关于哈密顿—雅克比—贝尔曼方程的经典解和典范变换

MOHIT BANSIL AND ALPÁR R. MÉSZÁROS

摘要. 在这篇笔记中，我们展示了规范变换如何揭示确定性最优控制问题中的隐藏凸性属性，这进而导致一阶 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的 C^{i}_{loc} 全局存在解。

1. 介绍

对于给定的数据 $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 和 $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 及时间范围 $T > 0$，我们考虑与汉密尔顿—雅克比—贝尔曼（HJB）方程相关的下列柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + H(x, \partial_x u) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u(T,x) = G(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.1}$$

为了方便，我们假设 $H \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ 和 $G \in C^2(\mathbb{R}^d)$，以及这些函数的二阶导数是一致有界的。假设 H 在其第二个变量中是凸的，因此这可以看作是一个拉格朗日函数的勒让德－芬斯勒变换，即我们有

$$H(x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}^d} \{p \cdot v - L(x,-v)\}, \tag{1.2}$$

对于某个给定的 $L \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$。为了方便，我们也假设 L 在其第二个变量中是凸的。在这种情况下，(1.1) 对应于一个变分问题。确实，众所周知，在适当的假设下，价值函数

$$u(t,x) := \inf_{\gamma:[t,T] \to \mathbb{R}^d : \gamma(t) = x} \int_t^T L(\gamma(s), \dot\gamma(s)) \mathrm{d}s + G(\gamma(T)) \tag{1.3}$$

是方程 (1.1) 的唯一粘性解。该解局部 Lipschitz 连续且局部半凹，具有线性连续模（参见 [CS04, Theorem 7.4.12, Theorem 7.4.14]）。

众所周知，然而，唯一的粘性解 u 一般来说 会在有限时间内发展出奇点，即使 H 和 G 是光滑的。可以在相对较直接的方式下构造有限时间奇点形成的示例，见例如 [CS04, Example 1.3.4, Example 6.3.5] 或 [GM22, Appendix B.4]。更具体地说，可以证明例如对于纯二次哈密顿量 $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2$，$u$ 的奇点必须在有限时间内形成，对于任何非凸（且非常数）G。这一事实记录在 [GM23, Theorem 3.1] 中。粘性解奇点集的良好性质已在文献中被广泛研究。关于这个主题的第一个结果可能是在 [CS87] 中获得的。对于进一步处理解的奇点的工作，我们参考读者参阅 [CS89,AC99,AC99,Yu06,CMS97,CY09,CF91, CF14] 和综述论文 [CC21]。奇点形成等价于变分问题 (1.3) 中最优轨迹的非唯一性（参见 [CS04]）。
因此，如果能够确保在 (1.3) 中优化器的唯一性，这将导致价值函数可微分，从而存在唯一一个经典解到 (1.1)。当控制问题中的动态是线性时，如果 L 是联合凸的且 G 是凸的，则正是这种情况。这意味着 $u(t,\cdot)$ 继承了凸性，因此它成为任意时间范围内的 $C^{1,1}_{loc}$ 经典解。这一事实及其相关性质是经典的，并且在文献中已有充分记录，参见例如 [CS04, Corollary 7.2.12] 和 [BE84,GR02,Goe05a,Goe05b,Roc70c,Roc70a]。

Date: 2025 年 4 月 13 日.

正如前述工作所显示的，经典解的整体存在性在 HJB 方程理论中更像是例外而不是常规。据我们所知，在上述完全凸区域之外，没有其他关于数据 (H,G)（或 (L,G)）的充分条件能够导致 (1.1) 在类 $C^{1,1}_{loc}$ 中的全局经典适定性理论。上述提到的两种奇点形成的具体情况（[GM22, Appendix B.4] 和 [GM23, Theorem 3.1]）确切地展示了半凸估计一般如何会在有限时间内失效，因此这是导致该类 $C^{1,1}_{loc}$ 中时间全局适定性失败的一个特别原因。

