

热含量的定性属性

Michiel van den Berg
School of Mathematics, University of Bristol
Fry Building, Woodland Road
Bristol BS8 1UG, United Kingdom
`mamvdb@bristol.ac.uk`

Katie Gittins
Department of Mathematical Sciences, Durham University
Mathematical Sciences & Computer Science Building
Upper Mountjoy Campus, Stockton Road
Durham DH1 3LE, United Kingdom
`katie.gittins@durham.ac.uk`

2025 年 4 月 22 日

摘要

我们获得了黎曼流形和欧几里得空间中域的热含量在各种初始温度条件下的单调性和凸性结果。我们引入了严格递减的温度设置的概念，并证明它是确保热含量单调性的充分条件。此外，在欧几里得空间中，我们构造了一个热含量不单调的区域及其初始条件，以及一个热含量单调但非凸的区域及其初始条件。

数学主题分类 (2020) : { 35K05, 35K20 或 35K15.

关键词 : 热含量, 凸性, 单调性。

1 介绍和主要结果

在本文中，我们研究了欧几里得空间和无边界条件的黎曼流形中的开集上的热流问题的定性性质。

例如，考虑一个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ，其初始温度为 1，而其补集 $\mathbb{R}^m \setminus \Omega$ 的初始温度为 0。没有在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上施加边界条件，热方程在 $\mathbb{R}^m$ 上演化。

该热流问题对应的热半群的等周不等式的一种形式已经在 [11] 中建立，这是通过利用集合的周长与半群的小时间渐近行为之间的联系得出的（另见 [10]）。

我们研究了 Ω 的几何与 Ω 的热含量之间的相互作用，即在时间 t 时留在 Ω 内部的热量。随着 $t \downarrow 0$ 的变化，在多种几何设置中已经得到了 Ω 的热含量的精细渐近行为。例如， $\mathbb{R}^2$ [5] 中的多边形， $\mathbb{R}^m$ [1] 中的角形区域以及包含在一个较大的紧黎曼流形 [3] 内的光滑紧黎曼流形。热内容和热损失的双侧界在 [4] 中对于一个开集在 $\mathbb{R}^m$ 中且具有 R 光滑边界的有限勒贝格测度的情况下获得，并在 [2] 中对于完全、平滑、非紧致的 m 维黎曼流形中的开集情况下获得。最近，热内容已在度量测度空间和次黎曼流形 [7, 13] 的背景下进行了分析。

本文的目的是研究在未对 $\partial\Omega$ 施加边界条件的情况下， Ω 的热含量作为 t 函数的单调性和凸性，涉及各种初始数据。

令 M 是一个光滑、连通、完备且在随机意义上完备的 m 维黎曼流形，并设 Δ 是作用于函数空间 $L^2(M)$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。众所周知（见 [8], [9]）热方程

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in M, \quad t > 0, \quad (1)$$

有一个唯一、极小的正基本解 $p_M(x, y; t)$ 其中 $x \in M, y \in M, t > 0$ 。此解称为 M 的狄利克雷热核，在 x, y 中是对称的，严格正，在 $x, y \in M$ 和 $t > 0$ 上联合光滑，并且它满足半群性质

$$p_M(x, y; s+t) = \int_M dz \, p_M(x, z; s) p_M(z, y; t), \quad (2)$$

对于所有的 $x, y \in M$ 和 $t, s > 0$ ，其中 dz 是 M 上的黎曼测度。此外，

$$\int_M dy \, p_M(x, y; t) = 1 \quad (3)$$

由于 M 是随机完整的。设 Ω 为 M 的开子集。方程 (1) 在初始条件

$$u(x; 0^+) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

下对于函数 ψ 在 Ω 的各种函数空间中存在解

$$u_{\Omega, \psi}(x; t) = \int_{\Omega} dy \, p_M(x, y; t) \psi(y), \quad (5)$$

。例如，设 $\psi \in C_b(\Omega), \psi \geq 0, \psi \not\equiv 0$ 是从 Ω 到 $[0, \infty)$ 的有界连续函数集合。则初始条件 (4) 在以下意义下被理解：当 $t \downarrow 0$ 时， $u_{\Omega, \psi}(\cdot; t) \rightarrow \psi(\cdot)$ 收敛，且这种收敛是一致的。

令 Ω 是 M 的一个非空开子集, 并且令 $\psi : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ 有界且可测。我们定义 Ω 在初始数据 ψ 下的热含量为

$$H_{\Omega, \psi}(t) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} dx dy p_M(x, y; t) \psi(y). \quad (6)$$

在 [12, Proposition 1] 中表明, 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是有界的, 则 $t \mapsto H_{\Omega}(t)$ 是递减且凸的。在下面的定理 1 中, 我们考虑黎曼流形的一种更一般的情况。一个特别感兴趣的情形是当 $\psi \equiv 1$ 在 Ω 上时, 对此我们写为

$$H_{\Omega}(t) = H_{\Omega, 1}(t).$$

我们引入以下定义, 这将为我们提供一个确保单调热含量的充分条件。

定义 1. 设 M 是一个光滑、连通、完备且在随机意义上完备的 m 维黎曼流形。开集 $\Omega \subset M$ 是一个 (严格) 递减温度集, 如果对于所有的 $x \in \Omega$, $t \mapsto u_{\Omega, 1}(x; t)$ 是 (严格) 递减的。

