有限温度瞬子的第一性原理

Thomas Steingasser,[1,2,*] Morgane König,[1,†] and David I. Kaiser[1,‡]

[1] *Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA*
[2] *Black Hole Initiative at Harvard University, 20 Garden Street, Cambridge, MA 02138, USA*

(10Dated: 2025 年 4 月 25 日)

我们从基本原理推导出有限温度下的量子隧穿率。隧穿率取决于温度和时间。我们证明了因此相关虚粒子应定义在 Keldysh-Schwinger 路径上，并讨论了熟悉的时间结果如何源自物理时间极大的极限。我们在高、低温极限下识别出了不同的行为，包括背景场的影响。我们构建了一个包含大有限温度效应的一致微扰方案。

介绍。隧道效应是量子现象中最重要的一例之一 [1–6] 。尽管我们对这一过程的理解取得了最近的进步 [7–28] ，它的许多方面仍然难以捉摸，特别是对于非真空态的隧穿，例如，在有限温度下的情况。

基于量子系统在零温极限和经典系统在有限温度下严格导出的跃迁率公式 [29–36]，一个虚假真空在有限温度下的隧道速率 Γ 每单位空间体积 V 长期以来被认为由系统的自由能 F 的虚部给出 [5, 6]

$$\frac{\Gamma}{V} \simeq -2\,\mathrm{Im}(F) = -2\,\mathrm{Im}\left(-T\log\int_{\varphi(0)=\varphi(\beta)}\mathcal{D}\varphi\; e^{-S_E[\varphi]}\right), \quad (1)$$

根据欧几里得作用 $S_E[\varphi]$。在整个文章中，$\beta \equiv T^{-1}$ 表示逆温度。方程 (1) 等同于在欧几里得时间轴上对方程 [3] 的零温结果施加周期性边界条件。

该零温公式在推导此表达式时受到几个概念性问题的困扰，如果要恢复已建立的领先阶结果，则需要进行非平凡的修改 [7–9] 。最重要的是，在等式 (1) 中反弹对路径积分贡献的虚部被其他鞍点的贡献所抵消，这意味着穿隧率消失。虽然可以通过人为限制所谓潜*在变形方法* [8] 的路径积分域来处理这些问题，但这样做唯一的动机是为了恢复科尔曼著名的领先阶结果。这些抵消不依赖于欧几里得时间间隔的大小，因此有限温度的结果继承了这些问题。

该方法的另一个缺点是时间依赖性的作用。人们普遍认为隧穿速率是先验的一个实时依赖的可观测量 [7, 8]。在零温度情况下，欧几里得时间依赖性通过维克旋转产生，而相对于感兴趣系统的自然时间尺度而言，大时间极限导致表观的时间独立性。如何使该过程与公式 (1) 中的

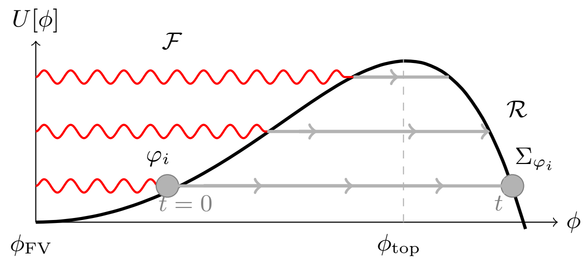

图 1. 系统的能量 U 作为场 ϕ 的泛函。在 $t=0$，系统可以被描述为位于盆地 $\mathcal{F}$ 内的热系综，该盆地通过隧道轨迹在场空间中的局部最大值与 $\mathcal{R}$ 分开。场空间超曲面 Σ_{φ_i} 包含了所有在 $\mathcal{R}$ 中与 φ_i 能量简并的场配置。ϕ_{top} 是熟悉的涡旋子。

有限欧几里得时间间隔（代表系统的温度）保持一致仍然不清楚。

定义隧穿率。为了解答这些问题，我们从第一性原理推导出隧道率 Γ，遵循 Refs. [7, 8] 中的直接方法。Γ 通过系统在其经典可访问区域 $\mathcal{F}$,$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)=\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(0)\cdot e^{-\Gamma t}$ 内的概率变化来定义。这定义了 Γ 为

$$\Gamma = -\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t) = \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(t), \quad (2)$$

，其中 $\mathcal{R}$ 是场空间中 $\mathcal{F}$ 的外部。见图 1。

参照 Ref. [37]，我们通过其密度矩阵 ρ 来描述系统。在场空间的某个区域 Ω 中找到该场的概率由以下给出：

$$\mathcal{P}_{\Omega}(t) = \mathrm{Tr}_{\Omega}\left[\rho\right](t) = \mathcal{N}\int_{\Omega} D\varphi\,\langle\varphi,t|\rho|\varphi,t\rangle. \quad (3)$$

