

镜机中自共振去除聚变产物

Eli Gudinetzsky,¹ Tal Miller,¹ Ilan Be'ery,² and Ido Barth^{1,*}

¹Racah Institute of Physics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904 Israel

²nT-Tao, 5 Ha-Nagar st., Ramat Hasharon, 4526005 Israel

(10Dated: 2025 年 5 月 3 日)

磁约束聚变反应堆通过聚变副产物粒子进行聚变，必须移除这些粒子以实现高效运行。建议使用自共振（非谐振动与频率调制驱动之间的连续相位锁定）从磁镜中移除聚变产物，磁镜是最简单的磁约束配置。通过导心近似建立了与受驱摆的类比。完整 3D 动力学模拟了 α 粒子（DT 聚变产物），结果与近似的 1D 模型一致。使用蒙特卡洛仿真采样初始条件相空间来量化该方法的有效性。DT 燃料粒子不在频率调制驱动的带宽内，因此会保留在镜中继续进行聚变反应。该方法也适用于先进的、无中子的反应堆，如 p-¹¹B。

最直接的磁约束配置是磁镜，因此它作为各种线性聚变机器的基本构建模块，不仅因为其工程上的简单性，还因其高- β -稳态运行 [1]。聚变产物，例如氘氚（DT）聚变中的 α 粒子，被同一镜像磁场捕获，这些磁场也捕获燃料粒子，占据了有价值的燃料粒子的位置。去除聚变产物一直是一个长期存在的问题 [2–11]。其中一种领先的方法是 α -通道化，这种方法利用射频波来诱导 α 粒子的定向扩散，同时冷却并通过等离子体波将它们的能量转移到燃料粒子 [8, 9]。保持等离子体中 3.5 兆电子伏特 α 粒子的能量有利于自持燃烧过程 [12, 13]。然而，超过 15 千电子伏特的进一步加热对于 DT 聚变是不利的，因为反应性降低并且韧致辐射损失增加 [13]。因此，从聚变单元中移除高能 α 粒子及其（部分）能量可能有利于持续的温度和燃烧控制，特别是如果 α 束的能量通过镜 [14, 15] 外部的直接能量转换提取的话。

自激共振（AR），即在参数缓慢变化的非线性振荡系统中持续相位锁定的现象，已经在各种系统中得到了充分的理论 [16–23] 和实验 [24–29] 研究，其中最简单的例子是啁啾驱动摆 [30]。当驱动频率通过线性共振并随着非线性频率偏移补偿啁啾驱动频率时，相位锁定得以建立。AR 提供了对振荡自由度的控制而无需反馈，并且可以用于释放被困在势阱中的带电粒子，例如从彭宁阱中释放反质子以产生反氢 [28, 31]。啁啾驱动摆进入共振有两个不同的极限。第一个是概率捕捉，在这种情况下，振荡粒子开始于较大的振幅状态，即具有足够大的非线性（非谐波）频率偏移。在这个区域，只有初始振荡相位的一小部分被俘获到共振中，而所有其他粒子经历瞬时共振冲击并继续进行非共振

运动 [23, 32]。用于环形系统的频率扫描技术 [11] 在这种情况下运行。第二个极限是自动捕捉，在此状态下几乎所有的平衡附近的粒子都被捕获到 AR 中，无论它们的初始相位如何。在这种情况下，捕获仅在驱动振幅 ε 超过临界值 ε_c 时发生，该临界值按 $\alpha^{3/4}$ 的比例缩放，其中 α 是啁啾率 [20, 21, 24]。值得注意的是，被捕获的粒子可能在驱动频率继续啁啾时达到较大的振幅。

在这封信中，我们首次研究了磁镜中的自谐振，并提出将其应用于快速去除大量聚变产物。该想法是通过自共振增加 α 粒子的纵向能量，直到它们通过损失锥逃逸。驱动力是通过一个频率缓慢下啁啾的弱振荡轴向磁场来实现的，这个磁场穿过线性跳动频率。结果，机器中心附近的大部分 α 粒子与驱动器相位锁定并获得轴向速度，直到它们通过损失锥逃逸。这样的自谐振循环可以连续重复以在燃烧等离子体中持续去除产物。关键的是， α 粒子被去除而不会显著影响燃料粒子。