我们的第一个主要结果如下。

定理 1. 令 Ω 是 M 的一个非空开子集, 其中 M 是一个光滑、连通、完备且随机完备的 m 维黎曼流形。

- (i) 如果对于所有 $t > 0$ 都有 $H_{\Omega}(t) < \infty$, 则 $t \mapsto H_{\Omega}(t)$ 是递减且凸的。此外, $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{\Omega}(t)$ 存在。
- (二) 如果对所有 $t > 0$ 均有 $H_{\Omega}(t) < \infty$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{\Omega}(t) = 0$, 则 $H_{\Omega}(t)$ 关于 t 的所有右导数严格为负, 且 $t \mapsto H_{\Omega}(t)$ 严格递减。
- (iii) 如果 M 还是闭合的, 那么 $t \mapsto H_{\Omega}(t)$ 是严格递减的, 并且仅当 $|M \setminus \Omega| > 0$ 时才是严格凸的。
- (四) 如果 $\Omega \subset M$ 是一个具有有限测度的 (严格) 递减温度集, 且如果 $\psi : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ 是有界的和可测的, 则 $t \mapsto H_{\Omega, \psi}(t)$ 是 (严格) 递减的。

所有剩余的定理都涉及欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 的结果。

$$p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) = \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{m/2}}. \quad (7)$$

对于 $\psi \equiv 1$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 的情况, 在 [1, Proposition 8] 中表明, 如果 Ω 是凸的, 则 Ω 是一个递减温度集。在 [1] 的示例 6 中表明, 一个球和一个合适的同轴圆环在 $\mathbb{R}^2$ 中的不相交并集不是一个递减温度集。下面我们证明两个半径为 δ 的球在 $\mathbb{R}^m$ 中的距离为 2 时, 对于某些足够小的 δ 是一个严格递减温度集。因此, 在 [1, Proposition 8] 中的凸性假设是充分但非必要且充足的。

定理 2. 令 $\Omega_\delta = B_\delta(c_1) \cup B_\delta(c_2) \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ 和 $c_1 = (-1 - \delta, 0, \dots, 0)$, $c_2 = (1 + \delta, 0, \dots, 0)$ 。令 $\psi = \mathbf{1}_{\Omega_\delta}$ 。如果 $\delta = \frac{1}{20}$, 那么 Ω_δ 是一个严格递减的温度集合。

在定理 3 中, 对于 $\mathbb{R}^m$ 中非空、开集且有界集合, 我们获得了热含量二阶导数的下界, 并证明了当 t 足够大时该导数远离 0, 并且得到了热含量一阶导数的上界, 并证明了该导数远离 0。

定理 3. 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中一个非空的开集, 并且具有 $\text{diam}(\Omega) < \infty$, 则

$$(i) \quad \frac{d^2 H_\Omega(t)}{dt^2} \geq \frac{4m^2 + 4m - 7}{16t^2} H_\Omega(t), \quad t \geq (\text{diam}(\Omega))^2, \quad (8)$$

(二)

$$\frac{d^2 H_\Omega(t)}{dt^2} \geq \begin{cases} 0, & t < (\text{diam}(\Omega))^2, \\ (4m^2 + 4m - 7)\pi^2 e^{-1/4} \frac{|\Omega|^2}{(4\pi t)^{(m+4)/2}}, & t \geq (\text{diam}(\Omega))^2, \end{cases} \quad (9)$$

(iii)

$$\frac{dH_\Omega(t)}{dt} \leq \begin{cases} -\frac{4m^2 + 4m - 7}{2(m+2)} \pi e^{-1/4} \frac{|\Omega|^2}{(4\pi(\text{diam}(\Omega))^2)^{(m+2)/2}}, & 0 < t \leq (\text{diam}(\Omega))^2, \\ -\frac{4m^2 + 4m - 7}{2(m+2)} \pi e^{-1/4} \frac{|\Omega|^2}{(4\pi t)^{(m+2)/2}}, & t \geq (\text{diam}(\Omega))^2, \end{cases} \quad (10)$$

(四)

$$\frac{dH_\Omega(t)}{dt} \leq -\frac{4m^2 + 4m - 7}{8(m+2)t} e^{-1/4} H_\Omega(t), \quad t \geq (\text{diam}(\Omega))^2.$$

定理 3 可以推广到非负、可测的初始温度 ψ 的情况如下。

推论 4. 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个非空开集, 并且有 $\text{diam}(\Omega) < \infty$, 而 $\psi \geq 0$ 和 $\psi \not\equiv 0$ 有界且可测, 则对于 $H_{\Omega, \psi}$ 的结果与定理 3 相类似。此外, (一), (四) 的类似部分成立, 其中将 H_Ω 替换为 $H_{\Omega, \psi}$, 而 (二), (三) 的类似部分成立, 其中将 $|\Omega|^2$ 替换为 $|\Omega| \int_\Omega \psi(y) dy$ 。

