一个关于
广义斐波那契数列（带死亡兔子）的简单证明 *

Roberto De Prisco
Dipartimento di Informatica
University of Salerno, Italy
robdep@unisa.it

April 13, 2025

Abstract

我们考虑一个广义的斐波那契计数问题，其中兔子在年龄为 f 时达到生育期，在年龄为 d 时死亡，$1 \leq f \leq d$ 和 d 可以为有限或无限。我们提供了一个基于纯粹计数论据的简单证明，以推导递归关系。用 F_n 表示第 n 代兔子的数量，并且初始条件为 $F_1 = 1$，我们有

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{for } 2 \leq n \leq f, \\ F_{n-1} + F_{n-f}, & \text{for } f+1 \leq n \leq d, \\ F_{n-1} + F_{n-f} - 1, & \text{for } n = d+1, \\ F_{n-1} + F_{n-f} - F_{n-d-1}, & \text{for } n \geq d+2. \end{cases}$$

该公式在 $f = 2$ 和 $d = \infty$ 时退化为经典的斐波那契情形。

1 介绍

列奥纳多 · 波那奇（更广为人知的名字是斐波那契），是一位生活在 13^{th} 世纪的意大利数学家，在他对该领域的众多贡献中，考虑了著名的兔子计数问题，这个问题导致了所谓的斐波那契整数序列。问题如下：一对兔子的种群，从一开始的一对新生兔子开始，在每一代生成中，每一队有生育能力的兔子都会生出新的一对兔子。一对兔子在两岁时变得具有生育能力，也就是说，

*该论文的完整版本发表于斐波那契死亡兔子问题的组合证明，发表在组合学研究所通报及其应用，第 103 卷（2025 年），第 25–36 页 [4]。我们请读者参考完整版本以获取数值示例。在这个版本中，我们添加了参考文献 [5] 并对其进行了一些备注（参见“先前工作”部分）。

在它们出生的那一世代不会繁殖，而是在下一世代开始繁殖，并且新生的兔子会在随后的一代被加上。问题在于计算每一代 F_n 对兔子的数量。初始条件给出了 $F_1 = 1$。唯一的一队兔子在第一代并不具有生育能力，因此 $F_2 = 1$。到了第二代，这对兔子开始繁殖并生出新的一对新生兔子，因此 $F_3 = 2$。对于下一世代，只有最初的那一对兔子繁殖，所以 $F_4 = 3$。对于后续的一个有两对兔子在繁殖，因此得到 $F_5 = 5$。这样进行下去就得到了所谓的斐波那契数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots.$$

众所周知的递推关系

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \tag{1}$$

提供了一种简单的方法来计算斐波那契数列，对于任意的 $n \geq 3$，从初始条件 $F_1 = 1$ 和 $F_2 = 1$ 开始。可以通过添加 $F_0 = 0$ 来扩展序列，公式对于 $n \geq 2$ 仍然有效，初始条件为 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$。

众所周知，斐波那契数列有许多有趣的性质，这些性质导致了它的著名。我们参考文献中可用的许多论文和书籍供对此类性质感兴趣的读者查阅。

一些推广已经被考虑。例如，由法国数学家弗朗索瓦 · 爱德华 · 阿纳托尔 · 卢卡斯在 19^{th} 世纪研究的卢卡斯数列，是通过将初始条件改为 $F_0 = 2$ 和 $F_1 = 1$ 获得的。吉波那契数列是一种进一步推广，其中 F_0 和 F_1 可以任意；因此斐波那契数和卢卡斯数是吉波那契数的特殊情况。帕多万数列被定义为 $F_n = F_{n-2} + F_{n-3}$，初始数字为 $F_0 = F_1 = F_2 = 1$，具有类似于斐波那契数列的性质（实际上它对应于我们将考虑的一种推广情况）。特里波那契数通过加上序列中的 3 个前一个数字获得，而四纳契数则是通过加上序列中的前 4 个数字获得。更一般的序列是通过添加前 k 个元素获得的，也就是说，使用 $F_n = \sum_{i=1}^{k} F_{n-i}$。另一种推广称为 k-斐波那契数列，其中数字定义为 $F_n = kF_{n-1} + F_{n-2}$。