在这篇手稿中，我们展示了线性规范变换的一个特殊类可以揭示新的全局适定理论。让我们描述一下我们的方法背后的哲学思想。给定 $\alpha \in \mathbb{R}$。然后变换

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x,p) \mapsto (x, p - \alpha x)$$

是相空间上的所谓典范变换，它保持哈密顿方程的结构。这样的变换在经典力学中是众所周知的（参见。[Arn89]）。我们将使用以下定义。

$$H_\alpha(x,p) := H(x, p - \alpha x) \tag{1.4}$$

和

$$G_\alpha(x) := G(x) + \frac{\alpha}{2}|x|^2. \tag{1.5}$$

由于这种变换的性质，我们可以陈述论文的第一个结果。

Theorem 1.1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$。然后，u 是 (1.1) 在 $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 中具有数据 (H,G) 的经典解，当且仅当定义为

$$u_\alpha(t,x) := u(t,x) + \frac{\alpha}{2}|x|^2,$$

的 $u_\alpha : (0,T)\times\mathbb{R}^d$ 是在 $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 上具有数据的经典解 (1.1)。(H_α, G_α).

该定理有两个直接的推论。首先，如果我们有一个在类 $C^{1,1}_{loc}$ 中具有数据 (H,G) 的全局适定理论对于 (1.1)，我们将得到一个在整个 $C^{1,1}_{loc}$ 中具有数据 $(H_\alpha, G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 的一参数全局适定性理论族。其次，如果我们能够找到一个实数 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得数据 (H_α, G_α) 的 (1.1) 全局适定，则原问题的数据 (H,G) 也必须是全局适定的。
事实证明，这一第二个结果将揭示出对于类 $C^{1,1}_{loc}$ 中的 (1.1) 真正新的全局适定性理论。因此，作为我们的第二个主要结果（见下述定理 3.4），我们已经确定了 (H,G) 的一些充分条件，这些条件意味着对于某个精确的 $\alpha \in \mathbb{R}$，变换后的数据 (H_α, G_α)（或相应的 (L_α, G_α)）落入众所周知的完全凸区域，因此这给出了在 $C^{1,1}_{loc}$ 中带有原始数据 (H,G) 的 (1.1) 的整体适定性。我们的主要结果的一个直接推论可以概括如下。

Corollary 1.2. 设 $H : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 和 $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是具有二阶一致有界导数的 C^2 函数。另外假设 $H(x,\cdot)$ 在 x 上是一致强凸的。
然后，我们有以下内容。

(1) 存在一个仅依赖于 $\|D^2G\|_\infty$、$\|D^2H\|_\infty$ 及 $\partial_{pp}H$ 的下界的常数 $C>0$，使得带有数据 $(\tilde{H}, G)$ 的 (1.1) 满足：其中

$$\tilde{H}(x,p) := H(x,p) + \alpha x \cdot p,$$

在类 $C^{1,1}_{\rm loc}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 中整体适定，对于任意 $T>0$，只要 $\alpha > C$ 成立。

(2) 存在一个常数 $C>0$，它仅取决于 $\|D^2G\|_\infty$、$\|D^2H\|_\infty$ 和 $\partial_{pp}H$ 的下界，使得 (1.1) 在使用数据 $(\tilde{H},G)$ 时，

$$\tilde{H}(x,p) := H(x,p) - \alpha\frac{|x|^2}{2},$$

在类 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 中是全局适定的，对于任何 $T>0$，只要 $\alpha>C$。

Remark 1.3. 我们看到，适当地修改一个哈密顿 – 雅各比 – 贝尔曼方程的现有数据可以“凸化”问题，并且这反过来导致了一个全局的时间经典适定性理论。推论 1.2 表明，这个过程不仅可以由添加项 $(x,p)\mapsto -\alpha\frac{|x|^2}{2}$ 到哈密顿量，但也要添加 $(x,p)\mapsto \alpha x\cdot p$ 到 H 完成，对于适当选择的 α 也是如此。