考虑一个质量为 m 且带电量为 q 的带电粒子，该粒子被困在一个长度为 $2l$ 的磁镜中，并由一个缓慢变频的振荡场驱动。我们在柱坐标系中近似镜轴附近的纵向磁场， (r, θ, z) ，为

$$B_z = B_{\min} + B_0 \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l}\right) + \varepsilon B_0 \frac{\pi z}{l} \cos \phi_d \quad (1)$$

其中 $B_0 = (B_{\max} - B_{\min})/2$ ，而最大（最小）静态磁场是 $B_{\max}$ ($B_{\min}$)。方程 (1) 的最后一项是时间依赖的驱动场，其中 $\varepsilon \ll 1$ 是无量纲振幅， $\phi_d = \int \omega_d dt$ 是调频频率 $\omega_d = \omega_0 - \alpha \omega_0^2 t$ 的相位。驱动频率 ω_d 被选择为在 $t = 0$ 附近与典型被困粒子的纵向 (z -方向) 跳跃频率

$\omega_B = \sqrt{\mu B_0 \pi^2 / m l^2}$ 共振 (见下文方程 5)。磁矩, $\mu = 0.5 m v_\perp^2 / B_z$ 是一个绝热不变量, 因为 $\omega_B, \omega_d \ll \omega_c$, 其中 ω_c 是回旋频率。驱动场可以通过在镜像线圈中振荡电流来实现。由于镜像的对称性, 方位磁场 B_θ 为零, 而径向分量由

$$B_r = -\frac{\pi r B_0}{2l} \left(\sin \frac{\pi z}{l} + \varepsilon \cos \phi_d \right) \quad (2)$$

决定, 根据磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。磁场的时间变化部分, 即驱动场, 诱导出一个方位电场。

$$\mathbf{E} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{\theta} = \frac{\varepsilon \pi r z B_0 \omega_d}{2l} \sin \phi_d \hat{\theta}. \quad (3)$$

最值得注意的, 完整的三维 (3D) 动力学可以通过指导中心近似简化为一维 (1D), 前提是满足 $m v_\perp / q B_0 l \ll 1$ 。然后, 沿磁场方向的运动方程可以表示为近似值。[33]

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} \approx q E_\parallel - \mu \frac{\partial B}{\partial s} + m \mathbf{u}_E \cdot \frac{d\hat{e}_1}{dt} \quad (4)$$

其中我们忽略了重力。 $E_\parallel$ 是在引导中心轨迹上评估的电场纵向分量。导数 $\partial/\partial s$ 沿磁场线, $\mathbf{u}_E$ 是 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移速度, 而 $\hat{e}_1$ 是沿磁场线的单位向量。对于镜轴上的一个引导中心轨迹, 我们可以代入 $\partial/\partial s = \partial/\partial z$ 和 $\hat{e}_1 = \hat{z}$ 。值得注意的是, 对于方程组 (Eq. (1-3)) 中的场, 唯一的非零项是 $\mu \partial B / \partial s$, 因为方程 (Eq. (3)) 给出了 $E_\parallel = 0$, 因此也有 $\mathbf{u}_E(r=0) = 0$ 。因此, 粒子在镜轴附近纵向运动的引导中心方程简化为已广泛研究的一维啁啾驱动摆动 [20, 21, 30]

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{\mu B_0 \pi}{m l} \left(\sin \frac{\pi z}{l} + \varepsilon \cos \phi_d \right). \quad (5)$$

因此, 我们期望在适当的参数下, 在磁镜中观察到 AR 动力学。

为了检验这一预测, 我们求解了一个初始能量为 1 兆电子伏特的非相对论性 α 粒子在方程 (1-3) 中的磁场和电场作用下的三维运动方程。我们的精确洛伦兹力求解器是完全三维的, 使用了体积守恒方案 [34]。针对这一初始能量区间符合燃烧等离子体中典型的减速平均能量 ~ 1 兆电子伏特 [35, 36]。此外, 与考虑 3.5 兆电子伏特粒子相比更有优势, 因为它们在被移出镜之前会在等离子体中沉积大部分能量, 并且直接能转换方法 (镜外) 对于较低的能量更有效。我们考虑 $l = 5$ 米, $B_{\min} = 1$ 特斯拉, 和 $B_{\max} = 3$ 特斯拉, 这满足