方程 (2) 的右侧可以通过插入两个单位分解重写为：

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{F}} D\varphi_i D\varphi_j \langle\varphi_i|\rho|\varphi_j\rangle \int_{\mathcal{R}} D\varphi_f \langle\varphi_j|\varphi_f,t\rangle\langle\varphi_f,t|\varphi_i\rangle. \quad (4)$$

第一个因子，$\rho_{ij} \equiv \langle\varphi_i|\rho|\varphi_j\rangle$，编码了系统的初始状态。第二个因素 $P_{ji} \equiv \int_{\mathcal{R}} D\varphi_f(...)$ 描述了系统的时态演化。所有没有明确时间标签的状态均定义在 $t=0$。

* tstngssr@mit.edu
† mkonig@mit.edu
‡ dikaiser@mit.edu

评估隧穿率。假设该场的初始状态完全局限于 $\mathcal{F}$ 内，我们通过

$$\langle\varphi_i|\rho|\varphi_j\rangle = \begin{cases}\langle\varphi_i|e^{-\beta H}|\varphi_j\rangle \text{ if } \varphi_i,\varphi_j\in\mathcal{F},\\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases} \tag{5}$$

来描述系统。这种选择明确了一个重要的概念上的微妙之处，影响了任何试图在有限温度系统中定义隧道率的努力。原则上，这样的系统需要用整个福克空间上形式为 $\rho\propto e^{-\beta H}$ 的密度矩阵来描述。然而，这样的状态将是静止的，意味着不会发生隧道效应。相反，方程 (5) 可以被理解为描述了一个理想化的过冷状态。

这种状态的一种可能解释是，它是某个在修改后的势能中已热化状态的残留物，在这个势能中真实真空盆地已被移除，例如通过外部力或有限温度修正。

[1] 真实真空形成后，我们预期初始会出现波动行为，对应于集合内高能量激发的经典传播位于盆地之外，类似于参考文献 [8] 中讨论的零温情况。

鉴于这些瞬态效应在具体系统中的强烈依赖性和波动动力学的复杂性，因此我们将分析限制为隧穿率之后状态已被准备的情况。

我们的分析适用性由选定初始时刻 $t=0$ 时系统状态能被方程 (5) 描述的准确性所控制。

为了评估方程 (4)，我们将密度矩阵重写为

$$\langle\varphi_i|\rho|\varphi_j\rangle = \int\limits_{\mathcal{F}} D\varphi_*\langle\varphi_i|e^{-\beta_1 H}|\varphi_*\rangle\langle\varphi_*|e^{-\beta_2 H}|\varphi_j\rangle \tag{6}$$

$$= \int_{\mathcal{F}} D\varphi_* \int\limits_{\varphi_1(0)=\varphi_i}^{\varphi_1(\beta_1)=\varphi_*}\mathcal{D}\varphi_1\, e^{-S_E[\varphi_1]}\int\limits_{\varphi_2(0)=\varphi_*}^{\varphi_2(\beta_2)=\varphi_j}\mathcal{D}\varphi_2\, e^{-S_E[\varphi_2]} \tag{7}$$

$$\equiv \int_{\mathcal{F}} D\varphi_* E(\varphi_i|\varphi_*,\beta_1)E(\varphi_*,\beta_2|\varphi_j), \tag{8}$$

其中使用了 $\beta=\beta_1+\beta_2$。在最后一行中，我们引入了欧几里得时间传播子 E。

我们还将表示实时演化的矩阵元用传播子的形式重写。利用 $|\varphi_{i,j}\rangle$ 和 $|\varphi_f\rangle$ 分别位于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{R}$ 中的事实，我为了定义 $\bar{D}_F$，我们引入了泛函 $T_{\varphi_k}[\varphi]$，它将任意场 φ 映射到其首次达到包含与 φ_k 具有相同能量的 $\mathcal{R}$ 中所有配

们得到 [7, 8]

$$\begin{aligned}D_F(\varphi_j|\varphi_f,t) &\equiv \langle\varphi_j|\varphi_f,t_f\rangle = \\ &= \int_{\Sigma_{\varphi_j}} D\sigma\int_0^t \mathrm{d}s\ \bar{D}_F(\varphi_j|\sigma,s)D_F(\sigma,s|\varphi_f,t).\end{aligned} \tag{9}$$