Remark 1.4. 细心的读者会注意到我们仅使用了‘上三角’典范变换，即形式为 $(x,p)\mapsto(x,p-\alpha x)$ 的变换。这样做的原因是，为了使一个常微分方程系统（在 (X_s,P_s) 个未知数中）成为 HJB 方程的特征方程，不仅需要具有哈密顿系统的结构，边界条件也必须是特定的形式。具体来说，为了保持边界条件 $X_0=x_0$ 的结构，我们需要变换为上三角形式。从这里我们可以想象对某个常数矩阵 A 进行一个变换 $(x,p)\mapsto(x,p-Ax)$。为了保持条件 $P_T=\nabla G(X_T)$ 的结构（具体来说，右侧是某个函数的梯度），我们需要 A 是对称的。选择 $A=\alpha I$ 是出于简化考虑，并且相同的论点应该适用于任何对称矩阵 A。

Remark 1.5. 虽然我们演示了这种典范变换技术来获得 HJB 方程的经典全局适定性理论，这种方法对于任何其他 HJB 方程的特征同样适用。例如，如果对于带有数据 (H,G) 的 HJB 方程（例如，非可微点位于一条光滑曲线上）有结果，则相同的结论也适用于变换后的数据 (H_α,G_α)（实际上，非可微点将是完全相同的）。

我们在此结束介绍，并附上一些结论性备注。

- 在本手稿中，为了简化阐述，我们选择仅考虑形式为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\ni(x,p)\mapsto(x,p-\alpha x)$ 的一类简单线性正则变换。然而，我们的方法可能适用于形式为

$$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\ni(x,p)\mapsto(x,p-\nabla\varphi(x)),$$

  的更一般非线性变换，对于合适的势函数 $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$。虽然这些扩展在我们的分析中不会带来概念上的困难，但它们会引入繁重的技术计算。因此，我们决定在此手稿中不进行这些扩展。
- 我们的方法仅采用哈密顿视角，因此，特别是通过纯粹处理哈密顿系统，我们认为对于那些在动量变量上不一定凸的哈密顿函数也能证明类似的结果。同样，为了简化阐述，这里我们不探讨这个方向。
- 典型变换在更一般的辛流形上的哈密顿系统中已经被很好地理解，因为这些是余切丛上的辛同态（参见 [Arn89]）。尽管我们在这里只考虑一个简单的欧几里得设置，但我们怀疑我们的想法可能对研究在更一般几何框架中的汉密尔顿—雅可比—贝尔曼方程的解也是有用的。这样的研究将超出本文的范围。
- 事实证明，本文中考虑的规范变换揭示了在特定无穷维设置中的新深层适定性理论，即对于均值场博弈中的主方程。这些结果在我们的配套论文 [BM24] 中进行了详细说明。

论文的其余部分包含两个简短的部分。在第 2 节中，为了教学目的，我们详细介绍了从拉格朗日视角出发特定正则变换的作用。第 3 节包含了我们的主要结果，并且这一部分内容完全是从哈密顿视角撰写的。

2. 规范变换和拉格朗日视角的经典解

对于 $t \in (0,T)$，考虑定义的功能性 $\mathcal{F}_t : C^1((t,T);\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_t(\gamma) := \int_t^T L(\gamma(x), \dot\gamma(s))\mathrm{d}s + G(\gamma(T)).$$

此外，我们将可容许曲线的集合定义为

$$\mathrm{Adm}_{t,x} := \{\gamma \in C^1((t,T);\mathbb{R}^d) : \gamma(t) = x\}.$$

使用此泛函，可以得到

$$u(t,x) := \inf_{\gamma\in\mathrm{Adm}_{t,x}} \mathcal{F}_t(\gamma).$$

方程 (1.1) 的解的可微性与最优控制问题 (1.3) 中的极小值点的唯一性密切相关（例如参见 [CS04, Example 1.3.4, Example 6.3.5] 或 [GM22, Appendix B.4] 中的讨论）。特别地，众所周知泛函 $\gamma \mapsto \mathcal{F}(\gamma)$ 的凸性将意味着 $u(t,\cdot)$ 是凸的，这进而进一步意味着 u 是方程 (1.1) 在类 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 中的经典解（参见 [CS04, Theorem 7.4.13]）。$\gamma \mapsto \mathcal{F}(\gamma)$ 的凸性可以通过 L 的联合凸性和 G 的凸性来保证。