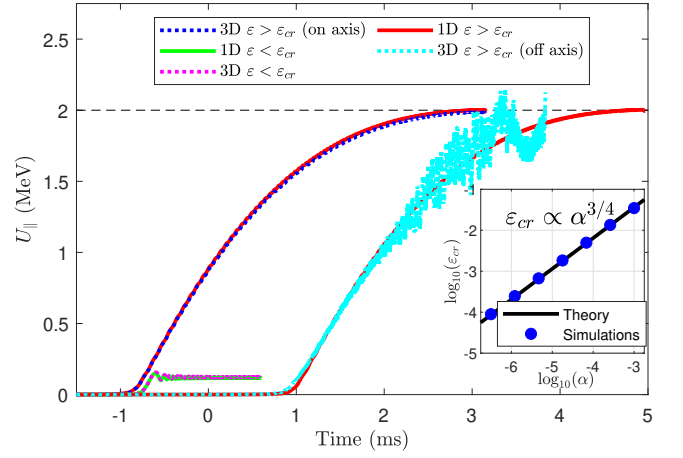


图 1. 轴向能量 (为清晰起见进行了水平偏移) 的动力学, 在上述调频驱动影响下, 阈值之上, $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ (红色、蓝色和青色), 以及之下, $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ (绿色和洋红), 对于一维引导中心近似模型 (实线) 和三维模拟 (虚线)。展示了初始引导中心位于镜轴上的轨迹 (蓝色和洋红), 以及距离镜轴约 $r_{gc} = 0.5$ 米处的轨迹 (青色)。虚黑线表示轴上粒子的逃逸轴向能量。插图: 阈值, ε_{cr} , 与调频速率, α , 在对数-对数尺度上的关系, 三维模拟结果 (点) 与理论标度 (实线) 进行了比较。

了导心近似, 因为 $m v_\perp / q B_0 l \approx 5 \times 10^{-3} \ll 1$ 。驱动参数为 $\omega_0 = 2\pi \times 0.8$ MHz, $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ 和 $\varepsilon = 8 \times 10^{-3}$, 对应的在镜腔喉部最大驱动磁场约为 25 mT。首先, 我们通过考虑几个具有近平衡初始条件的例子来说明镜机中的 AR 动力学。然后, 我们将模拟推广到整个相空间以研究 AR 去除方案的效率。

在图 1 中, 我们展示了两个从镜面中部开始、纵向速度为零 (因此 $\omega_B \approx 2\pi \times 0.5$ MHz) 的 α 粒子的动力学特性, 其中一个粒子的回旋中心位于镜轴上, 另一个则偏离轴线。数值结果表明了两种情况下均存在典型的 AR 解 (分别用蓝色和青色虚线表示), 包括在通过线性共振时被俘获以及在非线性区域能量缓慢调制 [30] 的情况。当平行能量达到 2 MeV 后, 粒子大约经过 3 毫秒就会通过损失锥逃逸。我们将完整的三维解与等式 (5) 的同参数一维近似动力学 (用实线红色表示) 进行了比较, 并发现对于轴上情况在所有时间都存在极好的一致性, 而对于偏离轴线的粒子直到其被激发到更高能量之前也是如此。重要的是, 磁矩得到了绝热守恒。因此, 尽管轴向能量 $U_\parallel$ 增加, 横向能量 (和径向位置) 仍然保持有界 (图中未显示)。在高振幅下偏离一维轨迹可能是由于与其他自由度的非线性耦合。

在图中, 我们还展示了低于 AR 阈值的动力学情

况，在通过线性共振后， $U_{\parallel}$ 被适度激发，并在约 ~ 0.1 毫秒后达到能量饱和。在这种情况下，参数与之前相同，除了驱动振幅 $\varepsilon = 1.9 \times 10^{-3}$ ，该振幅低于这些参数的阈值， $\varepsilon_{\text{cr}} \approx 2 \times 10^{-3}$ 。三维（点状洋红色）和近似一维（实心绿色）模拟之间的吻合非常好。我们进一步通过扫描固定 α 下的 ε 来研究阈值效应，并找到分离被捕获解与未被俘获解的关键值， ε_{cr} 。三维模拟结果（图 1 插图中的点）很好地符合了一维自动共振摆 [19] 的理论缩放关系 $\varepsilon_{\text{cr}} \propto \alpha^{3/4}$ ，三个数量级的结果一致（实线）。