关于这些推广有许多研究论文，并且已经有一些书籍是关于斐波那契数的；我们请读者参阅 [8, 9] 以获取更多信息。

在这篇论文中，我们考虑了一种泛化形式，在原始问题中，即一个关于兔子数量增长的计数问题中，兔子在经过一定代数 f 后变得具有繁殖能力，并且在某个时刻，经过 d 代后死亡。这个问题也被称为濒死兔子问题并在几篇论文 [1, 2, 3, 6, 7, 10] 中进行了研究。

本论文的贡献。本文提供了递推关系，给出了 n^{th} 广义斐波那契数作为 2 个或 3 个前项数字的函数。在初始条件 $F_1 = 1$ 下，我们有

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{for } 2 \le n \le f \quad \text{(Case 1)}, \\ F_{n-1} + F_{n-f}, & \text{for } f+1 \le n \le d \quad \text{(Case 2)}, \\ F_{n-1} + F_{n-f} - 1, & \text{for } n = d+1 \quad \text{(Case 3), and} \\ F_{n-1} + F_{n-f} - F_{n-d-1}, & \text{for } n \ge d+2 \quad \text{(Case 4)}. \end{cases}$$

该公式显然推广了方程 (1)。确实，斐波那契数列是其中一种情况，对于 $f = 2$ 和 $d = \infty$，且对于这两个参数的选择，我们只有情形 1 和 情形 2。对于 $n = 2$，我们有情况 1，给出 $F_2 = 1$，而对于 $n \ge 3$，情况 2 变为 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
我们提供的证明非常简单，仅涉及计数论证。

2 先前的工作

我们所知最早的关于有兔子死亡情况下的斐波那契计数问题的工作是由 U. Alfred 修士完成的。他在 [1] 中提出了对特定情况下 $f = 2$ 和 $d = 12$ 的兔子进行计数的问题，可能认为这是一个相对简单的计数问题。后来，在 [2] 中他得出结论，这个问题似乎并不那么简单。Cohn 在 [3] 中提供了一个能正确解决 $f = 2$ 和 $d = 12$ 情况的递推关系式。该递推关系式与本文提供的通用公式相符。

在 [6] 和 [7] 中考虑了繁殖模式的推广。每对兔子在其第一代产生 B_1 对新兔子，第二代产生 B_2 对，依此类推，直到 $B_0 = 0$，并且在固定世代数后兔子死亡。提出的解决方案用生成函数表示，并未导出显式公式。

Oller-Marcén [10] 提供了以下递推关系。在 [10] 中使用的符号使用 h 表示兔子开始繁殖的年龄，k 表示兔子存活的世代之后繁殖年龄。因此与我们符号的对应关系是 $f = h$ 和 $d = k + h - 1$。递推关系是

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{for } 1 \le n \le f \\ F_{n-1} + F_{n-f}, & \text{for } f < n \le d \\ \underbrace{F_{n-f} + F_{n-f-1} + \ldots + F_{n-d}}_{d-f+1 \text{ terms}}, & \text{for } n > d. \end{cases} \tag{2}$$

上述方程在 [10] 中的证明，即命题 9 的证明非常简短。尽管前两种情况很容易理解，但第三种情况，即 $n \ge d$ 的情况，并不是很清晰。实际上—我们只是调整了术语和符号以使其符合本文使用的术语和符号—该证明陈述如下：*第 n^{th} 代的兔子数量可以计算为所有前面的兔子数量之和，除外那些还未成熟的 (F_{n-j}，与 $1 \le j \le f-1$) 以及已经死亡的 (F_{n-j}，与 $j > n-d$)。*。虽然这句话准确地指出了方程 (2) 第三种情况的右侧，但它并未清楚地说明为什么它应该给出第 n^{th} 代兔