然而，由于优化问题中的端点，即 $\gamma(t) = x$，是固定的，我们可以同样考虑泛函

$$\mathcal{F}_{t,\alpha}(\gamma) := \mathcal{F}_t(\gamma) + \frac{\alpha}{2}|x|^2 = \mathcal{F}_t(\gamma) + \frac{\alpha}{2}|\gamma(t)|^2,$$

对于任何 $\alpha \in \mathbb{R}$。在这种情况下，我们只需有

$$u(t,x) + \frac{\alpha}{2}|x|^2 := \inf_{\gamma\in\mathrm{Adm}_{t,x}} \mathcal{F}_{t,\alpha}(\gamma). \tag{2.1}$$

遵循经典力学中的一个标准思想，我们将这个新项重写为其时间导数的积分和初始项，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{t,\alpha}(\gamma) &= \int_t^T L(\gamma(x),\dot\gamma(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\alpha}{2}|\gamma(s)|^2\right)\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2}|\gamma(T)|^2 + G(\gamma(T))\\ &= \int_t^T L(\gamma(x),\dot\gamma(s)) - \alpha\langle\gamma(s),\dot\gamma(s)\rangle\mathrm{d}s + G(\gamma(T)) + \frac{\alpha}{2}|\gamma(T)|^2\end{aligned}$$

现在请注意，虽然

$$\gamma \mapsto \mathcal{F}_t(\gamma),$$

可能不具备凸性，

$$\gamma \mapsto \mathcal{F}_{t,\alpha}(\gamma),$$

对于某些 $\alpha \in \mathbb{R}$ 可能具备凸性。尽管

$$\inf_{\gamma\in\mathrm{Adm}_{t,x}} \mathcal{F}_t(\gamma) \quad \text{and} \quad \inf_{\gamma\in\mathrm{Adm}_{t,x}} \mathcal{F}_{t,\alpha}(\gamma)$$

是相同的问题，但它们的最优值相差一个常数 $\frac{\alpha}{2}|x|^2$，并且特别地，它们具有相同的最小化器。

因此，这样的变换可以揭示数据中隐藏的凸结构，在问题的原始设定下这些结构并不明显，特别是如果 $\gamma \mapsto \mathcal{F}_{t,\alpha}$ 是凸的，即使没有 $\gamma \mapsto \mathcal{F}_t$ 的凸性，(1.1) 在类 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 中也是适定的。

我们也有相反的情况，即。当 $\gamma \mapsto \mathcal{F}_t$ 是凸的，而 $\gamma \mapsto \mathcal{F}_{t,\alpha}$ 不是凸的时候。由于泛函的凸性可以通过拉格朗日量和最终数据的凸性来表征，因此自然地定义以下数量。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，令 $L_\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 被定义为

$$L_\alpha(x,v) := L(x,v) - \alpha x \cdot v$$

以及 $G_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，定义为

$$G_\alpha(x) := G(x) + \frac{\alpha}{2}|x|^2. \tag{2.2}$$

根据之前的讨论，我们可以得出以下命题。

Proposition 2.1. *我们有如下内容。*

(i) *设 $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是凸的，并且设 $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是联合凸的，进一步假设 G 和 L 的二阶导数有界。然后，存在一个 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$，使得 L_α 不是联合凸的且对于任何 $\alpha < \alpha_0$，G_α 都不是凸的。*

(ii) *存在不联合凸的 $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 和非凸的 $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得对于合适的 $\alpha \in \mathbb{R}$，L_α 变为联合凸且 G_α 变为凸。*