一个从 $\omega_d \approx \omega_B$ 到损失锥穿越的下限 $\omega_d = 0$ 的啁啾周期持续时间是

$$\Delta t = \frac{\Delta \omega_d}{\alpha \omega_0^2} \approx \frac{1}{\alpha \omega_0}, \quad (6)$$

其中上述参数约为 $\Delta t \approx 10$ 毫秒。这种短时间尺度和自动捕获的效果表明可以使用 AR 来从镜像（聚变）装置中移除 α 粒子。然而，为了高效移除粒子，必须将初始条件的较大相空间体积捕获到 AR 中，并且啁啾持续时间必须短于典型的聚变燃烧时间。为了估计 AR 去除的相空间效率，我们数值求解了被限制在镜像中的 $10^4 (1 \text{ MeV}) \alpha$ 粒子的 3D 动力学。初始速度方向是从各向同性分布中采样的，以获得良好的相空间覆盖，而系统参数与图 1 中的示例相同。模拟时间被选择为驱动频率 ω_d 从 0.7 兆赫兹（高于线性共振 $\omega_d = \omega_B$ ）开始，然后逐渐下降到 260 千赫兹，因为在分界面 [30] 附近由于非线性和随机性，自动共振粒子会在 $\omega_d = 0$ 之前逃逸。

图 2 呈现了轴向速度 v_z 的变化（最终与初始值），归一化于损失锥逃逸速度 $v_{lc} = 2\sqrt{\mu B_0/m}$ ，在啁啾驱动的影响下，对于起始于中平面 $z = 0$ 的粒子，但具有不同的 v_z 。在这些计算中，如果粒子的轴向速度超过 $0.8 v_{lc}$ ，则认为该粒子被捕获到 AR，最后的向外运动可以通过库仑碰撞或由连续驱动周期引起的非共振随机踢动来支持。该图表明，所有起始轴向速度较小 $v_z \leq 0.3 v_{lc}$ 的粒子都如自动捕获机制所预期的那样被捕获到 AR。相比之下，只有部分初始速度为 v_z 较高的粒子被捕获，并且可以与随机捕获机制 [23, 32] 关联。实际上，未被捕获的粒子（红点）散射向较低的轴向速度，使它们在随后的啁啾周期中更容易受到 AR 移除的影响。同时，由于 DT 燃料颗粒的镜面反射频率较低，因此受啁啾驱动的影响较小，因为它们的能量显著更低（ $\sim 15 \text{ keV}$ ），所以只有其麦克斯韦分布中的小

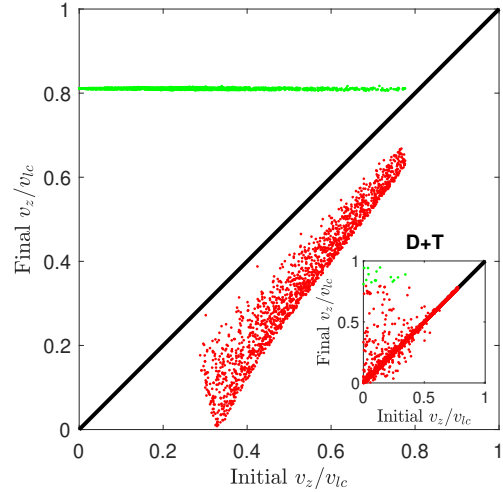


图 2. 最终与初始轴向速度通过自动共振粒子的损失锥速度 v_{lc} 归一化的结果，自动共振 α 粒子（绿色点）和未被捕获粒子（红色点）。插图：DT 粒子的相同图表。