子的总数。此外，第 n 代中未成熟的兔子数量并不等于 $F_{n-1}+F_{n-2}+\ldots+F_{n-f+1}$，因为这个总数是多个世代中所有存活兔子的总和，因此未成熟兔子会被多次计算。此外，在前几代中存活的一些有生育能力的兔子可能在第 n 代之前已经死亡。类似的备注也适用于已死亡兔子的数量。

我们在本文中提供的证明方法，导致了一个更为紧凑的公式，可能也可以用来解释 (2)，实际上它等价于我们提出的那个。在 [10] 中，解也被给出为特征多项式的复根的一个函数。

在发表 [4] 之后，我们发现 [5] 实际上提供了与本文相同的公式。然而，在 [5] 中提供的证明是错误的。字面上，调整了在 [5] 中使用的符号，这与 [10] 中的相同，对于后者我们有 $f=h$ 和 $d=k+h-1$，证明（定理 2.1）如下："如果 $n\geq d+2$，第 n^{th} 代的兔子数量可以计算为前一代 F_{n-1} 的对数，加上此时成熟的对数所繁殖的数量，即 F_{n-f}。(这是刚刚来到世上的兔子对数。) 最后，必须减去此时死亡的兔子对数，即 F_{n-d-1}。"

不是说出生（即加入）第 F_n 代的兔子数量是 F_{n-f}，也不是说死亡（即不再属于）第 F_n 代的兔子数量是 F_{n-d-1}。如果我们称 $newborns_n$ 和 $deaths_n$，正如我们将在论文后续部分中所做的，上述证明所说的是 $newborns_n=F_{n-f}$ 和 $deaths_n=F_{n-d-1}$。但这不正确，因为第 $n-f$ 代的兔子可能会死亡，因此 F_{n-f} 是对 $newborns_n$ 的高估，同样的情况也适用于第 $n-d-1$ 代，因此 F_{n-d-1} 是对 $deaths_n$ 的高估。例如，考虑生成数 20 的情况，对于案例 $f=3$ 和 $d=9$（参见附录 B 中的表 [4]）。有 $F_{20}=715$ 只兔子，年龄如下：1 岁的兔子 228 只，2 岁的兔子 158 只，3 岁的兔子 109 只，4 岁的兔子 76 只，5 岁的兔子 53 只，6 岁的兔子 36 只，7 岁的兔子 25 只，8 岁的兔子 18 只，9 岁的兔子 12 只。因此，繁殖第 21 代的适龄兔子数量是年龄大于或等于 3 的所有兔子的数量之和，即 109+76+53+36+25+18+12=329。死亡且不会成为第 21 代一部分的兔子数量正好是 9 岁的兔子数量，也就是 12 只。因此 $newborns_{21}=329$ 和 $deaths_{21}=12$。但 $F_{n-f}=F_{18}=343$ 和 $F_{n-d-1}=F_{11}=26$。

顺便说一下，正好是真实的 $newborns_n-deaths_n$ 等于 $F_{n-f}-F_{n-d-1}$，这解释了为什么该公式是真的。在上一个示例中我们有 $329-12=317$ 和 $343-26=317$。等式 $newborns_n-deaths_n=F_{n-f}-F_{n-d-1}$ 在本文中被证明。

3 "基本方程"

首先，为了简化措辞，我们将讨论单个兔子而不是成对的兔子。一个单一的兔子增殖它并不是自然 [1]，但考虑单个兔子而不是成对的兔子不会改变基础计数问题。令 F_n 为第 n^{th} 代的兔子数量，初始条件为 $F_1=1$。这些兔子在第 f^{th} 代达到生育年龄，并在 d 岁时死亡，其中 $1\leq f\leq d$。

年龄为 d 的兔子首先增殖然后死亡。新生的兔子年龄为 1。"进化步骤" 如下：给定一个种群 F_n，该种群中每个年龄至少为 f 的元素都会为下一代产生一个新的元素；然后，每个元素的