证明. (i) 令 $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义为 $f(v, x) = v \cdot x$。直接计算得出 -1 是 $D^2 f$ 的一个特征值（对应的特征向量是 $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$）。确实，我们看到 $D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 0_d & I_d \\ I_d & 0_d \end{bmatrix}$，其中 0_d 和 I_d 分别表示 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 中的零矩阵和单位矩阵。由此得出结论。因此对于 $\alpha < \hat{\alpha_0} := -\|D^2 L\|_\infty$，我们有 L_α 不是联合凸的。现在设 $\alpha_0 := \min\{\hat{\alpha}_0, -\|\partial_{xx} G\|_{L^\infty}\}$，然后结果随之而来。

(ii) 在上一点中我们构造了非凸的 L_α 和 G_α，但 L 和 G 是凸的。现在如果我们对这些新函数应用相同的变换，即常数 $-\alpha$，$(L_\alpha)_{-\alpha}$ 和 $(G_\alpha)_{-\alpha}$，我们回到了原本是凸的那些原始函数。结论由此得出。 □

对 L 的变换，如上所述，自然地转化为哈密顿量 H。事实上，我们可以看到对应于 L_α 的 H_α 定义如下 1.4。

需要注意的是，之前的变换保留了哈密顿结构和 HJB 方程。这正是导致定理 1.1 的原因，其证明是直接的，我们在下面给出。

定理的证明 1.1. 该结果直接来自于表示公式 (2.1)。或者，直接计算得到

$$\partial_t u_\alpha(t, x) = \partial_t u(t, x) \quad \text{and} \quad \partial_x u_\alpha(t, x) = \partial_x u(t, x) + \alpha x,$$

因此

$$-\partial_t u_\alpha(t, x) + H_\alpha(x, \partial_x u_\alpha(t, x)) = -\partial_t u(t, x) + H(x, \partial_x u(t, x) + \alpha x - \alpha x) = 0,$$

和

$$u_\alpha(T, x) = G_\alpha(x).$$

结果随之得出。 □

Remark 2.2. 由于表示公式 (2.1)，前面的结果显然也适用于黏性解（参见 [CS04, Theorem 7.4.14]）。

3. 从哈密顿系统的视角看正则变换和经典解

基于 [Roc70b, Theorem 33.1]，我们可以得出以下结果。

Lemma 3.1. *$H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 在 (1.2) 中定义的是凹凸的（即 $H(\cdot, p)$ 是凸的对于所有的 $p \in \mathbb{R}^d$ 和 $H(x, \cdot)$ 是对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 凸的当且仅当 L 联合凸。*

从这个引理中我们可以看到，哈密顿-雅各比方程 (1.1) 在类 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ 中的经典解的整体存在性，从哈密顿观点来看，与 H 的凹凸性质以及最终条件 G 的凸性密切相关。

Definition 3.2. For a square matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, we define the symmetric matrix

$$\mathrm{Re}\, A := \frac{1}{2}(A + A^\top).$$

For a symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, we denote by $\lambda_{\min}(A)$ and $\lambda_{\max}(A)$ its smallest and largest eigenvalues, respectively.

Lemma 3.3. 假设

$$\left(w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w\right)^2 - \left(w^\top \partial_{pp} H(x,p) w\right)\left(w^\top \partial_{xx} H(x,p) w\right) \geq 0,\ \ \forall w \in \mathbb{R}^d,\ \ \forall x, p \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

定义

$$\alpha := \inf_{\substack{(x,p,w) \in \mathbb{R}^{3d} \\ \|w\| = 1}} \frac{w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w + \sqrt{(w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,y) w)^2 - (w^\top \partial_{pp} H(x,p) w)(w^\top \partial_{xx} H(x,p) w)}}{w^\top \partial_{pp} H(x,p) w} \tag{3.2}$$

假设 $x \mapsto G(x) + \alpha \frac{|x|^2}{2}$ 是凸的并且

$$\alpha \geq \sup_{\substack{(x,p,w) \in \mathbb{R}^{3d} \\ \|w\| = 1}} \frac{w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w - \sqrt{(w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w)^2 - (w^\top \partial_{pp} H(x,p) w)(w^\top \partial_{xx} H(x,p) w)}}{w^\top \partial_{pp} H(x,p) w} \tag{3.3}$$

那么带有数据 (H, G) 的 *Hamilton–Jacobi* 方程 (1.1) 在全球类 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ 中是适定的。

