具有有界扩展的图类都有有界的翻转宽度。*
- *每个具有有界双宽度的图类都有有界的翻转宽度。*
- *如果一类图 $\mathcal{G}$ 具有有界翻转宽度，则 $\mathcal{G}$ 的任何一阶解释也具有有界翻转宽度。*
- *存在一个片状多项式算法来逼近给定图 G 的翻转宽度。*

因此，翻转宽度被认为是密集图中广义着色数的一个很好的类比。有关翻转宽度的进一步结果和猜想，请参见 [3, 14, 32]。

结果

在这篇论文中，我们通过图的强大着色数来限定其抓捕宽度。

对于每一个 $r \in \mathbb{N}$，每个图 G 都有 $\operatorname{copwidth}_r(G) \leqslant \operatorname{scol}_{4r}(G)$。

之前，稀疏图的追赶宽度的最佳已知界限是通过其弱着色数来确定的。Toruńczyk [32] 表明对于每个 $r \in \mathbb{N}$，每张图 G 都有

$$\operatorname{copwidth}_r(G) \leqslant \operatorname{wcol}_{2r}(G) + 1.$$

此外，如果 G 排除了 $K_{t,t}$ 作为子图，则 $\operatorname{flipwidth}_r(G) \leqslant (\operatorname{copwidth}_r(G))^t$. 而具有有界强着色数的图类有着有界的弱着色数，但强着色数通常比弱着色数给出更好的界限。事实上，Grohe et al. [17] 和 Dvořák, Pekárek, Ueckerdt, and Yuditsky [12] 都表明存在一类图，其强着色数是多项式的，而弱着色数是指数的。

我们现在展示几个关于 Section 1 的应用。首先，利用已知的有关邻域多样性的结果，我们推导出以下内容。

每个具有线性警官宽度的图类都有线性翻转宽度。因此，每个具有线性强着色数的图类都具有线性抓捕宽度和线性翻转宽度。

其次，Section 1 给出了许多研究广泛的稀疏图的 cop-width 改进界限。如果 H 与可以从 G 的子图通过收缩边得到的某个图同构，则称图 H 是图 G 的一个*次要的* 。图 G 是 *H-不含次级的* 如果 H 不是 G 的子图。范登胡威尔、奥索纳德门德斯、基罗兹、拉比诺维奇和西伯茨 [33] 证明了对于每一个 $r \in \mathbb{N}$, 每个无 K_t-子图的图 G 都有 $\operatorname{scol}_r(G) \leqslant \binom{t-1}{2}(2r+1)$。因此 Section 1 意味着以下内容。

对于所有 $r, t \in \mathbb{N}$，每个不含 K_t-子图的图 G 都有

$$\operatorname{copwidth}_r(G) \leqslant \binom{t-1}{2}(8r+1).$$

由 Section 1 可知，不含 K_t 子图的图也具有线性翻转宽度；具体界限见 Corollary 5。关于这类图的已知最佳界限，van den Heuvel et al. [33] 证明了对于每个 $r \in \mathbb{N}$，每个 K_t-小图 G 都有 $\operatorname{wcol}_r(G) \in O_t(r^t)$。根据前述的 Toruńczyk [32] 结果，K_t-子图自由图 G 的捕获宽度和翻转宽度的最佳已知界限是：

$$\operatorname{copwidth}_r(G) \in O_t(r^{t-1}) \text{ and } \operatorname{flipwidth}_r(G) \in O_t(r^{(t-1)^2}).$$

Section 1 也适用于非小闭图类。对于一个曲面 Σ，我们说图 G 是 *(Σ, k)-平面的* 如果 G 在 Σ 上有一个画法使得 G 的每条边最多涉及 k 次交叉。一个图是 *(g, k)-平面的* 如果它对于某个具有欧拉亏格至多为 g 的曲面 Σ 是 (Σ, k)-平面的。这类图被广泛研究 [6–8, 28]，是非极小闭图类的一个经典稀疏例子。

范登海威尔和伍德 [34, 35] 证明了对于每一个 $r \in \mathbb{N}$, 每个 (g, k)-平面图 G 都有 $\operatorname{scol}_r(G) \leqslant (4g+6)(k+1)(2r+1)$。所以 Section 1 意味着以下内容。