置的场空间超曲面 $\Sigma_{\varphi_k}\subset\mathcal{R}$ 的时间。就这个对象而言，$\bar{D}_F$ 被定义为

$$\bar{D}_F(\varphi_i|\sigma,s)\equiv\int\limits_{\varphi(0)=\varphi_i}^{\varphi(s)=\sigma}\mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi]}\delta\left(T_{\varphi_i}[\varphi]-s\right). \tag{10}$$

$T_{\varphi_i}[\varphi]=s$ 是交叉条件。在物理时间远大于势能内运动的自然时间尺度的相关极限下，我们取 $T_{\varphi_*}[\varphi]\simeq T_{\varphi_i}[\varphi]$ 对于所有 $\varphi_i\in\mathcal{F}$。

请注意，我们的分析依赖于在准备了公式 (5) 中的初始状态后没有任何额外的假设。事实上，正如本节开头所指出的，这将对应于没有隧穿的定态密度矩阵。相反，我们仅要求系统处于由公式 (5) 描述的过冷状态下在 $t=0$ 处，并允许系统在此之后完全自由演化。

式 (9) 相当于将时间演化从 φ_i 到 φ_f 分为两部分，一部分连接 φ_i 与 Σ_{φ_i} 中的某个 σ，另一部分则是之后的时间演化。使用相同的表示方法对 $D_F(\varphi_f,t|\varphi_j)$，我们将 P_{ji} 重写为

$$\begin{aligned}P_{ji} = &\int_{\Sigma_{\varphi_*}} D\sigma\int_0^t \mathrm{d}s\int_{\Sigma_{\varphi_*}} D\sigma'\int_0^t \mathrm{d}s'\ \bar{D}_F(\varphi_j|\sigma,s)\bar{D}_F^*(\varphi_i|\sigma',s') \\ &\times\int_{\mathcal{R}} D\varphi_f\, D_F(\sigma,s|\varphi_f,t)D_F(\varphi_f,t|\sigma',s').\end{aligned} \tag{11}$$

遵循 Refs. [7, 8]，我们忽略反隧穿效应，对应于 $\int_{\mathcal{R}} D\varphi_f|\varphi_f\rangle\langle\varphi_f|\simeq 1$。

第 (11) 式的第二行因此计算为 $D_F(\sigma,s|\sigma',s')$。接下来我们将时间积分重写为

$$\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^t \mathrm{d}s' = \int_0^t \mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{d}s' + \int_0^t \mathrm{d}s'\int_0^{s'} \mathrm{d}s. \tag{12}$$

现在我们使用方程 (9) 将方程 (11) 中的传播子与 $\bar{D}_F$ 的两个因子之一重新组合。通过导数消除剩余的时间积分，我们找到

$$\frac{\mathrm{d}P_{ji}}{\mathrm{d}t} = \int_{\Sigma_{\varphi_*}} D\sigma\ \bar{D}_F(\varphi_j|\sigma,t)D_F^*(\sigma,t|\varphi_i) + c.c. \tag{13}$$

由于 ρ_{ij} 是时间独立的，因此 Γ 变为

[1] 这与参考文献 [8] 中给出的假真空状态定义相平行。这些作者认为，由于其静态性质和在真实真空盆地中的广泛支持，假真空不能被视为能量本征态。相反，假真空状态应理解为所谓的共振状态的叠加，在移除真实真空盆地后可以用势能的本征函数来近似。

$$\Gamma = \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)} \int_{\mathcal{F}} D\varphi_* \int_{\Sigma_{\varphi_*}} D\sigma \int_{\mathcal{F}} D\varphi_i \int_{\mathcal{F}} D\varphi_j E(\varphi_i|\varphi_*, \beta_1) E(\varphi_*, \beta_2|\varphi_j) \bar{D}_F(\varphi_j|\sigma, t) D_F(\sigma, t|\varphi_i) + c.c. \tag{14}$$

类似于对最终状态的积分，我们将对 $\varphi_{i,j}$ 的积分近似为 $\int_{\mathcal{F}} D\varphi_{i,j} |\varphi_{i,j}\rangle\langle\varphi_{i,j}| \simeq 1$。对 φ_i 的限制通过将交叉条件扩展到欧几里得时间传播子得以保持。对 $\varphi_{i,j}$ 进行积分使我们能够将公式 (14) 中的每个实时路径积分与其“相邻”的欧几里得时间积分合并。剩下的每个积分都可以通过变形复数时间积分路径来求值，见图 2。