证明. 使用 (1.4) 和 (2.2)，我们定义了 H_α 和 G_α，选择了声明中给出的 α 特定值。我们看到 G_α 是凸的。此外，我们计算任意的 $w \in \mathbb{R}^d$ 和任意的 $(x,p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$w^\top \partial_{xx} H_\alpha(x,p) w = w^\top \partial_{xx} H(x, p - \alpha x) w - 2\alpha w^\top \mathrm{Re}(\partial_{xp} H(x, p-\alpha x)) w + \alpha^2 w^\top \partial_{pp} H(x, p - \alpha x) w$$

这个表达式是关于 α 的二次多项式且最高次项系数为正。定理的条件保证了该多项式在 α 处非正，即

$$\begin{aligned}
&\frac{w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w - \sqrt{(w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w)^2 - (w^\top \partial_{pp} H(x,p) w)(w^\top \partial_{xx} H(x,p) w)}}{w^\top \partial_{pp} H(x,p) w} \\
&\leq \alpha \\
&\leq \frac{w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w + \sqrt{(w^\top \mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p) w)^2 - (w^\top \partial_{pp} H(x,p) w)(w^\top \partial_{xx} H(x,p) w)}}{w^\top \partial_{pp} H(x,p) w},
\end{aligned}$$

对于所有 $(x,p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 和所有 $w \in \mathbb{R}^d$。
特别是 H_α 在 x 上是凹的。此外，这种特定的变换不会改变 H_α 在 p 变量上的凸性，即 $\partial_{pp} H_\alpha(x,p) = \partial_{pp} H(x, p - \alpha x)$。该引理的论点由引理 3.1 和 [CS04, Theorem 7.4.13] 推出。 □

作为这个引理的结果，我们可以得出以下结论。

Theorem 3.4. 我们定义以下量

$$\lambda_0 := \inf_{(x,p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \lambda_{\min}\left(\mathrm{Re}\, \partial_{xp} H(x,p)\right),$$

$$\lambda_H := \sup_{(x,p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \lambda_{\max}\left(\partial_{xx} H(x,p)\right)$$

和

$$\lambda_G := \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \lambda_{\min}\left(\partial_{xx}G(x)\right).$$

假设

$$\lambda_0^2 \geq \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H \quad \text{and} \quad \text{that} \quad \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H} + \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_G \geq 0.$$

进一步假设要么 $\lambda_H \leq 0$ 要么 $\lambda_0 \geq 0$。然后哈密顿—雅各比方程 (1.1) 在任何 $T > 0$ 中都是全局适定的，在 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 类中。

证明. 我们验证引理 3.3 的假设。首先，让我们考虑不等式 (3.1)。
如果 $\lambda_H \leq 0$，则 (3.1) 立即满足。
如果 $\lambda_H > 0$，但 $\lambda_0 \geq 0$ 我们有以下内容。根据 λ_0，$w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w \geq \lambda_0$ 的定义，对于所有的 $(x,p)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 和所有 $w\in\mathbb{R}^d$。由于右边是非负的，我们可以平方得到

$$(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w)^2 \geq \lambda_0^2 \geq \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H,$$

这表明

$$(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w)^2 \geq (w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w).$$

因此，(3.1) 成立。

我们验证引理 3.3 中的其他假设。令 α 如 (3.2) 中所定义。就像之前一样，我们将区分两种情况。
情况 1。$\lambda_H \leq 0$.
在这种情况下，我们有 $(w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w) \leq 0$，对于所有的 $(x,p)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 和所有的 $w\in\mathbb{R}^d$。因此

$$\alpha \geq 0 \geq \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w - \sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w)^2 - (w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w)}}{w^\top\partial_{pp}H(x,p)w},$$