推论 4 立即由定理 3 的证明得出。

我们现在探讨初始数据 ψ 的变化对 $t \mapsto H_{\Omega, \psi}(t)$ 的单调性和凸性的影响。

在整个过程中, 对于 $r_2 > r_1 > 0$, $\tilde{c} \in \mathbb{R}^m$, 我们设 $B_{r_1}(\tilde{c}) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - \tilde{c}| < r_1\}$, $A_{(r_1, r_2)} = \{x \in \mathbb{R}^m : r_1 < |x| < r_2\}$ 和 $\omega_m = |B_1(0)|$ 。

首先, 我们构造一个示例, 表明如果 ψ 在 Ω 上不是常数, 则 $t \mapsto H_{\Omega, \psi}(t)$ 不需要在 t 上单调。

定理 5. 设 $m \in \mathbb{N}$, $c > 2$, $t^* > e^{9/(2m)}$, 令

$$\Omega_c = B_1(0) \cup A_{(2,c)} \subset \mathbb{R}^m, \quad \psi(x) = \mathbf{1}_{B_1(0)}(x).$$

如果

$$c > (32t^*)^{1/2} \left(\log \left(\frac{2^{5m/2} \Gamma((m+2)/2)}{2^m - 1} (e^{-9/4} - t^{*-m/2})^{-1} \right) \right)^{1/2}, \quad (11)$$

那么 $H_{\Omega_c, \psi}(0) > H_{\Omega_c, \psi}(t^*) > H_{\Omega_c, \psi}(1)$, 使得 $t \mapsto H_{\Omega_c, \psi}(t)$ 不是单调的。

作为定理 5 的结果, 由于 $t \mapsto H_{\Omega_c, \psi}(t)$ 不是单调的, 我们根据定理 1 (iv) 推断出, 对于足够大的 c , Ω_c 不是一个递减温度集。

此外, 我们构造了一个示例, 表明如果 ψ 不是常数函数在 Ω 上, 则 $t \mapsto H_{\Omega, \psi}(t)$ 可以是 t 的一个递减函数但不必是凸的。

定理 6. 令 $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi(y) = |1 - |y||^\alpha$ 满足 $\alpha > 1$, 则 $t \mapsto H_{B_1(0), \psi}(t)$ 是递减的但不是凸的。

定理 1, 2, 3, 5, 6 的证明分别推迟到第 2 节, 3 节, 4 节, 5 节, 6 节。

2 定理的证明 1

证明. (i) 对于 $t > 0$, 由 (5) 我们有

$$u_\Omega(x; t) = \int_\Omega dy p_M(x, y; t). \quad (12)$$

我们首先证明 $t \mapsto H_\Omega(t)$ 是递减的。由 (2) 和 (12) 我们有对于 $t > 0, s > 0$,

$$\begin{aligned} u_\Omega(x; t+s) &= \int_\Omega dy p_M(x, y; t+s) \\ &= \int_\Omega dy \int_M dz p_M(x, z; t) p_M(z, y; s) \\ &= \int_M dz p_M(x, z; t) u_\Omega(z; s), \end{aligned} \quad (13)$$

其中我们在最后一个等式中使用了托内利定理。对 (13) 关于 x 在 Ω 上进行积分得到

$$H_\Omega(t+s) = \int_M dx u_\Omega(x; t) u_\Omega(x; s). \quad (14)$$

由 (14), (13), (2), (3) 和热核的对称性可知

$$\begin{aligned}
H_\Omega(t+s) &= \int_M dx u_\Omega(x; (t+s)/2)^2 \\
&= \int_M dx \int_M dy_1 p_M(x, y_1; s/2) u_\Omega(y_1; t/2) \int_M dy_2 p_M(x, y_2; s/2) u_\Omega(y_2; t/2) \\
&= \int_M dy_1 \int_M dy_2 p_M(y_1, y_2; s) u_\Omega(y_1; t/2) u_\Omega(y_2; t/2) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_M dy_1 \int_M dy_2 p_M(y_1, y_2; s) \left(u_\Omega(y_1; t/2)^2 + u_\Omega(y_2; t/2)^2 \right) \\
&= \int_M dy_1 \int_M dy_2 p_M(y_1, y_2; s) u_\Omega(y_1; t/2)^2 \\
&= \int_M dy_1 u_\Omega(y_1; t/2)^2 \\
&= H_\Omega(t).
\end{aligned}$$

为了证明凸性, 我们首先注意到由于 $H_\Omega(t) < \infty, t > 0$, 只需证明 H 是中点凸的。参见第 164-167 页在 [6]。设 $t > 0, \delta > 0$ 。由 (14), 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(H_\Omega(t) + H_\Omega(t+2\delta) \right) &= \frac{1}{2} \int_M dz \left(u_\Omega(z; t/2)^2 + u_\Omega(z; (t+2\delta)/2)^2 \right) \\
&\geq \int_M dz u_\Omega(z; t/2) u_\Omega(z; (t+2\delta)/2) \\
&= H_\Omega(t+\delta).
\end{aligned}$$

这证明了 H_Ω 的凸性。由于映射 $t \mapsto H_\Omega(t)$ 是递减且下有界的, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} H_\Omega(t)$ 存在。