[1]原始问题的设定也不是很自然！

年龄增加 1，而年龄为 $> d$ 的兔子死亡，因此不会成为下一代的一部分。

斐波那契数列是特殊情况 $f = 2$ 和 $d = \infty$，其中兔子在第一代后开始繁殖，即第二代时，并且永远不会死亡。

考虑第 n^{th} 代，并定义 $newborns_n$ 和 $deaths_n$ 分别为新生兔子数和死亡数。请注意，$newborns_n$ 等于上一代 $(n-1)^{th}$ 中繁殖期兔子的数量，而 $deaths_n$ 等于上一代 $(n-1)^{th}$ 中恰好年龄为 d 的兔子数量。以下基本事实应该是显而易见的

基本方程。第 n^{th} 代的兔子数量等于上一代的兔子数量加上新生的数量减去死亡的数量，即

$$F_n = F_{n-1} + newborns_n - deaths_n. \tag{3}$$

我们将上述方程称为*基础方程*。基底方程以一种直接的方式给出了一个解，一旦我们能够估计每一代的新生儿和死亡人数。

在我们继续之前，让我们先做一些观察。退化情形 $d < f$ 将会产生序列

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{d \text{ times}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots$$

因为唯一的兔子会在繁殖前死亡。因此这并不有趣，这也是为什么我们只考虑情形 $f \leq d$ 的原因。

边界情况 $f = d$ 很容易处理。实际上，在这种情况下，每一只兔子都在它死亡的同一世代繁殖，即 $newborns_n = deaths_n$（前 f 代为 0，之后为 1）。因此，兔子的总数永远不会改变。因此我们得到的序列是

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\ldots.$$

当 $f < d$ 估计新生儿和死亡人数变得更加棘手；然而当 $d = \infty$ 我们可以轻松估算死亡人数：$deaths_n = 0$。

特殊情况 $f = 1$（以及 $d = \infty$），兔子一出生就具有繁殖能力，导致每一代兔子的数量翻倍。确实我们会有 $newborns_n = F_{n-1}$，从而得到 $F_n = 2F_{n-1}$，这给出了 2 的幂次序列：

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 1024, \ldots\ldots.$$

对于原始的斐波那契数列，除了 $d = \infty$，我们还有 $f = 2$，在这种情况下也很容易估算新生个体的数量：在之前的规模为 F_{n-1} 的群体中，恰好有 F_{n-2} 个可繁殖的个体，因为兔子在 2 岁时变得可以繁殖，因此新世代中恰好有 F_{n-2} 个新生个体，即 $newborns_n = F_{n-2}$。因此对于情况 $f = 2$，$d = \infty$，我们有著名的斐波那契公式 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

更一般地说，对于情况 $d = \infty$ 和任何有限的 f，我们有在第 n 代中处于繁殖期的兔子数量正好是 F_{n-f}，即所有在 f 代之前就存在于种群中的兔子；事实上，所有这些兔子到第 n 代时年

龄至少为 f 并且它们还没有死亡。所有的其他兔子都还太年轻。繁殖期兔子的数量给出了新生兔子的数量，即 $newborns_n = F_{n-f}$。这导致了公式 $F_n = F_{n-1} + F_{n-f}$，正如方程（2）中所述。

然而，当 d 是有限的时候，估计新生和死亡的确切数量似乎更困难。确实，第 n^{th} 代的繁殖兔子的数量不再等于 F_{n-f}，因为其中一些兔子可能在此期间死亡。此外，总死亡数似乎也更难评估。

4 解开基础方程

仅跟踪每一代兔子的总数是没有帮助的。我们发现，估计每个可能年龄的兔子数量，有助于明确界定从计数中得到的数量之间的关系。以下我们将首先提供一些基本定义和性质，然后利用这些性质，证明所提出的公式的四种情况。