定理 3. 对于所有 $g, k, r \in \mathbb{N}$，每个 (g, k)-平面图 G 都有

$$\operatorname{copwidth}_r(G) \leqslant (4g+6)(k+1)(8r+1).$$

参见 [10, 20, 33, 34] 以了解其他 Section 1 适用的图类。

2 证明

我们现在证明我们的主要定理。

*

Proof. 令 $n := |V(G)| - 1$ 且令 $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ 为 $V(G)$ 的一个全序 $\preceq$，其中对于每一个 $v \in V(G)$ 都有 $|R(G, \preceq, v, 4r)| \leqslant \mathrm{scol}_{4r}(G)$。对于每一个 $s \in \mathbb{N}$ 和 $v_i, v_j \in V(G)$ 其中 $i \leqslant j$，令 $M(v_i, v_j, s)$ 是那些存在长度为 $s' \in [0, s]$ 的路径 $v_j = w_0, w_1, \dots, w_{s'} = w$ 的顶点 $w \in V(G)$ 的集合，使得对于所有 $\ell \in [s'-1]$ 都有 $w \preceq v_i$ 和 $v_i \prec w_\ell$。**声明：** 对于所有 $v_i, v_j \in V(G)$，其中 $i \leqslant j$，$|M(v_i, v_j, 2r)| \leqslant \mathrm{scol}_{4r}(G)$。

Proof. 令 $k \in [i, j]$ 为最小值，使得 $v_k \in Q(G, \preceq, v_j, 2r)$。所以 G 包含一个长度为 $r' \in [0, 2r]$ 的路径 $P = (v_j = u_0, \dots, u_{r'} = v_k)$，使得对于所有 $\ell \in [r'-1]$ 都有 $v_k \prec u_\ell$。我们声称 $M(v_i, v_j, 2r) \subseteq R(G, \preceq, v_k, 4r)$。设 $w \in M(v_i, v_j, 2r)$。那么存在一条长度为 $s' \in [0, 2r]$ 的路径 $P' = (v_j = w_0, \dots, w_{s'} = w)$，使得对于所有 $\ell \in [s'-1]$ 都有 $w \preceq v_i$ 和 $v_i \prec w_\ell$。假设存在一个 $\ell \in [s'-1]$ 使得 $w_\ell \prec v_k$。选择 ℓ 为最小值。那么 $w_\ell \in Q(G, \preceq, v_j, 2r)$，因为每个 $a \in [0, \ell-1]$ 都有 $w_\ell \prec v_k \preceq w_a$，这与 k 的选择相矛盾。所以对于所有的 $\ell \in [s'-1]$，$v_k \preceq w_\ell$。通过取 P 和 P' 的并集，可以得出 G 包含一个长度至多为 $4r$ 的 (v_k, w)-路径 W，使得对于所有 $u \in V(W) \setminus \{v_k, w\}$ 均有 $v_k \prec u$。因此 $w \in R(G, \preceq, v_k, 4r)$ 和如此 $|M(v_i, v_j, 2r)| \leqslant |R(G, \preceq, v_k, 4r)| \leqslant \mathrm{scol}_{4r}(G)$. □

对于每个回合 $i \geqslant 0$，直到抓住劫匪，我们将定义一个元组 $(v_i, x_i, C_i, D_i, V_i, P_i)$，其中：

(1) $x_i \in V(G)$ 是第 i 轮结束时抢劫者的所在位置；
(2) $C_0 := \{v_0\}$ 并且 $C_i := M(v_i, x_{i-1}, 2r)$ 是警察在第 i 轮结束时所在的顶点集合，对于每个 $i \geqslant 1$；
(3) $D_0 := \varnothing$ 并且 $D_i := C_{i-1} \cap C_i$ 是每个 $i \geqslant 1$ 在整个第 i 轮中警官保持不动的顶点集合；
(4) $V_i := \{v_0, \dots, v_i\}$ 其中 v_i 由总序 $\preceq$ 定义，该总序属于 $V(G)$；并且
(5) $P_0 := \varnothing$ 并且 P_i 是抢劫者在第 i 轮中经过的长度不超过 r 的 (x_{i-1}, x_i)-路径，对于每个 $i \geqslant 1$。

请注意，我们需要 $v_i \preceq x_{i-1}$ 以使 $M(v_i, x_{i-1}, 2r)$ 被良好定义。我们将通过归纳地维持每轮 $i \geqslant 0$ 的以下不变量来证明该元组确实被良好定义：

(6) $v_i \preceq x_i$;
(7) 如果 $i \geqslant 1$，从 x_{i-1} 到 V_{i-1} 中顶点长度不超过 r 的 G 中的每条路径都包含来自 D_i 的一个顶点；