(ii) 由于 $t \mapsto H_\Omega(t)$ 的凸性, 我们有右导数 $H'_\Omega(t) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (H_\Omega(t+\varepsilon) - H_\Omega(t))$ 在 t 中是非减的。参见第 167 页的 [6]。因此如果对于某个 $T > 0$ 有 $H'_\Omega(T) \geq 0$, 则 $H'_\Omega(t) \geq 0, t \geq T$ 。这进而意味着 $H_\Omega(t) \geq H_\Omega(T) > 0, t \geq T$ 。这与 $\lim_{t \rightarrow \infty} H_\Omega(t) = 0$ 和 $H'_\Omega(T) < 0, T > 0$ 矛盾。因此 $t \mapsto H_\Omega(t)$ 是严格递减的。

(iii) 我们注意到如果 $|M \setminus \Omega| = 0$, 则

$$\begin{aligned}
H_\Omega(t) &= \int_\Omega \int_\Omega dx dy p_M(x, y; t) \\
&= \int_M \int_M dx dy p_M(x, y; t) \\
&= H_M(t) = |M|,
\end{aligned}$$

因为光滑的闭黎曼流形是随机完全的。因此 $t \mapsto H_\Omega(t)$ 是常数, 并且不是严格递减的也不是严格凸的。接下来考虑情况 $0 < |\Omega| < |M|$ 。由于 M 是光滑且闭合的, Laplace-Beltrami 算子 Δ 在 $L^2(M)$ 上的作用谱是离散的, 并由在 ∞ 处积累的特征值 $\{\mu_1(M) \leq \mu_2(M) \leq \dots\}$ 组成。令 $\{u_{j,M}, j \in \mathbb{N}\}$ 表示相应的正交基特

征函数。由于 M 是连通的, $\mu_1(M) = 0$ 并且具有重数 1。此外 $u_{1,M} = |M|^{-1/2}$ 。 M 的最小热核具有由

$$p_M(x, y; t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\mu_j(M)} u_{j,M}(x) u_{j,M}(y).$$

给出的 $L^2(M)$ 特征函数展开。根据富比尼定理, 可以得出

$$H_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} dy p_M(x, y; t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\mu_j(M)} \left(\int_{\Omega} u_{j,M} \right)^2. \quad (15)$$

我们有由 (15) 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{\Omega}(t) = \left(\int_{\Omega} u_{1,M} \right)^2 = \frac{|\Omega|^2}{|M|} < |\Omega|,$$

这是假设的结果。由于 $H_{\Omega}(0) = |\Omega|$, 我们得出结论 $H_{\Omega}(t)$ 不是常数。那么

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{\Omega}(t) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(M) e^{-t\mu_j(M)} \left(\int_{\Omega} u_{j,M} \right)^2 \\ &= - \sum_{j=2}^{\infty} \mu_j(M) e^{-t\mu_j(M)} \left(\int_{\Omega} u_{j,M} \right)^2, \end{aligned}$$

不恒等于 0-函数。令

$$j^* = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq 2, \int_{\Omega} u_{j,M} \neq 0\}.$$

则

$$\frac{d}{dt} H_{\Omega}(t) \leq -\mu_{j^*}(M) e^{-t\mu_{j^*}(M)} \left(\int_{\Omega} u_{j^*,M} \right)^2 < 0,$$

且 $t \mapsto H_{\Omega}(t)$ 严格递减。类似地,

$$\frac{d^2}{dt^2} H_{\Omega}(t) \geq (\mu_{j^*}(M))^2 e^{-t\mu_{j^*}(M)} \left(\int_{\Omega} u_{j^*,M} \right)^2 > 0,$$

和 $t \mapsto H_{\Omega}(t)$ 是严格凸的。

(iv) 由 (5) 和 (6),

$$H_{\Omega,\psi}(t) = \int_{\Omega} dy u_{\Omega,1}(y; t) \psi(y).$$

由于 $t \mapsto u_{\Omega,1}(y; t)$ 是 (严格) 递减的, 右侧的被积函数是 (严格) 递减的。 $\square$

3 定理的证明 2

证明. 由于初始数据关于超平面 $x_1 = 0$ 对称, 因此在这个超平面上没有热流通过, 并且热方程在 $x_1 = 0$ 处满足诺依曼边界条件。半空间 $\{x \in \mathbb{R}^m : x_1 > 0\} = \mathbb{R}_+^m$ 的 Neumann 热核表示为并给出如下:

$$\pi_{\mathbb{R}_+^m}(x, y; t) = (4\pi t)^{-m/2} \left(e^{-|x-y|^2/(4t)} + e^{-|x+y|^2/(4t)} \right). \quad (16)$$

因此, 对于 (1) 具有 $M = \Omega_\delta$ 和 $\psi = \mathbf{1}_{\Omega_\delta}$ 对于 $x_1 > 0$ 的解由下式给出:

$$u_{\Omega_\delta}(x; t) = \int_{B_\delta(c_2)} dy \pi_{\mathbb{R}_+^m}(x, y; t), \quad x_1 > 0. \quad (17)$$

为了证明 Ω_δ 是一个严格递减的温度集, 我们必须证明

$$\frac{\partial u_{\Omega_\delta}(x; t)}{\partial t} < 0, \quad t > 0, \quad x \in B_\delta(c),$$