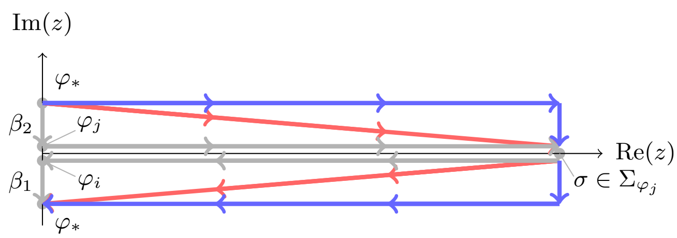

图 2. 灰色：与等式 (14) 相关的轮廓。红色：在对 $\varphi_{i,j}$ 进行积分后，可以将轮廓变形到复平面上。蓝色：沿着该轮廓可以最方便地评估复作用。

对于长时间 t，图 2 中的对角线轮廓相当于通过角度 $\epsilon_{1,2} = \beta_{1,2}/t$ 进行无限小的 Wick 旋转。沿此路径的动力学可以用通常形式的传播子来描述，尽管作用量是相对于新的复时间变量 $z = (1 - i\epsilon)t$ 定义的。这给出了

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)} \int_{\mathcal{F}} D\varphi_* \int_{\Sigma_{\varphi_*}} D\sigma \bar{D}_F^{\epsilon_2}(\varphi_*|\sigma, t) D_F^{\epsilon_1}(\sigma, t|\varphi_*) + c.c. \\
&= \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)} \int_{\mathcal{F}} D\varphi_* \int_{\Sigma_{\varphi_*}} D\sigma \int_{\varphi_1(0)=\varphi_*}^{\varphi_1(t)=\sigma} \mathcal{D}\varphi_1 \; e^{iS_{\epsilon_1}[\varphi_1]} \delta\left(T_\sigma[\varphi_1] - t\right) \\
&\quad \times \left(\int_{\varphi_2(0)=\varphi_*}^{\varphi_2(t)=\sigma} \mathcal{D}\varphi_2 \; e^{iS_{\epsilon_2}[\varphi_2]} \right)^* + c.c.
\end{aligned} \tag{15}$$

所有带有标签 $\epsilon_{1,2}$ 的量都是相对于复时间变量 $z_{1,2} = (1 - i\epsilon_{1,2})t$ 定义的。

稳态子。式 (15) 可以通过驻相近似进行计算。我们将相应的鞍点称为 $\phi_{1,2}$，它们的作用称为 $S_{1,2}$。虽然所有路径积分的边界条件意味着场在初始和最终时刻具有实数值，但运动方程 (终了。) 中的复数因子导致中间时间出现复数解，即所谓的继续前进 [38]。通过将场分解为其实部和虚部，稳态子描述了两个实场的动力学，这两个实场通过受无穷小参数 $\epsilon_{1,2}$ 控制的相互作用联系在一起。对于短时间而言，这意味着场的实部分基本上在其 $\mathcal{F}$ 内进行经典运动，稳定地产生虚部，进而驱动实部的运动，从而使其实部能够达到 $\mathcal{R}$。参见图 3 以获得一个示例。运动方程表明 $\phi_{1,2}$ 是其各自复时间平面上的解析函数。此外，分解的任意性 $\beta = \beta_1 + \beta_2$ 和对 φ_* 的积分表明，这两种解可以合并成一个在欧几里得时间方向上具有 β 周期性的单一函数。参见图 4。

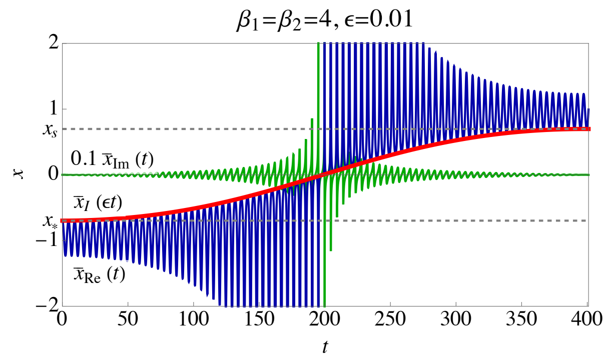

图 3. 一个点粒子在双重势阱中的稳态解，$V(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$。蓝：位置的实部。绿：位置的虚部。红：实部的转折点构成了欧几里得时间瞬子。

归一化因子 $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(t)$ 主要由常数鞍点 ϕ_{FV} 决定（见图 1），导致指数消失。Γ 因此在主要阶为如下形式

$$\begin{aligned}
\Gamma &\simeq A \cdot e^{iS_1 - iS_2^*} + c.c. \\
&= A \cdot e^{-(\mathrm{Im}S_1 + \mathrm{Im}S_2) + i(\mathrm{Re}S_1 - \mathrm{Re}S_2)} + c.c.
\end{aligned} \tag{16}$$