(8) $M(v_i, x_i, r) \subseteq C_i$;
(9) 如果 $i \geqslant 1$，则 $V(P_i) \cap V_{i-1} = \varnothing$; 并且
(10) 如果 $v_i = x_i$，则抓到了强盗。

结合之前的声明，(2), (6) and (10) 意味着在 n 轮内使用最多 $\mathrm{scol}_{4r}(G)$ 名警官抓住了逃犯。初始化捕快和强盗游戏，将强盗置于顶点 x_0 上，在 $V(G)$ 中，一个捕快在 v_0 处，其余的捕快都在直升机上。根据 (1) to (5) 定义元组 $(v_0, x_0, C_0, D_0, V_0, P_0)$。显然这样的元组是明确定义的。此外，很容易看出该元组满足 (6) to (10)。

现在假设我们在第 $i \geqslant 1$ 轮，强盗还没有被抓到。通过归纳法，我们可以假设存在一个元组 $(v_{i-1}, x_{i-1}, C_{i-1}, D_{i-1}, V_{i-1}, P_{i-1})$ 对于第 $i-1$ 轮满足 (1) to (10)。由于强盗还没有被抓到，(6) and (10) 意味着 $v_{i-1} \prec x_{i-1}$，因此 $v_i \preceq x_{i-1}$。因此，存在一个良定义的元组 $(v_i, x_i, C_i, D_i, V_i, P_i)$，它满足 (1) to (5)。我们现在证明 $(v_i, x_i, C_i, D_i, V_i, P_i)$ 满足额外的不变量。

我们首先验证 (7)。设 $F_i := M(v_{i-1}, x_{i-1}, r)$。设 $u \in V_{i-1}$ 并假设存在一条路径 $P^\star = (x_{i-1} = w_0, w_1, \ldots, w_{r'} = u)$ 在 G 中，其中 $r' \in [0, r]$。考虑最小的 $j \in [r']$ 使得 $w_j \in V_{i-1}$。由于 $\{w_1, \ldots, w_{j-1}\} \cap V_{i-1} = \varnothing$，可知 $w_j \in F_i$。因此，对于每一个 $u \in V_{i-1}$，G 中的每个长度不超过 r 的 (x_{i-1}, u) 路径都包含来自 F_i 的一个顶点。由 (2) 和 (8)（来自 $i-1$ 情况），可以得出 $F_i \subseteq C_{i-1} \cap C_i$。因此，(7) 跟随自 (3)。现在由于抢劫者不允许穿过静止的警察，(9) 跟随自 (3), (5) and (7)。属性 (6) 立即从 (9) 得出，因为 $x_i \in V(P_i)$。现在考虑一个顶点 $y \in M(v_i, x_i, r)$。然后 G 包含一个长度为 $r' \in [0, r]$ 的路径 $P' = (x_i = w_0, w_1, \ldots, w_{r'} = y)$，使得对于所有 $j \in [r'-1]$ 都有 $v_i \preceq w_j$。通过取 P' 和 P_i 的并集，可以得出 G 包含一个长度不超过 $2r$ 的 (x_{i-1}, y)-路径 W。此外，由 (7) 和 P' 的定义可知，$v_i \preceq z$ 对所有 $z \in V(W) \setminus \{x_{i-1}, y\}$ 成立。因此 $y \in M(v_i, x_{i-1}, 2r)$，从而 (2) 推出 (8)。最后，如果 $v_i = x_i$，则 (8) 推出 $x_i \in C_i$，因此 (10) 由 (1) and (2) 得出，如所需。 □

为了证明 Section 1，我们利用关于邻域多样性已知的结果。邻域多样性是一个被广泛研究的概念，并且有各种应用 [1, 2, 13, 16, 21, 29, 30]。设 G 是一个图。对于集合 $S \subseteq V(G)$，令 $\pi_G(S) := |\{N_G(v) \cap S \colon v \in V(G) \setminus S\}|$。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\pi_G(k) := \max\{\pi_G(S) \colon S \subseteq V(G), |S| \leqslant k\}$。