其中我们设定了 $c = c_2$ 。由 (16) 和 (17) 我们发现

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\Omega_\delta}(x; t)}{\partial t} &= \frac{1}{2t(4\pi t)^{m/2}} \int_{B_\delta(c)} dy \\ &\quad \left(e^{-|x-y|^2/(4t)} \left(\frac{|x-y|^2}{2t} - m \right) + e^{-|x+y|^2/(4t)} \left(\frac{|x+y|^2}{2t} - m \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

我们证明了在 (18) 的右边的被积函数对于所有

$$x \in B_\delta(c), \quad y \in B_\delta(c), \quad t \geq 4\delta^2. \quad (19)$$

都是严格负的这进而意味着 (18) 的左边对于所有 $t \geq 4\delta^2$ 都是严格负的由 (19),

$$|x-y| \leq 2\delta, \quad 2 \leq |x+y| \leq 2(1+2\delta). \quad (20)$$

因此

$$e^{-\delta^2/t} \leq e^{-|x-y|^2/(4t)} \leq 1, \quad e^{-(1+2\delta)^2/t} \leq e^{-|x+y|^2/(4t)} \leq e^{-1/t}. \quad (21)$$

因此, 由 (19), (21), (20) 和 $\delta = \frac{1}{20}$ 我们得到对于 $t \geq 4\delta^2$,

$$\begin{aligned} &e^{-|x-y|^2/(4t)} \left(\frac{|x-y|^2}{2t} - m \right) + e^{-|x+y|^2/(4t)} \left(\frac{|x+y|^2}{2t} - m \right) \\ &\leq \frac{2\delta^2}{t} - me^{-\delta^2/t} + \frac{2(1+2\delta)^2}{t} e^{-1/t} - me^{-(1+2\delta)^2/t} \\ &\leq \frac{2\delta^2}{t} - e^{-\delta^2/t} + \frac{2(1+2\delta)^2}{t} e^{-1/t} - e^{-(1+2\delta)^2/t} \\ &\leq \frac{0.005}{t} - e^{-1/4} + \frac{2.42}{t} e^{-1/t} - e^{-1.21/t}. \end{aligned} \quad (22)$$

首先我们考虑情况 $t \geq 4\delta^2 = 0.01$ 。由于 $t \mapsto t^{-1}e^{-1/t}$ 对 $t > 1$ 严格递减, 且 $t \mapsto \frac{0.005}{t}$ 和 $t \mapsto -e^{-1.21/t}$ 对所有 $t > 0$ 也严格递减, 因此只需证明 (22) 的右侧在区间 $[0.01, 1]$ 上严格小于 0。为了进一步缩小这个区间, 我们考虑情况 $0.01 \leq t \leq \frac{1}{4}$ 。在这个区间内, (22) 右边的第一项从上方有界于 $\frac{1}{2}$, 并且右边的第三项从上方有界于 $9.68e^{-4}$ 。通过使用例如 Wolfram Alpha[14] 等方法可以验证, $\frac{1}{2} + 9.68e^{-4} - e^{-1/4} < -0.1$ 。接下来我们考虑区间 $[\frac{1}{4}, 1]$ 。在该区间上, (22)

右边的第一项从上方有界于 $\frac{1}{50}$ 。我们有

$$\begin{aligned} & \max_{\frac{1}{4} \leq t \leq 1} \left(\frac{2.42}{t} e^{-1/t} - e^{-1.21/t} \right) \\ & \leq \max_{\frac{1}{4} \leq t \leq 1} \left(\frac{2.42}{t} - 1 \right) e^{-1/t} + \max_{\frac{1}{4} \leq t \leq 1} \left(e^{-1/t} - e^{-1.21/t} \right) \\ & \leq \max_{t \geq 0} \left(\frac{2.42}{t} - 1 \right) e^{-1/t} + \max_{0 < t \leq 1} \left(e^{-1/t} - e^{-1.21/t} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

验证第一项右边的 (23) 的最大值在 $t = \frac{121}{171}$ 处达到是基本的。这给出了

$$\max_{t \geq 0} \left(\frac{2.42}{t} - 1 \right) e^{-1/t} = \frac{121}{50} e^{-171/121}.$$

此外, $t \mapsto e^{-1/t} - e^{-1.21/t}$ 在 $[0, 1]$ 上是递增的。因此

$$\max_{0 < t \leq 1} \left(e^{-1/t} - e^{-1.21/t} \right) = e^{-1} - e^{-1.21}.$$

通过例如使用 Wolfram Alpha[14], 可以验证

$$\frac{1}{50} + \frac{121}{50} e^{-171/121} + e^{-1} - e^{-1.21} - e^{-1/4} < -0.10019.$$

接下来我们考虑情况 $0 < t \leq 4\delta^2$, $\delta = \frac{1}{20}$ 。对于等式右侧的第二项 (18), 我们有由 (21) 和 (20) 得到

$$e^{-|x+y|^2/(4t)} \left(\frac{|x+y|^2}{2t} - m \right) \leq \frac{2(1+2\delta)^2}{t} e^{-1/t}.$$

因此

$$\int_{B_\delta(c)} dy e^{-|x+y|^2/(4t)} \left(\frac{|x+y|^2}{2t} - m \right) \leq \omega_m \delta^m \frac{2(1+2\delta)^2}{t} e^{-1/t},$$