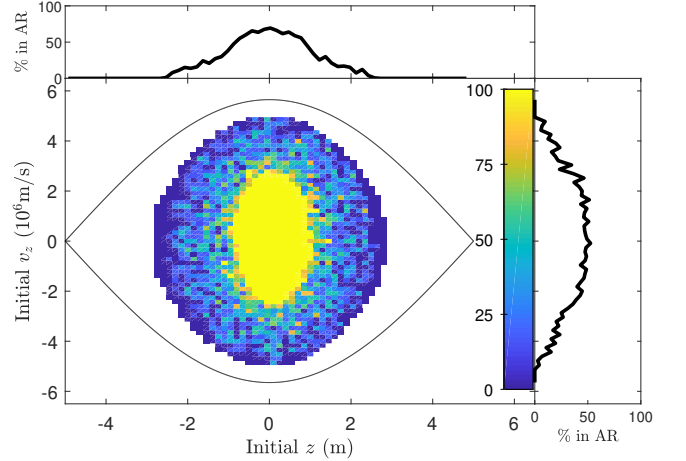


图 3. 轴向 α 粒子在 $z-v_z$ 初始条件相空间中的自动共振捕获概率。黑色线条表示镜像分离线。外部面板展示了在 v_z （右侧）和 z （顶部）轴上的边缘捕获概率分布。

部分具有足够大的 μ 以在 AR 啁啾带宽内产生 ω_B 。这一预测得到了图 2 插图所示的模拟结果的支持，表明大部分 DT 燃料群体仍接近不变线（黑色）， $v_{\text{final}} = v_{\text{initial}}$ 。

我们将研究从中间平面初始条件推广到从 $z-v_z$ 相空间开始的粒子，但其旋转向心仍在镜轴上。在图 3 中，随机采样并分箱了 10^4 粒子，在每个箱子（像素）中，捕获概率被计算为该箱子内被捕获进入 AR 的粒子的比例。仿真结果展示了自动捕获（中心黄色椭圆区域）和随机捕获（外环）进入共振状态的存在。还发现自动捕获相空间体积随 ε 增加（未展示）。

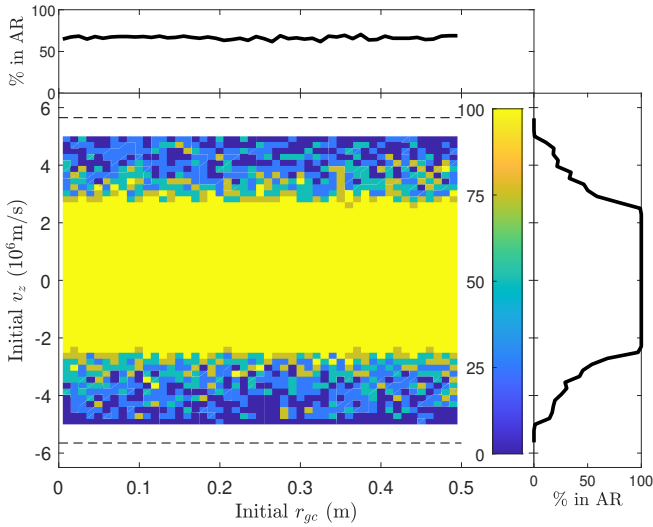


图 4. 离轴 α 粒子在 $r_{gc} - v_z$ 初始条件相空间的捕获概率。虚黑线表示损失锥速度。外部面板显示了在 v_z (右) 和 r_{gc} (上) 轴上的边缘捕获概率分布。

最后，我们研究了频率啁啾驱动对初始位置偏离轴线的 α 粒子的影响，即围绕 $r_{gc} > 0$ 旋转。在图 4 所示的计算中，测试了捕获概率对于初始偏离轴距离的敏感性，直到 0.5 米。仿真结果（上图）显示捕获概率对初始 r_{gc} 有较弱的依赖性，这表明在合理范围内的半径控制 AR 具有较强的鲁棒性。值得注意的是，大多数 α 粒子在预期的聚变镜基机器中心（轴向和径向）附近产生，在这里考虑的系统参数中典型的径向长度约为 0.15 m [37, 38]。因此，单个 AR 去除循环的效率可以通过对初始粒子在 $v_z - z - r_{gc}$ 相空间中的分布积分捕获概率函数（图 2-3）来计算，预计该效率会很高。