引理 4. 对于所有 $k, r \in \mathbb{N}$，每个具有 $\mathrm{copwidth}_r(G) \leqslant k$ 的图 G 都有

$$\mathrm{flipwidth}_r(G) \leqslant \pi_G(k) + k.$$

Proof. 我们声称对于每一个集合 $S \subseteq V(G)$ 其中 $|S| \leqslant k$，存在一个 $(\pi_G(k)+k)$-翻转，该翻转将 S 隔离出来，同时不影响 $G - S$。令 $\mathcal{P}$ 为一个划分，该划分将 $V(G)$ 划分为单元素集合，并根据 $N_G(v) \cap S$ 将 S 中的顶点划分到 $v \in V(G) \setminus S$ 中。然后 $|\mathcal{P}| \leqslant \pi_G(k) + k$。此外，每个顶点 $s \in S$ 都可以通过翻转 $\{s\}$ 和 $\mathcal{P}$ 的每一个部分与 $\{s\}$ 完全隔离。因此，在半径为 r 且宽度为 k 的警官宽度游戏中，警官获胜策略可以转化为在半径为 r 且宽度为 $\pi_G(k) + k$ 的翻转宽度图中翻转者的获胜策略，如所需。 □

Reidl et al. [30] 表明对于每一个具有有界扩张的图类 $\mathcal{G}$，存在 $c > 0$，使得 $\pi_G(k) \leqslant ck$ 对于每一个 $G \in \mathcal{G}$ 成立。由于具有线性 cop 宽度的图类具有有界扩张，Lemma 4 暗含 Section 1。作为一个具体示例，Bonnet et al. [2] 表明对于每个无 K_t 子图的图 G 和每一个集合 $A \subseteq V(G)$，

$$\pi_G(A) \leqslant 3^{2t/3+o(t)}|A| + 1.$$

因此 Section 1 and Lemma 4 暗示了以下内容。

推论 5. 对于所有 $r, t \in \mathbb{N}$，每个不含 K_t 子图的图 G 都有

$$\operatorname{flipwidth}_r(G) \leqslant 3^{(2t/3+o(t))} t^2 r.$$

致谢

这项工作始于 2023 年 2 月在贝尔尔斯研究所举行的第十届几何与图论年度研讨会上。感谢 Rose McCarty 介绍了 flip-width，并感谢 David Wood 的有益讨论。

References

[1] Édouard Bonnet, Florent Foucaud, Tuomo Lehtilä, and Aline Parreau. Neighbourhood complexity of graphs of bounded twin-width. *European J. Combin.*, 115:Paper No. 103772, 2024.

[2] Édouard Bonnet, O-joung Kwon, and David R. Wood. Reduced bandwidth: a qualitative strengthening of twin-width in minor-closed classes (and beyond). 2022. arXiv:2202.11858.

[3] Yeonsu Chang, Sejin Ko, O-joung Kwon, and Myounghwan Lee. A characterization of graphs of radius-r flip-width at most 2. *Discrete Mathematics*, 348(4):114366, 2025.

[4] Guantao Chen and R. H. Schelp. Graphs with linearly bounded Ramsey numbers. *J. Combin. Theory Ser. B*, 57(1):138–149, 1993.

[5] Reinhard Diestel. Graph theory, vol. 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 5th edn., 2017.

[6] Vida Dujmović, David Eppstein, and David R. Wood. Structure of graphs with locally restricted crossings. *SIAM J. Discrete Math.*, 31(2):805–824, 2017.

[7] Vida Dujmović, Pat Morin, and David R. Wood. Layered separators in minor-closed graph classes with applications. *J. Combin. Theory Ser. B*, 127:111–147, 2017.

[8] Vida Dujmović, Pat Morin, and David R. Wood. Graph product structure for non-minor-closed classes. *J. Combin. Theory Ser. B*, 162:34–67, 2023. arXiv:1907.05168.

[9] Zdeněk Dvořák. Constant-factor approximation of the domination number in sparse graphs. *European J. Combin.*, 34(5):833–840, 2013.

[10] Zdeněk Dvořák, Rose McCarty, and Sergey Norin. Sublinear separators in intersection graphs of convex shapes. *SIAM J. Discrete Math.*, 35(2):1149–1164, 2021.

[11] Zdeněk Dvořák and Sergey Norin. Strongly sublinear separators and polynomial expansion. *SIAM J. Discrete Math.*, 30(2):1095–1101, 2016.

[12] Zdeněk Dvořák, Jakub Pekárek, Torsten Ueckerdt, and Yelena Yuditsky. Weak coloring numbers of intersection graphs. In Xavier Goaoc and Michael Kerber, eds., *Proc. 38th Int'l Symp. on Computat. Geometry (SoCG 2022)*, vol. 224 of *LIPIcs.*, pp. 39:1–39:15. Schloss Dagstuhl, 2022.