稳态子的运动方程意味着它们投影到平行于实数时间和欧几里得时间轴的轮廓上是关于相应时间变量的运动方程的解。首先，这表明稳态子投射到从 φ_* 开始的实数时间轮廓上的部分描述了该配置的经典实时演化。因此，这些轮廓部分对整体作用量的贡献严格为实数，并且对于上轮廓和下轮廓是相同的，从而使方程 (16) 中的复相位抵消。类似地，稳态子投射到在这些配置上结束的欧几里得时间轮廓上的部分描述了该配置在虚时间中的“经典”运动。与 β-周期性相结合，这意味着将稳态粒子在欧几里得时间轴上的投影，或在 σ 以下与该轴平行的轮廓上的投影，视为欧几里得运动方程的解。这两个解可以被识别为单个 β-周期性瞬子的一部分，如图 4 所示。结合来自积分轮廓的因子 i，总指数因此由 β-周期性瞬子的欧几里

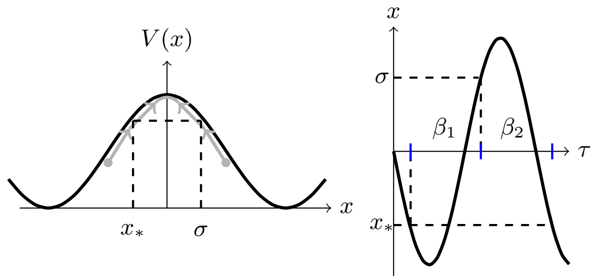

图 4. 周期性欧几里得时间瞬子决定了点粒子在对称双井势 $V(x)$ 中极限 $t\to\infty$ 下的隧穿率。浅灰色箭头表示系统在反转势 $-V(x)$ 内的周期运动。鞍点值 x_* 和 σ，对于解的存在性是必要的，取决于 β 分成 β_1 和 β_2 的划分。

得作用给出。

相应的稳态描述了不所代表的物理过程，因为这种过程的确切时间顺序将取决于选定的复数时间路径。它更是一个形式上的工具来计算方程 (16) 中的总和，该总和继承了个别贡献的结构。将 φ_* 解释为主导隧穿起点的观点与边界条件不一致；在参考文献 [38] 中认为，从本征态出发的隧穿通常由具有初始动量的瞬子主导而非周期性构型。类似地，在有限温度情况下，β-周期性来自于对热系综的求和。在参考文献 [38] 中还指出，使用稳态来描述方程 (16) 中的实时贡献需要对方程进行正则化处理，这相当于对实时路径进行无穷小的威克旋转。见图 5。因此，实际速率由对应于扩展到各种欧几里得时间间隔的过程确定，每个间隔都大于 β。这种正规化的必要性也影响了有限温度稳态，它满足沿任何复数时间路径的交叉条件，除了那些与实时间轴重叠的部分。这些路径是勒夫谢茨花瓶的一个特例，表明我们的分析可以被视为皮卡尔-勒夫谢茨理论 [18–28] 的应用。

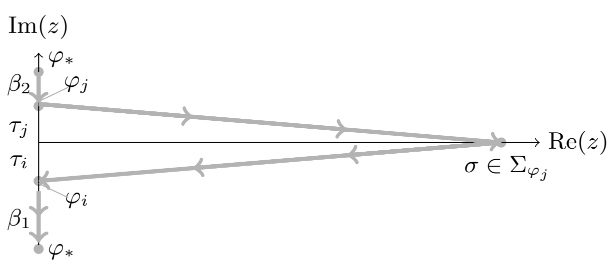

图 5. 凯尔迪什-施温格轮廓代表了等式 (16) 中的一个贡献项。在实时间分支上存在稳态子需要一种正则化，这可以理解为一个无限小的威克旋转，延伸到虚时间区间。

多场模型和有效作用量。在许多应用中，外部自由度通过相互作用影响隧道效应的影响是至关重要的 [39–42]。我们可以通过扩展 $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ 来将它们纳入我们的讨论，即

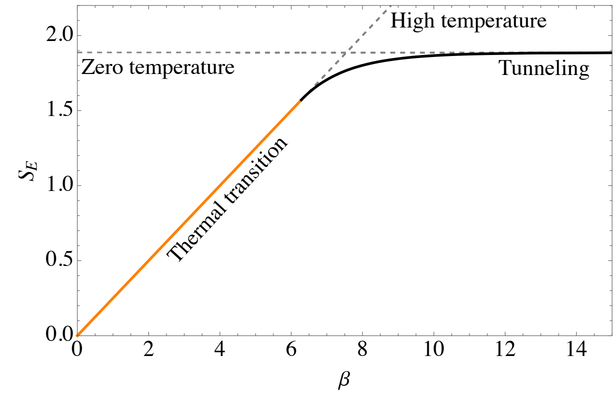

图 6. 欧几里得作用量作为逆温度 β 的函数对于势能 $V(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)^2$。量子隧穿在这些单位中需要 $\beta\gtrsim 6.28$，这对应于倒置势阱最小值周围的振荡器周期。对于较小的 β 值，跃迁完全由热激发决定。

