基本温度唯一决定超统计的有效性

Sergio Davis[1,2]

[1]Research Center on the Intersection in Plasma Physics, Matter and Complexity (P^2mc), Comisión Chilena de Energía Nuclear, Casilla 188-D, Santiago, Chile

[2]Departamento de Ciencias Físicas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Andres Bello. Sazié 2212, piso 7, 8370136, Santiago, Chile.

E-mail: `sergio.davis@cchen.cl`

Constanza Farías[2]

[2]Departamento de Ciencias Físicas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Andres Bello. Sazié 2212, piso 7, 8370136, Santiago, Chile.

摘要. 超统计理论是玻尔兹曼-吉布斯统计力学的一种推广，它允许温度波动，并从这些波动的分布函数生成非规范系综。最近的一些结果表明超统计并不普遍适用，但任何超统计模型都必须满足所谓的基元逆温度函数 β_F 的几个条件。在这项工作中，我们提供了一组必要且充分的条件，使得一个非平衡稳态模型可以通过超统计来表达，这表明 β_F 本身决定了温度超统计分布的存在。

1. 介绍

非平衡稳态在实际物理系统中经常被观察到，如等离子体 [1–4] 和自引力系统 [5]，以及在复杂的非物理系统中，比如金融市场 [6,7]、社交网络 [8] 和其他系统。

在旨在描述这些非平衡稳态的传统统计力学理论推广中，Tsallis 非广泛统计 [9] 和超统计学 [10,11] 可能是文献中最常见的。特别是，超统计学提供了一种优雅且紧凑的形式主义，其中逆温度 $\beta := 1/(k_B T)$ 是一个具有明确定义的概率密度的随机变量。

尽管超统计可以在与概率理论完全一致的方式下被假设 [12–14] 并可以使用 [15] Jaynes 的最大熵原理 [16]，但它并不兼容每一种可能的非平衡稳态模型。建立超统计的有效范围问题是开放性问题，因此，我们中的部分人 [17] 最近提出了一种非平衡稳态的分类方法，在该方法中，微观状态的概率密度 $\boldsymbol{\Gamma}$ 形式为

$$P(\boldsymbol{\Gamma}|S) = \rho\big(\mathcal{H}(\boldsymbol{\Gamma}); S\big) \tag{1}$$

其中 $\rho(E;S)$ 是一个称为系综函数的非负函数，$\mathcal{H}(\boldsymbol{\Gamma})$ 是系统的哈密顿量。在这个分类中，超统计模型仅占据所有可能稳态模型空间中的某个区域。特别地，这个模型的空间被划分为两个区域，取决于逆温度协方差的符号

$$\mathcal{U} := \left\langle(\delta\beta_F)^2\right\rangle_S - \left\langle{\beta_F}'\right\rangle_S \tag{2}$$

其中 β_F 是定义为

$$\beta_F(E) := -\frac{\partial}{\partial E}\ln\rho(E;S). \tag{3}$$

根据这种分类，当 $\mathcal{U} > 0$ 时，模型是超规范的，而当 $\mathcal{U} < 0$ 时是次正则，正则系综（代表热平衡）对应于 $\mathcal{U} = 0$。超统计模型是超正则的，在这种情况下，$\mathcal{U}$ 与逆温度的方差一致，也就是说，

$$\mathcal{U} = \left\langle(\delta\beta)^2\right\rangle_S \geq 0. \tag{4}$$

在这项工作中，我们提出了一组关于超统计有效性的必要且充分条件，这些条件仅用基本逆温度函数 β_F 及其导数来表达。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们简要介绍了超统计框架，并给出了一些已知的有效条件。接下来，在第 3 节中，我们陈述了本工作的主要结果（其证明见第 Appendix A），而在第 4 节中，我们提供了一些导致计算矩和累积量时捷径的期望恒等式。在第 5 节中，我们提供了应用我们结果的一些具体示例，最后，在第 6 节中，我们以一些总结性的评论结束了讨论。