时间效率取决于比较反应堆中积累足够数量的 α 粒子所需的时间和 AR 去除时间。我们通过 $f/n_{DT}\langle\sigma v\rangle$ 估计 α 积累时间，其中 f 是期望的产品与燃料颗粒比， n_{DT} 是燃料密度，而 $\langle\sigma v\rangle$ 是平均融合反应性。例如，对于 $f = 10^{-3}$ ，等离子体温度和密度分别为 15 keV 和 10^{14} cm^{-3} ，生产时间为 $\sim 25 \text{ ms}$ ，这比去除大多数累积的 α 粒子所需的几毫秒 AR 频率调制周期要长得多。

碰撞通过增加阈值， ϵ_{cr} ，并拓宽其宽度，[21]，影响到被捕获进入 AR。这些效果可以通过增加驱动振幅， ϵ ，来克服弱碰撞。由于典型的冷却时间是一个 α 粒子为数百毫秒，而啁啾时间为小于 10 ms，所考虑的系统是弱碰撞的。

自共振粒子在磁镜中的总能量增加，而它们的磁

矩保持不变。因此，从陷阱中提取粒子所需的能量是 $\Delta U_{AR} = (R-1)U_{\perp} - U_{\parallel}$ ，其中 $U_{\perp}$ 和 $U_{\parallel}$ 分别是在磁镜中间平面评估的初始垂直和平行动能， $R = B_{\max}/B_{\min}$ 是磁镜比。对于上述示例， $\Delta U_{AR} \leq 2$ 约为兆电子伏特，这大约是每次反应产生的总聚变能量的 10%。因此，对于一个典型的聚变发电厂概念，自共振移除方案将需要几十兆瓦。例如，通过位于机器喉部直径为 10 cm 的单匝线圈产生强度为 $B_d = 25 \text{ mT}$ 的驱动磁场所需的电流约为 2 kA。为了向 α 粒子输送例如 20 MW 的功率，驱动电压应该约为 10 kV。具有相似射频参数（甚至频率高于 1 MHz）的天线成功展示了生成场反向配置 [39]，并在环形系统中用于离子回旋共振加热 [40-42]。需要注意的是，移除粒子的能量大部分可以通过直接能量转换方案 [14, 15] 回收，因此 AR 去除方法的总功率平衡预计会很好。

值得注意的是， α 粒子具有不同的能量，范围从几倍燃料温度到 3.5 MeV，可以通过适当的频率调制自动谐振移除。对于给定的系统，应优化频率下限以避免对燃料粒子能量分布尾部的共振影响。重要的是，针对较低能量的 α 粒子更有能效。我们还注意到，虽然有效并最终去除 α 粒子对于 DT 反应堆的连续运行至关重要，但 p- ^{11}B 反应堆 [43] 的即时移除是绝对必要的，因为它们具有较低的反应性，并且为了避免不必要的二次中子反应。幸运的是， α 和 ^{11}B 燃料颗粒之间的光谱分离使得可以在这种先进反应堆中利用 AR 快速有效地去除 α 。

至于集体效应，建议的 AR 方案是一个小幅度轴对称扰动，因此预期产生的不稳定性会被限制甚至比未受扰动的系统更小。此外，需要注意的是，在镜子装置中减轻不稳定性的各种方法（例如，[1, 44, 45] 卡笛尔不稳定性）也可能在存在 AR 扰动的作用下发挥作用。然而，关于 MHD 不稳定性和其他集体效应的详细分析将留待未来的研究。

总之， α 粒子可以在聚变镜设备中通过对其轴向运动的自动谐振控制而被高效移除。由于物种之间的光谱分离，可以提取出显著部分的聚变产物，同时燃料颗粒几乎不受影响。这一新颖方案基于一维指导中心理论，并得到了三维数值模拟的支持。相空间蒙特卡洛分析，包括偏离轴线的粒子，验证了该方案的有效性和鲁棒性。预期 AR 选择性驱逐方法对于镜系统中的各种应用都是有用的，包括无中子反应堆中的聚

变产物去除、空间推进以及重杂质去除 [46]。仍然需要研究在更复杂的开放磁场配置中应用 AR 的可能性，包括磁场反转配置和串联设备，以及参数自动谐振操作闭合“香蕉”轨道的方案，例如托卡马克和仿星器等系统。