4.1 定义和性质

我们从以下定义开始，该定义给出了特定代中具有特定年龄的兔子的数量。

定义 4.1 定义 F_n^x，对于 $x = 1, 2, \ldots, d$ 表示第 n 代（开始时）年龄为 x 的兔子数量。

在以下内容中，我们研究了所有 F_n^x 之间的关系，对于任意的 n 和 x，以及每一代兔子的总数，即 F_n，对于任意的 n。

我们从一个显然的关系开始，这个关系直接来自于 F_n^x 的定义。

$$F_n = F_n^1 + F_n^2 + \ldots F_n^{d-1} + F_n^d. \tag{4}$$

引理 4.2 对于任何 $x \leq \min\{d, n\}$，我们都有 $F_n^x = F_{n-1}^{x-1} = F_{n-2}^{x-2} = \ldots = F_{n-x+1}^1$.

Proof: 兔子的年龄在每一代增加 1。因此，如果在第 n 代有 F_n^x 只（年龄为 x 的）兔子，那么在第 $n-1$ 代也必须有同样数量的 F_{n-1}^{x-1}（年龄为 $x-1$ 的）兔子，在第 $n-2$ 代也有同样数量的 F_{n-2}^{x-2}（年龄为 $x-2$ 的）兔子，以此类推，直到第 $n-x+1$ 代，那时这些兔子是新生的。条件 $x \leq \min\{d, n\}$ 确保 F_n^x 是定义良好的，并且 $n-x+1 \geq 1$ 指代一个存在的世代。 □

引理 4.3 对于 $n \geq 2$，在第 n 代死亡的兔子数量是 F_{n-1}^d。

Proof: 立即从定义 4.1：F_{n-1}^d 是年龄为 d 的兔子的数量。条件 $n \geq 2$ 确保 F_{n-1}^d 被定义。 □

引理 4.4 第 n 代新生兔子的数量 F_n^1 等于 $\sum_{x=f}^d F_{n-1}^x$。

Proof: 新生兔子的数量等于上一代有繁殖能力的兔子数量。因此我们需要考虑上一代中年龄至少为 f 的所有兔子。由定义 4.1 我们知道有 F_{n-1}^{f} 只年龄为 f 的兔子，F_{n-1}^{f+1} 只年龄为 $f+1$ 的兔子，依此类推直到 F_{n-1}^{d} 只年龄为 d 的兔子。因此具有繁殖年龄的兔子总数，即年龄为 $\geq f$ 的兔子数量是 $F_{n-1}^{f}+F_{n-1}^{f+1}+\ldots+F_{n-1}^{d}$。 □

现在，借助上述等式，我们可以轻松解开基础方程。我们区分四种子情况。

4.2 情况 1：$2 \leq n \leq f$

这种情况是平凡的，但为了说明的清晰性，我们将其视为其他情况来处理。在前 f 代中没有新生儿也没有死亡。因此我们有 $newborns_n = deaths_n = 0$ 并且由于 $F_1 = 1$，基础方程（3）变为

$$F_n = 1, \qquad \text{for } 2 \leq n \leq d. \tag{5}$$

4.3 情况 2：$f+1 \leq n \leq d$

自从 $n \leq d$ 没有死亡，因此 $deaths_n = 0$。然而一些兔子开始大量繁殖。由引理 4.4可知，第 n 代新生的个体数量是 $F_n^1 = \sum_{x=f}^{d} F_{n-1}^{x}$。

由引理 4.2可知，最后一项求和中的每个元素 F_{n-1}^{x} 都可以被等价项 $F_{n-1-(f-1)}^{x-(f-1)}$ 替代，我们通过向上左对角线遍历 $f-1$ 代来找到该等价项，因此，从基本方程开始，我们有

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + newborns_n - deaths_n \\
&= F_{n-1} + F_{n-1}^{1} - 0 \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=f}^{d-1} F_{n-1}^{x} \qquad \text{(by Lemma 4.4)} \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=f}^{d-1} F_{n-f}^{x-f+1} \qquad \text{(by Lemma 4.2)} \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=1}^{d-f} F_{n-f}^{x} \qquad \text{(index substitution)} \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=1}^{d} F_{n-f}^{x} \qquad \text{(added elements are 0)} \\
&= F_{n-1} + F_{n-f} \qquad \text{(by Equation (4))}
\end{aligned}$$

