Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science ....
.... **vol. 27:1, Permutation Patterns 2024 #8 (2025)**

识别 $ABAB$-*free* 超图的复杂性

Gábor Damásdi[1,2*] Balázs Keszegh[1,2†]
Dömötör Pálvölgyi[2,1‡] Karamjeet Singh[3§]

[1] *HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.*
[2] *ELTE Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary.*
[3] *IIIT-D Indraprastha Institute of Information Technology, Delhi, India.*

revisions 22nd Oct. 2024, 31st Mar. 2025; accepted 2nd Apr. 2025.

几何超图的研究产生了无 $ABAB$ 超图的概念。一个超图 $\mathcal{H}$ 被称为无 $ABAB$，如果它的顶点存在一种排序方式，在这种排序中不存在超边 A, B 和顶点 v_1, v_2, v_3, v_4 满足条件 $v_1, v_3 \in A \setminus B$ 和 $v_2, v_4 \in B \setminus A$。在这篇论文中，我们证明判断一个超图是否为 $ABAB$-free 是 NP 完全问题。我们展示了对于具有类似禁止模式的超图（如 $ABABA$-free 超图）的一些类似结果。作为应用，我们表明决定一个超图是否可以实现为点和伪圆盘的关联超图也是 NP 完全问题。

Keywords: 超图，复杂性，NP 难问题

*Partially supported by ERC Advanced Grant GeoScape.

†Research supported by the ERC Advanced Grant no. 101054936 ERMiD, the János Bolyai Research Scholarship of the Hungarian Academy of Sciences, by the National Research, Development and Innovation Office – NKFIH under the grant K 132696 and FK 132060, by the ÚNKP-23-5 New National Excellence Program of the Ministry for Innovation and Technology from the source of the National Research, Development and Innovation Fund and by the Thematic Excellence Program TKP2021-NKTA-62 of the National Research, Development and Innovation Office.

‡Partially supported by the NRDI EXCELLENCE-24 grant no. 151504 Combinatorics and Geometry and by the ERC Advanced Grant no. 101054936 ERMiD, and earlier by the János Bolyai Research Scholarship of the Hungarian Academy of Sciences, and by the New National Excellence Program ÚNKP-23-5 and by the Thematic Excellence Program TKP2021-NKTA-62 of the National Research, Development and Innovation Office.

§Supported by Overseas Research Fellowship of IIIT-Delhi, India.

1 介绍

令 $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ 是一个有序顶点集的超图，并且 $k\in\mathbb{N}$。我们说边 H 和 L 形成一个 $(AB)^k$ 模式在 $\mathcal{H}$ 如果存在这样的 $h_1,l_1,h_2,l_2,\ldots,h_k,l_k\in V$ 按此顺序使得对于所有的 $1\leq i\leq k$ 和 $1\leq j\leq k$ 均有 $h_i\in H\setminus L$ 和 $l_j\in L\setminus H$。[(i)] 一个 π 的排序 V 被称为 $(AB)^k$-自由，如果没有任何一对边形成一个 $(AB)^k$ 模式。若超图 $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ 存在一个排序 π，使得 V 中的 $\mathcal{H}$ 是 $(AB)^k$-自由的，则称该超图为 $(AB)^k$-自由。

同样地，如果存在 $h_1,l_1,h_2,l_2,\ldots h_{k-1},l_{k-1},h_k\in V$ 按此顺序使得 $h_i\in H\setminus L$ 和 $l_j\in L\setminus H$ 对所有 $1\leq i\leq k$ 和 $1\leq j\leq k-1$ 成立，则 H 和 L 形成一个 $(AB)^{k-1}A$ 模式在 $\mathcal{H}$ ，我们相应地定义 $(AB)^{k-1}A$-自由排序和 $(AB)^{k-1}A$-自由超图。

ABA-free 超图是由两位中间作者在 Keszegh and Pálvölgyi (2019) 中引入的，用于从抽象的角度研究伪半平面排列，并使他们能够推广 Smorodinsky 和 Yuditsky 关于半平面多色着色的结果 Smorodinsky and Yuditsky (2012)。这一概念在同一文章中也被推广到更高数量的交替；有关更多背景信息，请参见 Ackerman et al. (2020)，或对于最近的应用，请参见 Lee and Nevo (2023)。类似的超图交替也在完全不同的背景下独立研究过，以限制某些广义 Kneser 图的色数 Alishahi and Hajiabolhassan (2015)。