2. 超统计框架

传统的玻尔兹曼-吉布斯统计力学基于正则系综，其中在温度 T 下观察到微观状态 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的概率（密度）由下式给出

$$P(\boldsymbol{\Gamma}|\beta) = \frac{\exp\big(-\beta\mathcal{H}(\boldsymbol{\Gamma})\big)}{Z(\beta)}, \tag{5}$$

其中 $\beta := 1/(k_B T)$ 是逆温度，$Z(\beta) := \int d\boldsymbol{\Gamma}\exp\big(-\beta\mathcal{H}(\boldsymbol{\Gamma})\big)$ 是配分函数。通常，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是系统相空间中的一个点，例如，对于由 N 个粒子组成的系统，$\boldsymbol{\Gamma} = (\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_N)$ 表示第 i 个粒子的位置为 $\boldsymbol{r}_i$、动量为 $\boldsymbol{p}_i$。

超统计学采用这个典型系综并对其进行扩展，假设逆温度 β 不再是固定的，而是系统的另一个自由度。因此，在 (5) 中的典型分布现在被 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 β 的联合分布所替代，即

$$P(\boldsymbol{\Gamma},\beta|S) = P(\boldsymbol{\Gamma}|\beta,S)P(\beta|S) = P(\beta|S)\frac{\exp\big(-\beta\mathcal{H}(\boldsymbol{\Gamma})\big)}{Z(\beta)}. \tag{6}$$

由于在实际应用中，我们仅对微态 $P(\mathbf{\Gamma}|S)$ 的边缘概率（密度）感兴趣，我们将联合分布关于 β 进行积分，并得到

$$P(\mathbf{\Gamma}|S) = \int_0^\infty d\beta\, P(\beta|S) \frac{\exp\big(-\beta\mathcal{H}(\mathbf{\Gamma})\big)}{Z(\beta)}, \tag{7}$$

这取决于 $P(\beta|S)$ 的函数形式，可能会导致与正则系综截然不同的集合。我们清楚地看到，$P(\mathbf{\Gamma}|S)$ 仅通过哈密顿量 $\mathcal{H}(\mathbf{\Gamma})$ 依赖于 $\mathbf{\Gamma}$，因此我们可以定义一个非负函数 $\rho(E;S)$，称为与 S 相关的系综函数，使得

$$P(\mathbf{\Gamma}|S) = \rho\big(\mathcal{H}(\mathbf{\Gamma});S\big). \tag{8}$$

通过比较 (8) 和 (7)，我们很容易看出

$$\rho(E;S) = \int_0^\infty d\beta\ f(\beta;S)\exp(-\beta E) \tag{9}$$

也就是说，$\rho(E;S)$ 是一个新函数的拉普拉斯变换，

$$f(\beta;S) := \frac{P(\beta|S)}{Z(\beta)}, \tag{10}$$

我们将这个新函数称为超统计权重函数。

经常，超统计的形式是以能量值而不是微观状态来表示的。例如，能量和逆温度的联合概率密度是

$$\begin{aligned} P(E,\beta|S) &= \int d\mathbf{\Gamma} P(E|\mathbf{\Gamma},\beta)P(\mathbf{\Gamma},\beta|S) \\ &= \int d\mathbf{\Gamma}\delta\big(\mathcal{H}(\mathbf{\Gamma})-E\big)P(\mathbf{\Gamma},\beta|S) \\ &= \exp(-\beta E)f(\beta;S)\Omega(E), \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\Omega(E) = \int d\mathbf{\Gamma}\,\delta\big(\mathcal{H}(\mathbf{\Gamma})-E\big)$ 是态密度。类似地，能量的边缘分布由以下给出

$$P(E|S) = \int_0^\infty d\beta P(E,\beta|S) = \int_0^\infty d\beta\exp(-\beta E)f(\beta;S)\Omega(E) = \rho(E;S)\Omega(E). \tag{12}$$