作者感谢与 Robert G. Littlejohn 和 Nathaniel J. Fisch 的有益讨论。本工作得到了 PAZY 基金会的支持，资助号为 2020-191。

* ido.barth@mail.huji.ac.il

- [1] R. F. Post, Nucl. Fusion **27**, 1579 (1987).
- [2] V. I. Khvesyuk, N. V. Shabrov, and A. N. Lyakhov, Fusion Technology **27**, 406 (1995).
- [3] N. J. Fisch, Phys. Rev. Lett. **97**, 225001 (2006).
- [4] A. J. Fetterman and N. J. Fisch, Phys. Rev. Lett. **101**, 205003 (2008).
- [5] D. Reiter, H. Kever, G. H. Wolf, M. Baelmans, R. Behrisch, and R. Schneider, Plasma Phys. Controlled Fusion **33**, 1579 (1991).
- [6] R. White, F. Romanelli, F. Cianfrani, and E. Valeo, Phys. Plasmas **28**, 012503 (2021).
- [7] A. Bierwage, K. Shinohara, Y. O. Kazakov, V. G. Kiptily, P. Lauber, M. Nocente, Z. Stancar, S. Sumida, M. Yagi, J. Garcia, S. Ide, and JET Contributors, Nat. Commun. **13**, 3941 (2022).
- [8] N. J. Fisch, J.-M. Rax, Phys. Rev. Lett. **69**, 612 (1992).
- [9] A. I. Zhmoginov, N. J. Fisch, Phys. Plasmas **15**, 042506 (2008).
- [10] N. J. Fisch and M. C. Herrmann, Nucl. Fusion **34**, 1541 (1994).
- [11] H. E. Mynick, and N. Pomohrey, Nucl. Fusion **34**, 1277 (1994).
- [12] J. D. Lawson, Proc. Phys. Soc. B **70**, 6 (1957).
- [13] S. E. Wurzel, and S. C. Hsu, Phys. Plasmas **29**, 062103 (2022).
- [14] R. W. Moir and W. L. Barr, Nucl. Fusion **13**, 35 (1973).
- [15] W. L. Barr, R. W. Moir, and G. W. Hamilton, J. Fusion Energy **2**, 131 (1982).
- [16] B. Meerson and L. Friedland, Phys. Rev. A **41**, 5233 (1990).
- [17] W. K. Liu, B. Wu, and J. M. Yuan, Phys. Rev. Lett. **75**, 1292 (1995).
- [18] L. Friedland, Phys. Rev. E **58**, 3865 (1998).
- [19] J. Fajans, and L. Friedland, **69**, 1096 (2001).
- [20] L. Friedland, J. Physics A: Mathematical And Theoretical **41**, 415101 (2008).
- [21] I. Barth, L. Friedland, E. Sarid, and A. G. Shagalov, Phys. Rev. Lett. **103**, 155001 (2009).
- [22] I. Barth and L. Friedland, Phys. Rev. Lett. **113**, 040403 (2014).
- [23] T. Armon and L. Friedland, J. Plasma Phys. **82**, 705820501 (2016).
- [24] J. Fajans, E. Gilson, and L. Friedland, Phys. Rev. Lett. **82**, 4444 (1999).
- [25] O. Naaman, J. Aumentado, L. Friedland, J. S. Wurtele, and I. Siddiqi, Phys. Rev. Lett. **101**, 117005 (2008).
- [26] A. Barak, Y. Lamhot, L. Friedland, and M. Segev, Phys. Rev. Lett. **103**, 123901 (2009).
- [27] K. W. Murch, R. Vijay, I. Barth, O. Naaman, J. Aumentado, L. Friedland, and I. Siddiqi, Nat. Phys. **7**, 105 (2011).
- [28] G. B. Andresen *et al.* (ALPHA Collaboration), Phys. Rev. Lett. **106**, 025002 (2011).
- [29] Y. Shalibo, Y. Rofo, I. Barth, L. Friedland, R. Bialczack, J. M. Martinis, and N. Katz, Phys. Rev. Lett. **108**, 037701 (2012).
- [30] L. Friedland, in *Proceedings. 2005 International Conference Physics And Control*. (2005) pp. 8-14.
- [31] G. B. Andresen *et al.* (ALPHA Collaboration), Nature **468** 673 (2010).
- [32] A. Neishtadt and A. Vasiliev, Phys. Rev. E **71**, 056623 (2005).
- [33] T. G. Northrop, *The Adiabatic Motion Of Charged Particles* (Interscience Publishers, New York, 1963) p. 9.
- [34] Y. He, Y. Sun, J. Liu, and H. Qin, J. Comput. Phys. **281** 135 (2015).
- [35] W. W. Heidbrink and G. J. Sadler, Nucl. Fusion **34**, 535 (1994).
- [36] S. J. Zweben, R. V. Budny, D. S. Darrow, S. S. Medley, R. Nazikian, B. C. Stratton, E. J. Synakowski, and G. Taylor for the TFTR Group, Nucl. Fusion **40**, 91 (2000).
- [37] P. A. Bagryansky, A. V. Anikeev, G. G. Denisov, E. D. Gospodchikov, A. A. Ivanov, A. A. Lizunov, Yu. V. Kovalenko, V. I. Malygin, V. V. Maximov, O. A. Korobeinikova, S. V. Murakhtin, E. I. Pinzhenin, V. V. Prikhodko, V. Ya. Savkin, A. G. Shalashov, O. B. Smolyakova, E. I. Soldatkina, A. L. Solomakhin, D. V. Yakovlev, and K. V. Zaytsev, Nucl. Fusion **55**, 053009 (2015).
- [38] P. A. Bagryansky, A. G. Shalashov, E. D. Gospodchikov, A. A. Lizunov, V. V. Maximov, V. V. Prikhodko, E. I. Soldatkina, A. L. Solomakhin, and D. V. Yakovlev, Phys. Rev. Lett. **114**, 205001 (2015).
- [39] A. L. Hoffman, H. Y. Guo, J. T. Slough, S. J. Tobin, L. S. Schrank, W. A. Reass, and G. A. Wurden, Fusion Sci. Technol. **41**, 92, (2002).
- [40] I. Monakhov, P. Jacquet, P. Dumortier, F. Durodié, E. Lerche, R. Lobel, M. L. Mayoral, C. Noble, J. Roberts, and H. Sheikh, Plasma Physics and Controlled Fusion, **67**, 015023, (2024).
- [41] A. Patel, H. Dhola, D. Upadhyay, K. Mehta, N. Goswami, N. P. Singh, B. Raval, R. Dave, S. Gajjar, V. Gupta, A. Thakar, K. Rajnish, D. Soni, S. Varma, R. Singh, R. Trivedi, A. Mukherjee and U. Baruah, Fusion Eng. Des., **126**, 59, (2018).
- [42] P. Lamalle, B. Beaumont, F. Kazarian, T. Gassmann, G.