并且等式右侧的第二项 (18) 被上界限制为

$$\frac{\omega_m \delta^m}{(4\pi t)^{m/2}} \frac{(1+2\delta)^2}{t^2} e^{-1/t}. \quad (24)$$

为了限定等式右侧的第一项 (18), 我们重写这项为

$$\frac{1}{2t(4\pi t)^{m/2}} \int_{B_\delta(c)} dy \left(e^{-|x-y|^2/(4t)} \left(\frac{|x-y|^2}{2t} - m \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_\delta(c)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t).$$

估计这个项对于所有 $x \in B_\delta(c)$ 等价于估计

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{B_\delta(0)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t), \quad x \in B_\delta(0). \quad (25)$$

由于 $B_\delta(0)$ 是凸的, 由 [1, Proposition 8] 可知, 等式下的表达式 (25) 严格为负。下面我们量化这个导数如下。改变变量 $y - x = t^{1/2}\eta$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{B_\delta(0)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) &= \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{\delta t^{-1/2}}(-x)} d\eta e^{-\eta^2/4} \\ &= -\frac{\delta}{2(4\pi)^{m/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{B_\rho(-x)} d\eta e^{-\eta^2/4} \Big|_{\rho=\delta t^{-1/2}} \\ &= -\frac{\delta}{2(4\pi)^{m/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{B_\rho(0)} d\eta e^{-|\eta-x|^2/4} \Big|_{\rho=\delta t^{-1/2}} \\ &= -\frac{\delta}{2(4\pi)^{m/2} t^{3/2}} \int_{\partial B_\rho(0)} \mathcal{H}^{m-1}(d\eta) e^{-|\eta-x|^2/4} \Big|_{\rho=\delta t^{-1/2}},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{H}^{m-1}(d\eta)$ 表示表面测度。对于 $x \in B_{\delta t^{-1/2}}(0)$ 和 $\eta \in \partial B_{\delta t^{-1/2}}(0)$, 我们有 $|x - \eta|^2 \leq 4\delta^2/t$ 。这给出了

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{B_\delta(0)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) &\leq -\frac{\delta}{2(4\pi)^{m/2} t^{3/2}} \int_{\partial B_{\delta t^{-1/2}}(0)} \mathcal{H}^{m-1}(d\eta) e^{-\delta^2/t} \\ &= -\frac{m\omega_m \delta^m}{2t(4\pi t)^{m/2}} e^{-\delta^2/t}.\end{aligned}\tag{26}$$

由 (18), (24) 和 (26),

$$\frac{\partial u_{\Omega_\delta}(x; t)}{\partial t} \leq -\frac{m\omega_m \delta^m}{2t(4\pi t)^{m/2}} e^{-\delta^2/t} + \frac{\omega_m \delta^m}{(4\pi t)^{m/2}} \frac{(1+2\delta)^2}{t^2} e^{-1/t}, \quad x \in B_\delta(0). \tag{27}$$

对于 $0 < t \leq 4\delta^2$, $\delta = \frac{1}{20}$, 由于 $t \mapsto te^{(1-\delta^2)t^{-1}}$ 是递减的, 我们有

$$te^{(1-\delta^2)t^{-1}} \geq 4\delta^2 e^{(1-\delta^2)/(4\delta^2)} > 2(1+2\delta)^2 \geq \frac{2}{m}(1+2\delta)^2.$$

这意味着 (27) 的右侧严格为负。 $\square$

4 定理的证明 3

证明. 一项直接的计算表明通过 (7) 得到

$$\frac{\partial^2 p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t)}{\partial t^2} = \frac{1}{t^2} \left(\left(\frac{m+2}{2} - \frac{b}{t} \right)^2 - \frac{m+2}{2} \right) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t), \tag{28}$$

其中

$$b = \frac{1}{4}|x - y|^2 \leq \frac{1}{4}(\text{diam}(\Omega))^2.$$

对于所有 $t \geq (\text{diam}(\Omega))^2$ 我们有 $\frac{b}{t} \leq \frac{1}{4}$ 。这与 (28) 一起给出了

$$\frac{\partial^2 p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t)}{\partial t^2} \geq \frac{1}{t^2} \left(\frac{4m^2 + 4m - 7}{16} \right) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t), \quad t \geq (\text{diam}(\Omega))^2.$$

对两边关于 $x \in \Omega, y \in \Omega$ 进行积分就得到了 (i) 下的断言。

为了证明 (ii), 我们注意到, 在 x 和 y 在 Ω 中一致,

$$p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) \geq \frac{e^{-1/4}}{(4\pi t)^{m/2}}, \quad t \geq (\text{diam}(\Omega))^2.$$

对两边关于 $x \in \Omega, y \in \Omega$ 积分得到

$$H_{\Omega}(t) \geq e^{-1/4} \frac{|\Omega|^2}{(4\pi t)^{m/2}}.$$

这与 (8) 一起, 给出了 (ii) 下的断言。

为了证明 (iii), 我们首先考虑 $t \geq (\text{diam}(\Omega))^2$, 并在 s 和 ∞ 之间对 (9) 进行积分, 其中是 $s \geq (\text{diam}(\Omega))^2$ 。这给出了 (10) 中的第二个不等式。由于热含量是凸的, 其一阶导数是递增且连续的。这证明了 (10) 中的第一个不等式。