从 (12) 和 (11) 我们可以通过观察到的能量值 E 获得逆温度的概率密度，即

$$P(\beta|E,S) = \frac{P(E,\beta|S)}{P(E|S)} = \frac{\exp(-\beta E)f(\beta;S)}{\rho(E;S)}. \tag{13}$$

这个量将在接下来的章节中成为我们分析的核心。特别是，让我们计算给定 E 下 β 的期望值，即，

$$\langle\beta\rangle_{E,S} = \int_0^\infty d\beta P(\beta|E,S)\beta. \tag{14}$$

将 (13) 替换为 (14)，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left\langle\beta\right\rangle_{E,S} &= \frac{1}{\rho(E;S)}\int_0^\infty d\beta\, f(\beta;S)\exp(-\beta E)\beta \\
&= -\frac{1}{\rho(E;S)}\frac{\partial}{\partial E}\int_0^\infty d\beta\, f(\beta;S)\exp(-\beta E),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

即，

$$
\left\langle\beta\right\rangle_{E,S} = \beta_F(E;S). \tag{16}
$$

超统计有效的两个必要条件已经为人所知，它们涉及 β_F 的符号及其导数 $\beta_F{}'$。首先，由于根据 (16)，β_F 是非负量 β 的期望值，我们有

$$
\beta_F(E;S) \geq 0 \;\; \text{for } E \geq 0. \tag{17}
$$

其次，对 (16) 以

$$
\left\langle\beta\right\rangle_{E,S} = -\frac{1}{\rho(E;S)}\frac{\partial\rho(E;S)}{\partial E} \tag{18}
$$

的形式两边求导，我们得到

$$
\frac{\partial}{\partial E}\left\langle\beta\right\rangle_{E,S} = \frac{1}{\rho(E;S)^2}\left(\frac{\partial\rho(E;S)}{\partial E}\right)^2 - \frac{1}{\rho(E;S)}\frac{\partial^2\rho(E;S)}{\partial E^2} \tag{19}
$$

因此

$$
\beta_F{}'(E;S) = \beta_F(E;S)^2 - \left\langle\beta^2\right\rangle_{E,S} = -\left\langle(\delta\beta)^2\right\rangle_{E,S}, \tag{20}
$$

由于右边的方差是非负的，我们得到不等式

$$
\beta_F{}'(E;S) \leq 0 \;\; \text{for } E \geq 0. \tag{21}
$$

请注意，将 (21) 替换为 (2) 意味着必要条件 $\mathcal{U} \geq 0$。关于是否存在涉及 β_F 的二阶或更高阶导数的进一步必要条件的问题仍然存在。

3. 基本温度决定了超统计模型的类别

在本节中，我们将证明对于一个超统计系统，在给定 E 的情况下，可以仅使用 β_F 及其导数直接计算出所有正矩 β。因此，函数 $\beta_F(E;S)$ 本身决定了 $P(\beta|E,S)$ 在 (13) 中的存在性。为了说明这一点为何正确，我们首先得到第 n 个矩的一般表达式用 $\rho(E;S)$ 表示，

$$
\left\langle\beta^n\right\rangle_{E,S} = \frac{1}{\rho(E;S)}\int_0^\infty d\beta\, f(\beta;S)\exp(-\beta)\beta^n = \frac{(-1)^n}{\rho(E;S)}\frac{\partial^n\rho(E;S)}{\partial E^n} \tag{22}
$$

其中 (16) 是当 $n=1$ 时的特殊情况。现在我们使用 Faà di Bruno 公式计算复合函数的 n 阶导数，

$$\frac{\partial^n}{\partial E^n} f\big(g(E)\big) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\big(g(E)\big) B_{n,k}\big(g'(E), g''(E), g'''(E), \ldots, g^{(n-k+1)}(E)\big) \tag{23}$$