倒数第二步是正确的，因为对于第 $n-f$ 代来说，没有年龄为 $x > d-f$ 的兔子，因为条件 $n \leq d$ 意味着 $n-f \leq d-f$，因此没有任何一只兔子的年龄会大于这个数字。因此对于 $x > d-f$ 有 $F_{n-1}^x = 0$。

因此我们有

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-f}, \qquad \text{for } f < n \leq d. \tag{6}$$

4.4 情况 3：$n = d+1$

这个案例与前一个非常相似，唯一的不同是我们需要考虑第一次死亡：确实，在第 d 代，第一只兔子死亡，并且它是唯一一只死亡的，因此我们得到 $deaths_n = F_{n-1}^d = F_d^d = 1$。对于新生兔的分析在前一种情况中进行的也适用于这个案例。因此我们有

$$F_{d+1} = F_d - F_{d-f} - 1. \tag{7}$$

4.5 情况 4：$n \geq d+2$

接下来，我们将解开方程 (3) 以求得其他值的 n。我们将为此情况提供的理由不能应用于之前的案例，因为它涉及 F_{n-d-1}，而对于 $n < d+2$，它是未定义的。

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + newborns_n - deaths_n \\
&= F_{n-1} + F_n^1 - F_{n-1}^d \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=f}^{d} F_{n-1}^x - F_{n-1}^d \qquad \text{(by Lemma 4.4)} \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=f}^{d-1} F_{n-1}^x
\end{aligned}$$

如同案例 2 中所做的，根据引理 4.2，我们可以知道最后一个求和中的每个元素 F_{n-1}^x 都可以被等价项 $F_{n-1-(f-1)}^{x-(f-1)}$ 替代，我们通过向左上对角线方向移动 $f-1$ 代来找到这个等价项，因此我们有

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + \sum_{x=f}^{d-1} F_{n-1}^x \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=f}^{d-1} F_{n-f}^{x-f+1} \qquad \text{(by Lemma 4.2)} \\
&= F_{n-1} + \sum_{x=1}^{d-f} F_{n-f}^x \qquad \text{(index substitution)}
\end{aligned}$$

我们现在观察到

$$F_{n-f} = \sum_{x=1}^{d} F_{n-f}^x = \sum_{x=1}^{d-f} F_{n-f}^x + \sum_{x=d-f+1}^{d} F_{n-f}^x$$

因此我们有

$$\sum_{x=1}^{d-f} F_{n-f}^x = F_{n-f} - \sum_{x=d-f+1}^{d} F_{n-f}^x.$$

因此，我们有 rằng

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + \sum_{x=1}^{d-f} F_{n-f}^x \\
&= F_{n-1} + F_{n-f} - \sum_{x=d-f+1}^{d} F_{n-f}^x.
\end{aligned}$$

如前所述，我们现在可以使用引理 4.2将求和项向上左移 $d-f$ 代：

$$\begin{aligned}
\sum_{x=d-f+1}^{d} F_{n-f}^x &= \sum_{x=d-f+1-(d-f)}^{d-(d-f)} F_{n-d}^x \qquad \text{(by Lemma 4.2)} \\
&= \sum_{x=1}^{f} F_{n-d}^x \qquad \text{(index substitution)}
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-f} - \sum_{x=d-f+1}^{d} F_{n-f}^x \\
&= F_{n-1} + F_{n-f} - \sum_{x=1}^{f} F_{n-d}^x. \qquad (8)
\end{aligned}$$