对于所有的 $(x,p)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 和所有的 $w\in\mathbb{R}^d$。这意味着 (3.3)。
此外，我们有

$$\begin{aligned}\alpha &= \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w + \sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,y)w)^2 - (w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w)}}{w^\top\partial_{pp}H(x,p)w}\\ &\geq \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w + \sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,y)w)^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w)}}{\|\partial_{pp}H\|_\infty},\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了函数 $f : \{(a,b,c):\ c\geq 0,\ b\leq 0,\ a^2\geq bc\}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(a,b,c)=\frac{a+\sqrt{a^2-bc}}{c}$ 是关于 c 递减的。

继续我们有

$$
\begin{aligned}
\alpha &\geq \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w + \sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,y)w)^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty (w^\top \partial_{xx}H(x,p)w)}}{\|\partial_{pp}H\|_\infty} \\
&\geq \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w + \sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,y)w)^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H}}{\|\partial_{pp}H\|_\infty} \\
&\geq \frac{\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H}}{\|\partial_{pp}H\|_\infty}
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式是因为函数 $f : \{(a,b) :\ b \leq 0\} \to \mathbb{R}$ 定义为 $f(a,b) = a + \sqrt{a^2 - b}$ 在 a 中是递增的。由此，根据本定理的假设可知 $x \mapsto G(x) + \alpha\frac{|x|^2}{2}$ 是凸的。

情况 *2*。$\lambda_0 \geq 0$ 我们注意到，不失一般性，我们可以假设不等式 $\lambda_H \geq 0$ 成立。
我们有

(3.4)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w + \sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,y)w)^2 - (w^\top \partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top \partial_{xx}H(x,p)w)}}{w^\top \partial_{pp}H(x,p)w} \\
&\geq \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - (w^\top \partial_{pp}H(x,p)w)\lambda_H}}{w^\top \partial_{pp}H(x,p)w} \\
&\geq \inf_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H}}{w^\top \partial_{pp}H(x,p)w} \\
&\geq \frac{\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H}}{\|\partial_{pp}H\|_\infty}
\end{aligned}
$$

其中最后两个不等式分别由 $\lambda_H \geq 0$ 和 $\lambda_0 \geq 0$ 得出。我们还注意到在之前的不等式链中，所有根号下的量都是非负的。
此外，我们看到 $\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_H} + \|\partial_{pp}H\|_\infty \lambda_G \geq 0$ 表明 $\alpha + \lambda_G \geq 0$，因此 $x \mapsto G(x) + \alpha\frac{|x|^2}{2}$ 是凸的。

接下来注意函数 $f:\{(a,b):\ a,b\geq 0,\ a^2\geq b\}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(a,b)=a-\sqrt{a^2-b}$ 是在 a 上递减的。因此

$$
\begin{aligned}
&\frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w-\sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w)^2-(w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w)}}{w^\top\partial_{pp}H(x,p)w} \\
&\leq \frac{\lambda_0-\sqrt{\lambda_0^2-(w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w)}}{w^\top\partial_{pp}H(x,p)w} \\
&\leq \frac{\lambda_0-\sqrt{\lambda_0^2-(w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)\lambda_H}}{w^\top\partial_{pp}H(x,p)w} \\
&\leq \frac{\lambda_0-\sqrt{\lambda_0^2-\|\partial_{pp}H\|_\infty\lambda_H}}{\|\partial_{pp}H\|_\infty}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

其中最后一个不等式来自于函数 $f:\{(a,b,c):\ a,b,c\geq 0,\ a^2\geq bc\}\to\mathbb{R}$，定义为 $f(a,b,c)=\frac{a-\sqrt{a^2-bc}}{c}$ 是在 c 上递增的事实。结合 (3.4) 和 (3.5) 我们可以得出

$$
\alpha\geq \sup_{\substack{(x,p,w)\in\mathbb{R}^{3d}\\ \|w\|=1}} \frac{w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,p)w-\sqrt{(w^\top \operatorname{Re}\partial_{xp}H(x,y)w)^2-(w^\top\partial_{pp}H(x,p)w)(w^\top\partial_{xx}H(x,p)w)}}{w^\top\partial_{pp}H(x,p)w},
$$