令 $f(z) = \exp(z)$ 和 $g(E) = \ln \rho(E; S)$。这里 $B_{n,k}$ 是部分指数贝尔多项式 [18, 19]，定义为

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}) := \sum \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2} \ldots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}. \tag{24}$$

因为 $f^{(k)}(z) = f(z)$ 对于 $f(z) = \exp(z)$，我们得到

$$\left\langle \beta^n \right\rangle_{E,S} = (-1)^n B_n \left(-\beta_F, -\beta_F{}', -\beta_F{}'', \ldots, -\beta_F{}^{(n-1)}\right), \tag{25}$$

其中 B_n 是第 n 个完全指数贝尔多项式，由

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}), \tag{26}$$

给出，并且由于 $B_{n,k}$ 的性质，我们最终得到

$$\left\langle \beta^n \right\rangle_{E,S} = B_n \left(\beta_F, -\beta_F{}', \beta_F{}'', \ldots, (-1)^{n-1} \beta_F{}^{(n-1)}\right). \tag{27}$$

因此我们看到，β_F 及其导数决定了所有 $P(\beta|E,S)$ 矩的集合，从而固定了分布本身。此外，由于 P(β|E, S) ∝exp$(-\beta E) f(\beta; S)$,，可以得出 $f(\beta; S)$ 也由 β_F 唯一决定。以 (27) 的一个示例来说，$P(\beta|E,S)$ 的前四个矩分别为

$$\left\langle \beta \right\rangle_{E,S} = \beta_F, \tag{28a}$$

$$\left\langle \beta^2 \right\rangle_{E,S} = (\beta_F)^2 - \beta_F{}', \tag{28b}$$

$$\left\langle \beta^3 \right\rangle_{E,S} = (\beta_F)^3 - 3\beta_F \beta_F{}' + \beta_F{}'', \tag{28c}$$

$$\left\langle \beta^4 \right\rangle_{E,S} = (\beta_F)^4 - 6(\beta_F)^2 \beta_F{}' + 3(\beta_F{}')^2 + 4\beta_F \beta_F{}'' - \beta_F{}''', \tag{28d}$$

其中 (28a) 和 (28b) 分别与 (16) 和 (20) 一致。

我们可以通过回忆概率论中累积量的概念来理解 (27) 的含义 [20]。累积量 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots$ 与概率分布的矩类似，但通过累积生成函数 [21] 定义，

$$\ln M_\beta(t; E, S) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \kappa_n(E; S), \tag{29}$$

其中 $M_\beta(t;E,S)$ 是 $P(\beta|E,S)$ 的矩生成函数，进而由

$$M_\beta(t;E,S) := \big\langle \exp(t\beta)\big\rangle_{E,S}. \tag{30}$$

将 (13) 替换为 (30)，我们得到

$$\begin{aligned} M_\beta(t;E,S) &= \int_0^\infty d\beta\; P(\beta|E,S)\exp(t\beta) \\ &= \int_0^\infty d\beta\, \frac{f(\beta;S)\exp\big(-\beta[E-t]\big)}{\rho(E;S)} = \frac{\rho(E-t;S)}{\rho(E;S)} \end{aligned} \tag{31}$$

因此，从 $\ln\rho(E-t;S)$ 在 $t=0$ 处的泰勒展开式中，我们有

$$\begin{aligned} \ln M_\beta(t;E,S) &= \ln\rho(E-t;S) - \ln\rho(E;S) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial E^n}\ln\rho(E;S)\right] - \ln\rho(E;S) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!}\beta_F^{(n-1)}(E;S). \end{aligned} \tag{32}$$