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(t)=\mathcal{N}\int D\chi\int_\mathcal{R} D\varphi\,\langle\varphi,\chi,t|\rho|\varphi,\chi,t\rangle. \tag{17}$$

对于零温度的情况，在 Ref. [8] 中认为正确处理这些额外路径积分的方法是首先使用树级势能求解瞬子，然后再对剩余的场进行积分，使得它们的影响简化为方程 (16) 中的预因子 A 的附加贡献。

循环修正对势可能在有限温度系统中是重要的，例如，通过粒子获得热质量 [42–44]。这表明需要消除外部场之前进行鞍点近似以捕捉这些效应，这意味着将使用一个有效作用量。然而，在文献 [8] 中指出，瞬子背景可能会破坏动量依赖的有效作用量修正的收敛性。用产生瞬子的场 ϕ 表示，这些修正被逐渐更高阶的 m_ϕ^2/m_i^2 所抑制，其中 m_i^2 是被积分并评估在瞬子上的粒子的质量 [39, 40, 42]。因此，虽然场 ϕ 的波动始终需要以其泛函决定因子形式进行评估，任何其他场都可以通过其对有效作用量的贡献来考虑，只要它的（有效）质量大于瞬子 [45] 周围标量场的质量。当这个比值是时空依赖时，在欧几里得作用主要取决于该区域数值的空间区域内，瞬子被局域化，展开由其在这个区域的值控制。如果隧穿只能通过无法被积分掉的粒子（如标量场本身）的环贡献来实现，则这种方法或参考文献 [8] 中建议的策略均不适用。

极限。对于低温，$\beta\to\infty$，我们恢复了熟悉的零温结果。由于高温极限对应于大的占据数，可以预期它会重现经典跃迁率 [29–36]，其中指数在主要阶由欧几里得时间方向上的常数解决定，即色夫拉龙。见图 6。

对于一个点粒子，有限温度瞬子代表了在逆势中的周期运动。对于一般的势能函数，此类运动所需的欧几里得时间从下方被某些 $\Delta\tau_{\min}$ 所限定，该值的量级与势能的时

间尺度典型值相当。当 β 的值更小时，则不存在周期解，仅留下粒子静止在势垒顶部的解。这种配置本身违反了穿越条件，但其无穷小变形仍可作为近似解。

非微扰效应可以影响这一极限。通过移除较重的场并重新求和所谓的环图，可以诱导出与温度相关的势能修正项，包括一个质量项。对于足够高的温度，这些项的大小仅由温度控制。例如，热质量通常具有形式 $m_T^2 = \kappa \cdot T^2$，其中包含了标量场与其背景场耦合的一些组合 κ，但重要的是没有额外的环抑制因子 $(4\pi)^{-2N_{\rm loop}}$。换句话说，理论中的所有相关能量尺度都与温度同阶，直到数值系数 $\mathcal{O}(1)$，这在足够大的耦合情况下成立。这可以理解为粒子的能量由于其与越来越热的背景等离子体耦合而增加，从而抵消了占据数的增加。一个重要的例子是标准模型希格斯场，我们发现系数 κ 在所有高于不稳定性尺度中心值的能标上都位于范围 0.1 – 0.2 内，即 $\mu_I \sim 10^{11}$ GeV [46]。虽然这原则上建立了微扰展开的可能性，但也表明高精度计算应考虑在 κ 的主导阶修正，特别是由于例如可能很大的右手中微子效应可以进一步增强这种效果 [12]。

讨论。我们已经推导出了有限温度系统中隧道率的一个紧凑路径积分表示。其指数可以通过一个驻相近似来确定，该近似主要由一个 β-周期稳态主导。在物理时间趋于无限大的极限下，指数简化为将此稳态投影到长度为 β 的欧几里得时间路径上的瞬子的欧几里得作用。

这个简单的关系解释了隧道率，即先验的这个实时依赖的量，如何可以用一个欧几里得时间量来描述。我们的分析表明，周期瞬子并不不代表热系综中一个主导状态的贡献，而是作为一种形式工具用于对系综求和。此外，我们还分析了背景场对隧道率的影响以及与高温极限和低温极限相关的细微之处。这为在任意温度下的隧道和泡核形成计算建立了一个坚实的基础。

致谢。感谢 Alan H. Guth 在讨论中提供的帮助。TS 的贡献得益于德国研究基金会 (DFG, Deutsche Forschungsgemeinschaft) 的 Walter Benjamin 计划 –512630918。MK 部分得到了 MIT 的 MLK 访问学者项目的资助。本工作的部分内容在麻省理工学院理论物理中心进行，并部分由美国能源部合同号 DE-SC0012567 支持。该项目还部分得到了哈佛大学黑洞倡议的支持，该计划获得了 Gordon 和 Betty Moore 基金会以及 John Templeton 基金会的资助。本文发表的观点为作者个人观点，并不一定反映上述基金会的观点。

[1] I. Y. Kobzarev, L. B. Okun, and M. B. Voloshin, Bubbles in Metastable Vacuum, Yad. Fiz. **20**, 1229 (1974).