为了完成公式的推导，我们观察到负项的求和 F^x_{n-d} 等于前一代兔子的总数 F_{n-d-1}。确实，这个求和的第一项 F^1_{n-d} 是第 $n-d$ 代新生个体的数量，这等于第 $n-d-1$ 代繁殖期兔子的数量；即

$$F^1_{n-d} = \sum_{x=f}^{d} F^x_{n-d-1}$$

而其他的项，将它们向上左移一代，再次使用引理 4.2，等于

$$\sum_{x=2}^{f} F^x_{n-d} = \sum_{x=1}^{f-1} F^x_{n-d-1}.$$

通过把这些事实结合起来我们得到

$$\sum_{x=1}^{f} F^x_{n-d} = F^1_{n-d} + \sum_{x=2}^{f} F^x_{n-d} = \sum_{x=f}^{d} F^x_{n-d-1} + \sum_{x=1}^{f-1} F^x_{n-d-1} = F_{n-d-1}. \tag{9}$$

将方程（8）和（9）结合起来，我们得到

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-f} - F_{n-d-1}, \qquad \text{for } n \geq d+2. \tag{10}$$

4.6 公式

总结，我们提供以下定理。

定理 4.5 令 $F_1 = 1$ 和令 f 和 d 为整数，使得 $1 \leq f \leq d$。第 n 代兔子的数量 F_n，对于一种在年龄 f 时达到生育能力并在年龄 $d \geq f$ 时死亡的兔子种群，由以下给出

$$F_n = \begin{cases} 1, & \textit{for } 2 \leq n \leq f \\ F_{n-1} + F_{n-f}, & \textit{for } f < n \leq d \\ F_{n-1} + F_{n-f} - 1, & \textit{for } n = d+1 \\ F_{n-1} + F_{n-f} - F_{n-d-1}, & \textit{for } n \geq d+2 \end{cases} \tag{11}$$

Proof: 从方程（5），（6），（7）和（10）。 □

斐波那契数列通过 $f = 2$ 和 $d = \infty$ 获得。使用 $f = 2$ 和 $d = 3$ 可以获得帕多万数列。

5 结论

我们给出了一种简单的公式，用直接的论证证明了广义斐波那契问题中兔子的数量，在这个问题中，兔子在任意数量代后才变得有繁殖能力，并且它们在某个时刻也会死亡。会死亡的兔子问题是由 Brother U. Alfred 在《斐波那契季刊》的第一期 [1] 提出的，可能是作为作者期望的一个简单的计数问题。以下是来自 Brother U. Alfred 后续论文 [2] 的一段逐字引用：*最初，人们认为移除的兔子会构成一个可以用斐波那契数表示的序列。但经过多人多次尝试后，似乎仅凭直觉很难得出答案。*在本文中，我们证明了 Brother U. Alfred 认为会死亡的兔子问题是简单计数问题的看法是正确的。

References

[1] Brother U. Alfred. Exploring Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 1, No. 1, pp. 57–63, 1963.

[2] Brother U. Alfred. Dying rabbit problem revived. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 1, No. 4, pp. 53–56, 1963.

[3] Cohn, J.H.E. Letter to the editor. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 2, No. 2, p. 108, 1964.

[4] De Prisco, R. A combinatorial proof for the Fibonacci dying rabbits problem. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, Vol. 103, pp. 25–36, 2025. URL: https://bica.the-ica.org/Volumes/103//Reprints/BICA2024-01-Reprint.pdf

[5] Jishe, F. Some new remarks about the dying rabbit problem. *Fibonacci Quarterly*, Vol. 49, No. 2, pp. $171 - 176$, 2011.

[6] Hoggatt, V.E. Generalized rabbits for generalized Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 7, No. 5, pp. 482–487, 1969.

[7] Hoggatt, V.E. and Lind, D.A. The dying rabbit problem. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 7, No. 5, pp. 482–487, 1969.

[8] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley and Sons, NY, 2001.

[9] Vajda, S., *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*, John Wiley and Sons, NY, 2001.

[10] Oller-Marcén, A. M. The dying rabbit problem revisited. *Integers*, vol. 9, 129–138, 2009.