通过逐项比较 (29) 的幂级数，我们可以看到第 n 个累积量由 β_F 的第 $(n-1)$ 阶导数给出。

$$\kappa_n(E;S) = (-1)^{n-1}\beta_F^{(n-1)}(E;S). \tag{33}$$

这些结果，特别是公式 (27) 和 (33)，促使我们提出了关于 n 阶导数 β_F 符号的以下定理，该定理在 Appendix A 中被证明。

定理 1. 稳态模型 S 具有基本逆温度 β_F，当且仅当对于所有整数 $n \geq 0$ 均成立

$$(-1)^n\beta_F^{(n)}(E;S) \geq 0 \tag{34}$$

时，它是一个超统计模型（包括正则情况）。

换句话说，在超统计中，β_F 的所有偶数阶导数必须为正或零，而所有奇数阶导数必须为负或零。条件 (34) 既是超统计有效的必要条件也是充分条件，后者允许我们使用不等式集 (34) 作为超统计模型的替代定义，而不必明确引入逆温度分布。

定理 1 还表明，$P(\beta|E,S)$ 的累积量 $\kappa_n(E;S)$ 全部非负，而 (33) 的进一步结果则由 Marcinkiewicz 定理 [22] 所暗示，该定理指出没有概率分布可以具有超过二次的多项式累积生成函数。这意味着

$$\big|\kappa_n(E;S)\big| > 0 \;\; \text{for } n \geq 3, \tag{35}$$

以及由此从 (33) 得出，

$$\left|\beta_F^{(n)}(E;S)\right| > 0 \ \text{ for } n \geq 2 \tag{36}$$

除非 $\beta_F(E;S)$ 是常数函数（即当我们处于规范系综时）。这一结果告诉我们，一个超统计的 $\beta_F(E;S)$ 必须无限可微，因此不能是 E 中的任何次数的多项式。这一观察导致了定理 1 的一个更强变体。

定理 2. 稳态模型 S 具有基本逆温度 β_F，当且仅当对于所有整数 $n \geq 1$，

$$\beta_F(E;S) \geq 0, \tag{37}$$

和

$$(-1)^n \beta_F^{(n)}(E;S) > 0 \tag{38}$$

成立时，它是一个非正则的超统计模型。

4. 使用递推关系和微分方程的累积量

处理 $P(\beta|E,S)$ 的累积量和矩的一种有时更为简单的方法是使用期望恒等式，特别是被称为涨落耗散定理 [23] 的那个恒等式，它是对于任何函数 $\omega(\beta)$ 成立的恒等式

$$\frac{\partial}{\partial E}\big\langle \omega \big\rangle_{E,S} = \left\langle \omega \frac{\partial}{\partial E} \ln P(\beta|E,S) \right\rangle_{E,S} \tag{39}$$

。根据 (13) 替换 $P(\beta|E,S)$，它简化为

$$\frac{\partial}{\partial E}\big\langle \omega \big\rangle_{E,S} = \big\langle \omega \big\rangle_{E,S} \beta_F(E;S) - \big\langle \beta\omega \big\rangle_{E,S}. \tag{40}$$

在选择 $\omega(\beta) = \beta^n$ 并且整数为 n 的情况下，我们得到了一个关于矩的递推关系式，即

$$\big\langle \beta^{n+1} \big\rangle_{E,S} = \left(\beta_F(E;S) - \frac{\partial}{\partial E}\right) \big\langle \beta^n \big\rangle_{E,S}. \tag{41}$$

我们可以单独使用这个恒等式来计算从 β_F 开始的所有正矩，而无需使用 (27)，或者选择将 $\omega(\beta) = \exp(t\beta)$ 代入 (40)，得到一个关于矩生成函数的微分方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} M_\beta(t;E,S) = \left(\beta_F(E;S) - \frac{\partial}{\partial E}\right) M_\beta(t;E,S). \tag{42}$$

将两边同时除以永不为零的 $M_\beta(t;E,S)$，我们得到了一个更简单的累积生成函数的微分方程，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial E}\right) \ln M_\beta(t;E,S) = \beta_F(E;S). \tag{43}$$