- Agarici, P. Ajesh, T. Alonzo, B. Arambhadiya, A. Argouarch, R. Bamber, et. al., *Fusion Eng. Des.*, **88**, 517, (2013).
- [43] E. J. Kolmes, I. E. Ochs, and N. J. Fisch, *Phys. Plasmas* **29**, 110701 (2022).
- [44] D. Endrizzi, J. K. Anderson, M. Brown, J. Egedal, B. Geiger, R. W. Harvey, M. Ialovega, J. Kirch, E. Peterson, Yu. V. Petrov, J. Pizzo, T. Qian, K. Sanwalka, O. Schmitz, J. Wallace, D. Yakovlev, M. Yu, and C.B. Forest, *J. Plasma Phys.* **89**, 975890501 (2023) and references therein.
- [45] P. A. Bagryansky, A. V. Anikeev, A. D. Beklemishev, A. S. Donin, A. A. Ivanov, YuV Kovalenko, E. P. Kruglyakov, A. A. Lizunov, A. V. Lvovskiy, V. V. Maximov, S. V. Murakhtin, E. I. Pinzhenin, V. V. Prikhodko, A. N. Pushkareva, V. Ya. Savkin, A. L. Solomakhin, and K. V. Zaytsev, *Fusion Sci. Technol.* **59**, 31 (2011).
- [46] E. J. Kolmes, I. E. Ochs, and N. J. Fisch, *Phys. Plasmas* **25**, 032508 (2018).