[2] S. R. Coleman, The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory, Phys. Rev. D **15**, 2929 (1977), [Erratum: Phys.Rev.D 16, 1248 (1977)].

[3] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections, Phys. Rev. D **16**, 1762 (1977).

[4] F. Devoto, S. Devoto, L. Di Luzio, and G. Ridolfi, False vacuum decay: an introductory review, J. Phys. G **49**, 103001 (2022), arXiv:2205.03140 [hep-ph].

[5] A. D. Linde, Fate of the False Vacuum at Finite Temperature: Theory and Applications, Phys. Lett. B **100**, 37 (1981).

[6] A. D. Linde, Decay of the False Vacuum at Finite Temperature, Nucl. Phys. B **216**, 421 (1983), [Erratum: Nucl.Phys.B 223, 544 (1983)].

[7] A. Andreassen, D. Farhi, W. Frost, and M. D. Schwartz, Direct Approach to Quantum Tunneling, Phys. Rev. Lett. **117**, 231601 (2016), arXiv:1602.01102 [hep-th].

[8] A. Andreassen, D. Farhi, W. Frost, and M. D. Schwartz, Precision decay rate calculations in quantum field theory, Phys. Rev. D **95**, 085011 (2017), arXiv:1604.06090 [hep-th].

[9] A. Andreassen, W. Frost, and M. D. Schwartz, Scale Invariant Instantons and the Complete Lifetime of the Standard Model, Phys. Rev. D **97**, 056006 (2018), arXiv:1707.08124 [hep-ph].

[10] J. Khoury and T. Steingasser, Gauge hierarchy from electroweak vacuum metastability, Phys. Rev. D **105**, 055031 (2022), arXiv:2108.09315 [hep-ph].

[11] T. Steingasser, *New perspectives on solitons and instantons in the Standard Model and beyond*, Ph.D. thesis, Munich U. (2022).

[12] G. Chauhan and T. Steingasser, Gravity-improved metastability bounds for the Type-I seesaw mechanism, JHEP **09**, 151, arXiv:2304.08542 [hep-ph].

[13] J. R. Espinosa, A Fresh Look at the Calculation of Tunneling Actions, JCAP **07**, 036, arXiv:1805.03680 [hep-th].

[14] J. R. Espinosa, Fresh look at the calculation of tunneling actions including gravitational effects, Phys. Rev. D **100**, 104007 (2019), arXiv:1808.00420 [hep-th].

[15] J. R. Espinosa and T. Konstandin, A Fresh Look at the Calculation of Tunneling Actions in Multi-Field Potentials, JCAP **01**, 051, arXiv:1811.09185 [hep-th].

[16] J. R. Espinosa, Tunneling without Bounce, Phys. Rev. D

100, 105002 (2019), arXiv:1908.01730 [hep-th].

[17] J. R. Espinosa, R. Jinno, and T. Konstandin, Tunneling potential actions from canonical transformations, JCAP **02**, 021, arXiv:2209.03293 [hep-th].

[18] E. Witten, Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory, AMS/IP Stud. Adv. Math. **50**, 347 (2011), arXiv:1001.2933 [hep-th].

[19] Y. Tanizaki and T. Koike, Real-time Feynman path integral with Picard–Lefschetz theory and its applications to quantum tunneling, Annals Phys. **351**, 250 (2014), arXiv:1406.2386 [math-ph].

[20] A. Cherman and M. Unsal, Real-Time Feynman Path Integral Realization of Instantons, (2014), arXiv:1408.0012 [hep-th].

[21] G. V. Dunne and M. Ünsal, What is QFT? Resurgent trans-series, Lefschetz thimbles, and new exact saddles, PoS **LATTICE2015**, 010 (2016), arXiv:1511.05977 [hep-lat].

[22] S. F. Bramberger, G. Lavrelashvili, and J.-L. Lehners, Quantum tunneling from paths in complex time, Phys. Rev. D **94**, 064032 (2016), arXiv:1605.02751 [hep-th].