5. 示例

在本节中，我们将探讨定理 1 和 2 的几个应用示例。

5.1. q-规范系综

首先，我们考虑 Tsallis 非广延统计的 q-典范系综，其系综函数是

$$\rho(E;\beta_0,q)=\frac{1}{Z_q(\beta_0)}\Big[1+(q-1)\beta_0 E\Big]_+^{\frac{1}{1-q}}. \tag{44}$$

相应的基本逆温度函数由

$$\beta_F(E;\beta_0,q)=\frac{\beta_0}{1+(q-1)\beta_0 E} \tag{45}$$

给出，并且可以方便地用 β_F 本身来表示 ${\beta_F}'$。

$${\beta_F}'(E;\beta_0,q)=-(q-1){\beta_F}^2(E;\beta_0,q). \tag{46}$$

进一步对 (46) 进行微分，得到 β_F 的高阶导数为

$$(-1)^n{\beta_F}^{(n)}=(q-1)^n(n!)\beta_F(E:\beta_0,q)^{n+1}, \tag{47}$$

因此通过与 (34) 比较，我们看到如果且仅如果 $q\geq 1$，则存在超统计表示。

5.2. 高斯系综

另一方面，对于高斯系综 [24–27] 我们有

$$\rho(E;A,\varepsilon)=\frac{1}{\eta_A(\varepsilon)}\exp\left(-A(E-\varepsilon)^2\right) \tag{48}$$

基本的逆温度

$$\beta_F(E;A,\varepsilon)=2A(E-\varepsilon). \tag{49}$$

这里我们看到 β_F 对于 $E<\varepsilon$ 可以是负的，并且，更重要的是 ${\beta_F}'=2A>0$，因此高斯系综不存在超统计表示，其中包含 $A>0$。此外，在这种情况下 β_F 是一个多项式，因此根据定理 2 排除了超统计。

5.3. 规范系综的一个简单修正

现在考虑具有基本逆温度的模型

$$\beta_F(E;\beta_0)=\beta_0+\frac{1}{E}. \tag{50}$$

其对于 $n\geq 1$ 的 n 阶导数由下式给出

$${\beta_F}^{(n)}(E;\beta_0)=\frac{(-1)^n\ n!}{E^{n+1}}, \tag{51}$$

因此该模型必须有超统计表示。直接使用 (43)，我们得到累积生成函数，

$$\ln M_\beta(t;E,\beta_0)=\beta_0 E+\ln E+C(E-t) \tag{52}$$

其中 $C(z)$ 是一个待定的函数。施加条件 $\ln M_\beta(0;E,\beta_0)=0$，我们有

$$C(z)=-\beta_0 z-\ln z \tag{53}$$

因此，

$$\ln M_\beta(t;E,\beta_0)=\beta_0 t+\ln E-\ln(E-t)=\left(\beta_0+\frac{1}{E}\right)t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{(n-1)!}{E^n} \tag{54}$$

换句话说，

$$\kappa_n(E;\beta_0)=\begin{cases}\beta_0+\dfrac{1}{E} & \text{for } n=1,\\[2mm] \dfrac{(n-1)!}{E^n} & \text{for } n>1,\end{cases} \tag{55}$$

与 (33) 和 (51) 一致。事实上，与 (50) 对应的集成函数是

$$\rho(E;\beta_0)=\frac{\exp(-\beta_0 E)}{\zeta(\beta_0)E}, \tag{56}$$

这是

$$f(\beta;\beta_0)=\frac{\Theta(\beta-\beta_0)}{\zeta(\beta_0)} \tag{57}$$

的拉普拉斯变换，因此从 (13) 可以验证条件密度

$$P(\beta|E,\beta_0)=\exp(\beta_0 E)E\exp\big(-\beta E\big)\Theta(\beta-\beta_0) \tag{58}$$

被正确归一化，并且其矩生成函数由

$$M_\beta(t;E,\beta_0)=\int_0^\infty d\beta P(\beta|E,\beta_0)\exp(\beta t)=\frac{E}{E-t}\exp(\beta_0 t), \tag{59}$$