[13] Kord Eickmeyer, Archontia C. Giannopoulou, Stephan Kreutzer, O-joung Kwon, Michal Pilipczuk, Roman Rabinovich, and Sebastian Siebertz. Neighborhood complexity and kernelization for nowhere dense classes of graphs. In Ioannis Chatzigiannakis, Piotr Indyk, Fabian Kuhn, and Anca Muscholl, eds., *Proc. 44th Int'l Coll. on Automata, Languages, and Programming (ICALP '17)*, vol. 80 of *Leibniz Int. Proc. Inform.*, pp. 63:1–63:14. Schloss Dagstuhl, 2017.

[14] David Eppstein and Rose McCarty. Geometric graphs with unbounded flip-width. In Denis Pankratov, ed., *Proceedings of the 35th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2023)*, pp. 197–206. 2023.

[15] Louis Esperet and Veit Wiechert. Boxicity, poset dimension, and excluded minors. *Electron. J. Combin.*, 25(4):Paper No. 4.51, 11, 2018.

[16] Jakub Gajarský, Petr Hlinený, Jan Obdrzálek, Sebastian Ordyniak, Felix Reidl, Peter Rossmanith, Fernando Sánchez Villaamil, and Somnath Sikdar. Kernelization using structural parameters on sparse graph classes. *J. Comput. Syst. Sci.*, 84:219–242, 2017.

[17] Martin Grohe, Stephan Kreutzer, Roman Rabinovich, Sebastian Siebertz, and Konstantinos Stavropoulos. Coloring and covering nowhere dense graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 32(4):2467–2481, 2018.

[18] Martin Grohe, Stephan Kreutzer, and Sebastian Siebertz. Deciding first-order properties of nowhere dense graphs. *J. ACM*, 64(3):Art. 17, 32, 2017.

[19] Robert Hickingbotham. Odd colourings, conflict-free colourings and strong colouring numbers. *Australas. J. Combin.*, 87:160–164, 2023.

[20] Robert Hickingbotham and David R. Wood. Shallow Minors, Graph Products, and Beyond-Planar Graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 38(1):1057–1089, 2024.

[21] Gwenaël Joret and Clément Rambaud. Neighborhood complexity of planar graphs. *Combinatorica*, 44:1115–1148, 2024.

[22] Hal A. Kierstead and William T. Trotter. Planar graph coloring with an uncooperative partner. *J. Graph Theory*, 18(6):569–584, 1994.

[23] Hal A. Kierstead and Daqing Yang. Orderings on graphs and game coloring number. *Order*, 20(3):255–264, 2003.

[24] Alexandr V. Kostochka, Eric Sopena, and Xuding Zhu. Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *J. Graph Theory*, 24(4):331–340, 1997.

[25] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Sparsity: graphs, structures, and algorithms, vol. 28. Springer, 2012.

[26] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion. I. Decompositions. *European J. Combin.*, 29(3):760–776, 2008.

[27] Jaroslav Nešetřil, Patrice Ossona de Mendez, and David R. Wood. Characterisations and examples of graph classes with bounded expansion. *European J. Combin.*, 33(3):350–373, 2012.

[28] János Pach and Géza Tóth. Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica*, 17(3):427–439, 1997.

[29] Adam Paszke and Michał Pilipczuk. VC density of set systems definable in tree-like graphs. In Javier Esparza and Daniel Král', eds., *45th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2020)*, vol. 170 of *LIPIcs*, pp. 78:1–78:13. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020.

[30] Felix Reidl, Fernando Sánchez Villaamil, and Konstantinos S. Stavropoulos. Characterising bounded expansion by neighbourhood complexity. *Eur. J. Comb.*, 75:152–168, 2019.

[31] Paul Seymour and Robin Thomas. Graph searching and a min-max theorem for tree-width. *J. Combin. Theory Ser. B*, 58(1):22–33, 1993.

[32] Szymon Toruńczyk. Flip-width: Cops and robber on dense graphs. In *IEEE 64th Annual Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2023*, pp. 663–700. IEEE, 2023.

[33] Jan van den Heuvel, Patrice Ossona de Mendez, Daniel Quiroz, Roman Rabinovich, and Sebastian Siebertz. On the generalised colouring numbers of graphs that exclude a fixed minor. *European J. Combin.*, 66:129–144, 2017.

[34] Jan van den Heuvel and David R. Wood. Improper colourings inspired by Hadwiger's conjecture. 2017. arXiv:1704.06536.

[35] Jan van den Heuvel and David R. Wood. Improper colourings inspired by Hadwiger's conjecture. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 98(1):129–148, 2018. arXiv:1704.06536.

[36] Xuding Zhu. Colouring graphs with bounded generalized colouring number. *Discrete Math.*, 309(18):5562–5568, 2009.