为了证明 (iv), 我们有

$$p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) \leq (4\pi t)^{-m/2}$$

意味着

$$H_{\Omega}(t) \leq \frac{|\Omega|^2}{(4\pi t)^{m/2}}.$$

这结合 (iii) 得到 (iv)。 $\square$

5 定理的证明 5

证明. 我们定义 Ω_c 在 t 的热损失为

$$F_{\Omega_c, \psi}(t) = H_{\Omega_c, \psi}(0) - H_{\Omega_c, \psi}(t). \quad (29)$$

从而得出

$$\begin{aligned} F_{\Omega_c, \psi}(t) &= \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\Omega_c} dy \psi(y) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) - \int_{\Omega_c} dx \int_{\Omega_c} dy \psi(y) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_c} dx \int_{\Omega_c} dy \psi(y) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t). \end{aligned}$$

我们将证明如果 c 满足 (11), 那么 $F_{\Omega_c, \psi}(1) > F_{\Omega_c, \psi}(t^*) > 0$ 。由于 $t^* > 1$ 和 $F_{\Omega_c, \psi}(0) = 0$, 我们推断热量损失, 因此热量含量, 并不是单调的。

我们考虑 $\mathbb{R}^m \setminus \Omega_c$, 并且对于 $r_2 > r_1 > 0$, 定义 $A_{[r_1, r_2]} = \{x \in \mathbb{R}^m : r_1 \leq |x| \leq r_2\}$ 和 $A_{[r_1, \infty)} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \geq r_1\}$ 。对于 $x \in A_{[1, 2]}$ 和 $y \in B_1(0)$, $|x - y|^2 < 9$ 。这给出了

$$\begin{aligned} F_{\Omega_c, \psi}(t) &\geq \int_{A_{[1, 2]}} dx \int_{B_1(0)} dy (4\pi t)^{-m/2} e^{-9/(4t)} \\ &= (4\pi t)^{-m/2} e^{-9/(4t)} \omega_m^2 (2^m - 1). \end{aligned}$$

因此

$$F_{\Omega_c, \psi}(1) \geq e^{-9/4} \frac{\omega_m^2 (2^m - 1)}{(4\pi)^{m/2}}. \quad (30)$$

为了获得 $F_{\Omega_c, \psi}$ 的上界, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_c} dx \int_{A_{(2,c)}} dy \psi(y) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) = 0, \quad (31)$$

和

$$\begin{aligned} \int_{A_{[1,2]}} dx \int_{B_1(0)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) &\leq (4\pi t)^{-m/2} |B_1(0)| |A_{[1,2]}| \\ &= (4\pi t)^{-m/2} \omega_m^2 (2^m - 1). \end{aligned} \quad (32)$$

对于 $|x| \geq c$ 和 $y \in B_1(0)$, 我们有 $|y| < |x|/2$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_{A_{[c,\infty)}} dx \int_{B_1(0)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) &\leq (4\pi t)^{-m/2} \int_{A_{[c,\infty)}} dx \int_{B_1(0)} dy e^{-|x|^2/(16t)} \\ &\leq (4\pi t)^{-m/2} e^{-c^2/(32t)} \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{B_1(0)} dy e^{-|x|^2/(32t)} \\ &\leq 2^{3m/2} \omega_m e^{-c^2/(32t)}. \end{aligned} \quad (33)$$

将 (32) 和 (33) 结合得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_c} dx \int_{B_1(0)} dy p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) \\ \leq \frac{\omega_m^2 (2^m - 1)}{(4\pi t)^{m/2}} + 2^{3m/2} \omega_m e^{-c^2/(32t)}. \end{aligned} \quad (34)$$

结合 (31) 和 (34) 给出

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_c} dx \int_{\Omega_c} dy \psi(y) p_{\mathbb{R}^m}(x, y; t) \leq \frac{\omega_m^2 (2^m - 1)}{(4\pi t)^{m/2}} + 2^{3m/2} \omega_m e^{-c^2/(32t)}. \quad (35)$$

如果对于 $t^* > e^{9/(2m)}$, (11) 成立, 则

$$2^{3m/2} e^{-c^2/(32t^*)} < \frac{\omega_m (2^m - 1)}{(4\pi)^{m/2}} (e^{-9/4} - t^{*-m/2}),$$

这意味着 (35) 的右侧从上方有界于 (30) 的右侧, 如所需。 $\square$

6 定理的证明 6

证明. 集合 $B_1(0)$ 是凸的、 $\psi \geq 0$ 并且可测的。根据定理 1(iv), 热量含量严格递减。此外, 热量含量是严格正的并且递减到 0。为了证明非凸性, 因此只需表明

右导数 $H_{B_1(0),\psi}^{\prime+}(0) = 0$ 。我们有以下内容

$$\begin{aligned} -H_{B_1(0),\psi}^{\prime+}(0) &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (H_{B_1(0),\psi}(0) - H_{B_1(0),\psi}(t)) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} F_{B_1(0),\psi}(t) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\{|x|>1\}} dx \int_{B_1(0)} dy (4\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} (1-|y|)^\alpha, \end{aligned}$$