这完成了本例中的证明。

□

从此定理可立即证明推论 1.2。

推论的证明 *1.2.* 我们看到如果 α 足够大，则定理 3.4 的假设条件得到满足。 □

致谢。作者感谢 Wilfrid Gangbo 提出的宝贵意见和建设性评论。MB 的工作得到了国家科学基金会研究生研究奖学金的支持，资助编号为 DGE-1650604，并且得到了空军科学研究办公室的支持，奖励编号为 FA9550-18-1-0502。ARM 部分得到了 EPSRC 新研究员奖“平均场博弈和主方程”的支持，奖励编号为 EP/X020320/1，并且得到了沙特阿拉伯国王科技大学研究基金（KRF）的支持，奖励编号为 ORA-2021-CRG10-4674.2。两位作者都感谢海布隆数学研究所以及 UKRI/EPSRC 数学科学附加资金计划通过“平均场博弈中的主方程”重点研究资助的部分支持。

数据可用性。我们没有使用或生成数据集。

利益冲突。作者声明他们没有任何利益冲突。

References

[AC99] P. Albano and P. Cannarsa. Structural properties of singularities of semiconcave functions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 28(4):719–740, 1999.

[Arn89] V. I. Arnol′d. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1989. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.

[BE84] M. Bardi and L. C. Evans. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Nonlinear Anal.*, 8(11):1373–1381, 1984.

[BM24] M. Bansil and A.R. Mészáros. Hidden monotonicity and canonical transformations for mean field games and master equations. *preprint*, 2024.

[CC21] P. Cannarsa and W. Cheng. Singularities of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Milan J. Math.*, 89(1):187–215, 2021.

[CF91] P. Cannarsa and H. Frankowska. Some characterizations of optimal trajectories in control theory. *SIAM J. Control Optim.*, 29(6):1322–1347, 1991.

[CF14] P. Cannarsa and H. Frankowska. From pointwise to local regularity for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(3-4):1061–1074, 2014.

[CMS97] P. Cannarsa, A. Mennucci, and C. Sinestrari. Regularity results for solutions of a class of Hamilton-Jacobi equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 140(3):197–223, 1997.

[CS87] P. Cannarsa and H.M. Soner. On the singularities of the viscosity solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 36(3):501–524, 1987.

[CS89] P. Cannarsa and H.M. Soner. Generalized one-sided estimates for solutions of Hamilton-Jacobi equations and applications. *Nonlinear Anal.*, 13(3):305–323, 1989.

[CS04] P. Cannarsa and C. Sinestrari. *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, volume 58 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[CY09] P. Cannarsa and Y. Yu. Singular dynamics for semiconcave functions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 11(5):999–1024, 2009.

[GM22] W. Gangbo and A.R. Mészáros. Global well-posedness of master equations for deterministic displacement convex potential mean field games. *Comm. Pure Appl. Math.*, 75(12):2685–2801, 2022.

[GM23] P.J. Graber and A.R. Mészáros. On monotonicity conditions for mean field games. *J. Funct. Anal.*, 285(9):110095, 2023.

[Goe05a] R. Goebel. Convex optimal control problems with smooth Hamiltonians. *SIAM J. Control Optim.*, 43(5):1787–1811, 2005.

[Goe05b] R. Goebel. Duality and uniqueness of convex solutions to stationary Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(6):2187–2203, 2005.

[GR02] R. Goebel and R. T. Rockafellar. Generalized conjugacy in Hamiltonian-Jacobi theory for fully convex Lagrangians. volume 9, pages 463–473. 2002. Special issue on optimization (Montpellier, 2000).

[Roc70a] R. T. Rockafellar. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. *J. Math. Anal. Appl.*, 32:174–222, 1970.

[Roc70b] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

[Roc70c] R.T. Rockafellar. Generalized Hamiltonian equations for convex problems of Lagrange. *Pacific J. Math.*, 33:411–427, 1970.

[Yu06] Y. Yu. A simple proof of the propagation of singularities for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 5(4):439–444, 2006.

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095-1555, USA
Email address: mbansil@math.ucla.edu

Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham DH1 3LE, UK
Email address: alpar.r.meszaros@durham.ac.uk