给出，这与 (54) 一致。

6. 结论备注

我们建立了两个定理，都提供了超统计有效性的充要条件。其中更强的定理 2 排除了规范系综的平凡情况，在这种情况下，β_F 是一个常数函数。给出了条件分布 $P(\beta|E,S)$ 的矩和累积量的显式公式，这些公式完全用 β_F 及其导数表示。定理 2 的推论是非规范超统计模型的基本逆温度函数是无穷可微的，因此不可能是任何阶次的多项式。

致谢

作者感谢 Daniel Pons 关于完全单调函数主题的富有成效的讨论。我们感谢来自 ANID FONDECYT 1220651 基金会（SD，CF）和 Beca ANID Doctorado Nacional/(2021) - 21210658 (CF) 的资助。

Appendix A. 定理 1 的证明

让我们首先回顾 Schilling、Song 和 Vondracek 的书 [28] 中完全单调函数和 Bernstein 函数的定义。令 $\mathcal{CM}$ 为所有完全单调函数的集合，根据参考文献 [28] 中的定义 1.3，对于一个具有 $x > 0$ 且 n 为整数的函数 $F(x)$，我们有

$$F \in \mathcal{CM} \;\text{ if and only if }\; (-1)^n F^{(n)}(x) \geq 0 \;\text{ for } n \geq 0. \tag{A.1}$$

根据参考文献 [28] 中的定理 1.4（Bernstein 定理），一个函数 F 是完全单调的当且仅当它可以表示为另一个非负函数 G 的拉普拉斯变换，即

$$F \in \mathcal{CM} \;\text{ if and only if }\; F(x) = \int_0^\infty ds\, G(s) \exp(-sx) \;\text{ with } G(s) \geq 0. \tag{A.2}$$

另一方面，根据参考文献 [28] 的定义 3.1，$H(x)$ 是一个 Bernstein 函数当且仅当 $H(x) \geq 0$ 和 $H'(x)$ 是完全单调的。此外，记 $\mathcal{BF}$ 为所有伯恩斯坦函数的集合，根据参考文献 [28] 的定理 3.6，我们有复合函数 $F(H(x)) \in \mathcal{CM}$ 当且仅当 $F \in \mathcal{CM}$ 和 $H \in \mathcal{BF}$。

定理 1 的证明. 显然，从 (A.1) 可知，条件 (34) 等价于断言 $\beta_F(E;S)$ 是完全单调的。另一方面，断言 $\rho(E;S)$ 是一个超统计模型是等价的，因为 (A.2)，这等价于断言 $\rho(E;S)$ 是完全单调的。因此，我们主要定理的证明归结为证明该命题

$$\beta_F(E;S) \in \mathcal{CM} \;\text{ if and only if }\; \rho(E;S) \in \mathcal{CM}. \tag{A.3}$$

(A.3) 的证明是通过构造函数

$$H(E) := \ln \rho(E_0;S) - \ln \rho(E;S), \tag{A.4}$$

来进行的，其中 E_0 是一个参考能量，而 $H'(E) = \beta_F(E;S)$。通过选择完全单调函数 $F(z) = \exp(-z)$ 可以看出

$$F(H(E)) = \exp\big(\ln\rho(E;S) - \ln\rho(E_0;S)\big) = \frac{\rho(E;S)}{\rho(E_0;S)}. \tag{A.5}$$

现在，因为对于任何稳态模型，$\rho(E;S) \geq 0$，如果 $F(H(E))$ 完全单调当且仅当 $\rho(E;S)$ 完全单调。因此，我们有 $\rho(E;S)$ 完全单调当且仅当 $H(E)$ 是一个 Bernstein 函数，也就是说，当且仅当 $\beta_F(E;S)$ 完全单调，即为 (A.3)。 □

参考文献

[1] J. Lima, R. Silva, and Janilo Santos. Plasma oscillations and nonextensive statistics. *Phys. Rev. E*, 61:3260–3263, 2000.