[23] F. Michel, Parametrized Path Approach to Vacuum Decay, Phys. Rev. D **101**, 045021 (2020), arXiv:1911.12765 [quant-ph].

[24] Z.-G. Mou, P. M. Saffin, and A. Tranberg, Quantum tunnelling, real-time dynamics and Picard-Lefschetz thimbles, JHEP **11**, 135, arXiv:1909.02488 [hep-th].

[25] M. P. Hertzberg and M. Yamada, Vacuum Decay in Real Time and Imaginary Time Formalisms, Phys. Rev. D **100**, 016011 (2019), arXiv:1904.08565 [hep-th].

[26] W.-Y. Ai, B. Garbrecht, and C. Tamarit, Functional methods for false vacuum decay in real time, JHEP **12**, 095, arXiv:1905.04236 [hep-th].

[27] T. Hayashi, K. Kamada, N. Oshita, and J. Yokoyama, Vacuum decay in the Lorentzian path integral, JCAP **05** (05), 041, arXiv:2112.09284 [hep-th].

[28] J. Nishimura, K. Sakai, and A. Yosprakob, A new picture of quantum tunneling in the real-time path integral from Lefschetz thimble calculations, JHEP **09**, 110, arXiv:2307.11199 [hep-th].

[29] J. S. Langer, Theory of the condensation point, Annals Phys. **41**, 108 (1967).

[30] J. S. Langer, Statistical theory of the decay of metastable states, Annals Phys. **54**, 258 (1969).

[31] A. Bochkarev and P. de Forcrand, Nonperturbative evaluation of the diffusion rate in field theory at high temperatures, Phys. Rev. D **47**, 3476 (1993), arXiv:hep-lat/9210027.

[32] D. Boyanovsky and C. Aragao de Carvalho, Real time analysis of thermal activation via sphaleron transitions, Phys. Rev. D **48**, 5850 (1993), arXiv:hep-ph/9306238.

[33] M. Garny and T. Konstandin, On the gauge dependence of vacuum transitions at finite temperature, JHEP **07**, 189, arXiv:1205.3392 [hep-ph].

[34] A. Ekstedt, Bubble nucleation to all orders, JHEP **08**, 115, arXiv:2201.07331 [hep-ph].

[35] J. Hirvonen, J. Löfgren, M. J. Ramsey-Musolf, P. Schicho, and T. V. I. Tenkanen, Computing the gauge-invariant bubble nucleation rate in finite temperature effective field theory, JHEP **07**, 135, arXiv:2112.08912 [hep-ph].

[36] J. Löfgren, M. J. Ramsey-Musolf, P. Schicho, and T. V. I. Tenkanen, Nucleation at Finite Temperature: A Gauge-Invariant Perturbative Framework, Phys. Rev. Lett. **130**, 251801 (2023), arXiv:2112.05472 [hep-ph].

[37] A. Shkerin and S. Sibiryakov, Black hole induced false vacuum decay from first principles, JHEP **11**, 197, arXiv:2105.09331 [hep-th].

[38] T. Steingasser and D. I. Kaiser, Quantum tunneling from excited states: Recovering imaginary-time instantons from a real-time analysis, (2024), arXiv:2402.00099 [hep-th].

[39] I. G. Moss, D. J. Toms, and W. A. Wright, The Effective Action at Finite Temperature, Phys. Rev. D **46**, 1671 (1992).

[40] D. Bodeker, W. Buchmuller, Z. Fodor, and T. Helbig, Aspects of the cosmological electroweak phase transition, Nucl. Phys. B **423**, 171 (1994), arXiv:hep-ph/9311346.

[41] M. Quiros, Field theory at finite temperature and phase transitions, Helv. Phys. Acta **67**, 451 (1994).

[42] A. Salvio, A. Strumia, N. Tetradis, and A. Urbano, On gravitational and thermal corrections to vacuum decay, JHEP **09**, 054, arXiv:1608.02555 [hep-ph].

[43] M. E. Carrington, The Effective potential at finite temperature in the Standard Model, Phys. Rev. D **45**, 2933 (1992).

[44] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and M. E. Shaposhnikov, Generic rules for high temperature dimensional reduction and their application to the standard model, Nucl. Phys. B **458**, 90 (1996), arXiv:hep-ph/9508379.

[45] M. Gleiser, G. C. Marques, and R. O. Ramos, On the evaluation of thermal corrections to false vacuum decay rates, Phys. Rev. D **48**, 1571 (1993), arXiv:hep-ph/9304234.

[46] T. Steingasser and D. I. Kaiser, Higgs Criticality beyond the Standard Model, (2023), arXiv:2307.10361 [hep-ph].