其中我们使用了 (29)。由 ψ 的径向对称性，映射

$$x \mapsto \int_{B_1(0)} dy (4\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} (1-|y|)^\alpha$$

是径向对称的，并且仅依赖于 $|x|$ 。不失一般性我们设 $x = vr$ ，其中 $v = (1, 0, \dots, 0)$ 。变量变化 $y = v - \eta$ 得到

$$\begin{aligned} &-H_{B_1(0),\psi}^{\prime+}(0) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{m\omega_m}{t} \int_{(1,\infty)} dr r^{m-1} \int_{\{|v-\eta|<1\}} d\eta (4\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{|v(r-1)+\eta|^2}{4t}} (1-|v-\eta|)^\alpha. \end{aligned} \tag{36}$$

注意到 η 是一个具有 $|v \cdot \eta| > 0$ 的向量。因此 $e^{-\frac{|v(r-1)+\eta|^2}{4t}} \leq e^{-\frac{(r-1)^2+|\eta|^2}{4t}}$ 。此外， $|v-\eta| \leq |v|+|\eta| = 1+|\eta|$ 。所以 $1-|v-\eta| \geq -|\eta|$ 。同样地 $|v-\eta| \geq |v|-|\eta| = 1-|\eta|$ 。因此 $1-|v-\eta| \leq |\eta|$ 。因此，(36) 的右侧被上界限制为

$$\begin{aligned} &\lim_{t \downarrow 0} \frac{m\omega_m}{t} \int_{(1,\infty)} dr r^{m-1} \int_{\{|v-\eta|<1\}} d\eta (4\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{(r-1)^2+|\eta|^2}{4t}} |\eta|^\alpha \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{m\omega_m}{t} \int_{(1,\infty)} dr r^{m-1} (4\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{(r-1)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^m} d\eta |\eta|^\alpha e^{-|\eta|^2/(4t)} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{(m\omega_m)^2}{2t} (4t)^{(m+\alpha)/2} \Gamma((m+\alpha)/2) (4\pi t)^{-m/2} \int_{(0,\infty)} dr (1+r)^{m-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{(m\omega_m)^2}{2t} (4t)^{(m+\alpha)/2} \Gamma((m+\alpha)/2) (4\pi t)^{-m/2} \\ &\quad \times \int_{(0,\infty)} dr 2^{m-1} (1+r^{m-1}) e^{-\frac{r^2}{4t}} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} (C_{m,\alpha,1} t^{(\alpha-1)/2} + C_{m,\alpha,2} t^{(\alpha-2+m)/2}) = 0, \end{aligned}$$

因为 $\alpha > 1$ ，以及 $C_{m,\alpha,1} < \infty$ 和 $C_{m,\alpha,2} < \infty$ 是严格有限的常数，仅依赖于 m 和 α 。 $\square$

致谢。感谢 Dorin Bucur 的一些有益讨论是一大乐事。我们感激审稿人提供的有益评论。

ORCID. 米歇尔·范登伯格: <http://orcid.org/0000-0001-7322-6922>

研究者创作标识码 ORCID。凯蒂·吉廷斯: <https://orcid.org/0000-0001-8136-8437>

参考文献

- [1] M. van den Berg, Heat flow and perimeter in $\mathbb{R}^m$, *Potential Analysis* 39 (2013) 369–387.
- [2] M. van den Berg, Heat content in non-compact Riemannian manifolds, *Integral Equations and Operator Theory* 90 (2018) 8.
- [3] M. van den Berg, P. Gilkey, Heat flow out of a compact manifold, *Journal of Geometric Analysis* 25 (2015) 1576–1601.
- [4] M. van den Berg, K. Gittins, Uniform bounds for the heat content of open sets in Euclidean space, *Differential Geometry and its Applications* 40 (2015) 67–85.
- [5] M. van den Berg, K. Gittins, On the heat content of a polygon, *Journal of Geometric Analysis* 26 (2016) 2231–2264.
- [6] R. P. Boas, Jr. *A primer of real functions*, The Carus Mathematical Monographs 13 (The Mathematical Association of America 1981).
- [7] E. Caputo, T. Rossi, First-order heat content asymptotics on $RCD(K, N)$ spaces, *Nonlinear Anal.* 238 (2024), Paper No. 113385, 43 pp.
- [8] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [9] A. Grigor’yan, *Heat kernel and Analysis on manifolds*, AMS-IP Studies in Advanced Mathematics, 47 (American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009).
- [10] M. Miranda, D. Pallara, F. Paronetto, M. Preunkert, *Short-time heat flow and functions of bounded variation in $\mathbb{R}^N$* , *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques* 16 (2007), 125–145.
- [11] M. Preunkert, *A Semigroup Version of the Isoperimetric Inequality*, *Semigroup Forum* Vol. 68 (2004), 233–245.

- [12] M. Preunkert, *Heat Semigroups and Diffusion of Characteristic Functions*, PhD thesis (2006). <https://publikationen.uni-tuebingen.de/xmlui/handle/10900/48926>
- [13] A. Agrachev, L. Rizzi, T. Rossi, Relative heat content asymptotics for sub-Riemannian manifolds, *Anal. PDE* 17 (2024), 2997–3037.
- [14] Wolfram | Alpha, Wolfram Alpha LLC, 2024.