[2] S. Abe. Tsallis' nonextensive statistical mechanics and pure-electron plasma. *J. Plasma Fusion Res.*, 78(1):36–44, 2002.

[3] K. Ourabah, L. A. Gougam, and M. Tribeche. Nonthermal and suprathermal distributions as a consequence of superstatistics. *Phys. Rev. E*, 91:12133, 2015.

[4] K. Ourabah. Demystifying the success of empirical distributions in space plasmas. *Phys. Rev. Research*, 2:23121, 2020.

[5] N. Komatsu, T. Kiwata, and S. Kimura. Transition of velocity distributions in collapsing self-gravitating n-body systems. *Phys. Rev. E*, 85:021132, 2012.

[6] C. Tsallis, C. Anteneodo, L. Borland, and R. Osorio. Nonextensive statistical mechanics and economics. *Phys. A*, 324:89–100, 2003.

[7] M. Denys, T. Gubiec, R. Kutner, M. Jagielski, and H. E. Stanley. Universality of market superstatistics. *Phys. Rev. E*, 94:042305, 2016.

[8] A. Deppman and E. O. Andrade-II. Emergency of Tsallis statistics in fractal networks. *PLOS One*, 16:e0257855, 2021.

[9] C. Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009.

[10] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Phys. A*, 322:267–275, 2003.

[11] C. Beck. Superstatistics: theory and applications. *Cont. Mech. Thermodyn.*, 16:293–304, 2004.

[12] F. Sattin. Bayesian approach to superstatistics. *Eur. Phys. J. B*, 49:219–224, 2006.

[13] S. Davis and G. Gutiérrez. Temperature is not an observable in superstatistics. *Phys. A*, 505:864–870, 2018.

[14] F. Sattin. Superstatistics and temperature fluctuations. *Phys. Lett. A*, 382:2551–2554, 2018.

[15] S. Davis. Conditional maximum entropy and superstatistics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 53:445006, 2020.

[16] E. T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.

[17] S. Davis. A classification of nonequilibrium steady states based on temperature correlations. *Phys. A*, 608:128249, 2022.

[18] E. T. Bell. Partition polynomials. *Annals of Mathematics*, 29:38–46, 1927.

[19] J. Riordan. *An introduction to combinatorial analysis*. Princeton University Press, 2014.

[20] G. Grimmett and D. Welsh. *Probability: An Introduction*. Oxford University Press, 2014.

[21] M. G. Kendall and A. Stuart. *The advanced theory of statistics*. C. Griffin and Co., London, 1958.

[22] J. Marcinkiewicz. Sur une propriété de la loi de Gauß. *Math. Z.*, 44:612, 1939.

[23] S. Davis and G. Gutiérrez. Applications of the divergence theorem in Bayesian inference and MaxEnt. *AIP Conf. Proc.*, 1757:20002, 2016.

[24] M. S. S. Challa and J. H. Hetherington. Gaussian ensemble as an interpolating ensemble. *Phys. Rev. Lett.*, 60:77–80, 1988.

[25] M. S. S. Challa and J. H. Hetherington. Gaussian ensemble: an alternate Monte Carlo scheme. *Phys. Rev. A*, 38:6324–6337, 1988.

[26] R. S. Johal, A. Planes, and E. Vives. Statistical mechanics in the extended Gaussian ensemble. *Phys. Rev. E*, 68:56113, 2003.

[27] D. Suzuki, D. Suzuki, and S. Miura. An efficient replica exchange Monte Carlo method using the Gaussian ensemble for first-order transitions. *J. Phys. Soc. Japan*, 91:044006, 2022.

[28] R. L. Schilling, R. Song, and Z. Vondracek. *Bernstein functions*. de Gruyter & Co., Berlin, 2010.