在本文中，我们研究了判定一个输入超图是否为 $(AB)^k$-自由的问题。这等价于它能否被实现为特定的几何超图。更精确地说，超图 $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ 是 $(AB)^k$-自由的当且仅当存在映射 $\alpha\colon V\to\mathbb{R}^2$ 和 $\gamma\colon\mathcal{E}\to\boldsymbol{C}(\mathbb{R})$（连续 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 函数的集合）使得 $\alpha(v)$ 在函数 $\gamma(E)$ 的图像上当且仅当 $v\in E$，并且对于任何两个不同的 $E,E'\in\mathcal{E}$，$\gamma(E)$ 和 $\gamma(E')$ 的图像至多相交 $2k-2$ 次。对于不含 $(AB)^kA$ 的超图和 $2k-1$ 交集的情况，也有类似的陈述。如果 $k=2$，即对于不含 $ABAB$ 的超图，存在一个等价的特征描述，涉及到最多两次相交且包含共同点的 Jordan 曲线内部；参见 Ackerman et al. (2020)。

我们注意到 2-均匀超图的 $ABAB$-自由性可以在多项式时间内决定。在 Ackerman et al. (2020) 中证明了 $ABAB$-自由图是外平面图。反之亦然，任何外平面图都是 $ABAB$-自由的。实际上，我们可以按照它们在外面上出现的顺序取顶点。(割点在边界上出现多次，我们保留这些中的任意一个。) 任何 $ABAB$ 模式都会对应于交叉弦，因此该排序是 $ABAB$-自由的。

我们展示以下结果。

定理 1 对于任意正整数 $k\geq 2$，判定一个给定的超图是否为 $(AB)^k$-自由是 NP 完全问题。

定理 2 对于任意正整数 $k\geq 2$，判定一个给定的超图是否为 $(AB)^kA$-自由是 NP 完全问题。

(i) 等价地，如果对于每个仅包含在一个超边中的顶点，分别写下符号 h 或 l，那么 H 和 L 形成一个 $(AB)^k$ 模式，我们得到一个阶数为 $2k-2$ 的 Davenport – Schinzel 序列不。

令 π 为超图 $\mathcal{H}$ 的顶点的任意排序，且 k 为任意固定的正整数。很容易看出可以在多项式时间内决定 $\mathcal{H}$ 是否是关于排序 π 的 $(AB)^k$-自由或 $(AB)^kA$-自由。这表明定理 1 和定理 2 中的决策问题属于 NP 类。因此，要证明这些定理，只需证明这些问题的 NP 难性。

在章节 2 和 3 中，我们证明了决定 $ABAB$-自由性和决定 $ABABA$-自由性是 NP 难的。然后在章节 4 中，我们展示了定理 1 和定理 2 如何从这些结果中得出。作为一个几何应用，我们在第 5 节中展示了判断一个给定的超图是否可以作为点集和伪圆盘族的关联超图来实现是一个 NP 完全问题。这些结果没有确定 ABA 自由性的复杂性；这在第 5.1 节中进行了讨论。

2 $ABAB$-自由性是 NP 完全的

在本节中我们展示了定理 1 的以下特殊情况。

定理 3 *判断一个给定的超图是否为 $ABAB$-自由的是 NP 难的。*

对于定理 3 的证明，我们需要一些记号和引理。在整个证明过程中我们将固定一个 N，并且我们的超图的顶点集将是 $\{1, 2, \ldots, N\}$。因此，在以下定义和引理中假设 N 是固定的。对于 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$，我们说 S 是一个区间，如果 S 的元素是连续的，并且 S 是一个 *t-区间*，如果它是 t 个区间（其中一些可能是空集）的并集。对于 $x < y$，令 $[x, y]$ 表示区间 $\{x, \ldots, y\}$。

此外，如果 S 是一个区间或包含 1 和 N 的 2-区间，则它是*圆区间*。如果 S 是由 t 个圆区间组成的并集，则它是圆 t-区间。对于 $x < y$，令 $[y, x]$ 表示圆形区间 $[y, N] \cup [1, x]$。

对于排列 π，我们说 π' 是一个*循环移位* π，如果我们可以通过将最后一个条目反复移到第一个位置来从 π 得到 π'。我们说两个排序是等价的，如果我们可以通过对一个应用循环移位或先反转顺序再应用循环移位来从另一个得到其中一个。

观察 4 *如果 π_1 和 π_2 是等价的，则 π_1 是一个无 $(AB)^k$ 排序当且仅当 π_2 是无 $(AB)^k$ 排序。*

注意观察 4 不适用于 $(AB)^kA$-free 超图。

对于集合 $S \subset \{1, 2, \ldots, N\}$，令 S^c 表示 S 的补集，即 $S^c = \{1, 2, \ldots, N\} \setminus S$。注意，圆区间的一个补集也是一个圆区间。

引理 5 *令 $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ 和 $\mathcal{E}$ 是 V 的任意子集集合。假设 $\mathcal{E}$ 包含 S 以及某些 $S \subset V$ 的 S^c。*

a) 如果 π 是 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 的一个 $ABAB$-自由排序，那么 S 的元素或 S^c 的元素在 π 中是连续的。(也就是说，S 和 S^c 是关于排序 π 的圆形区间。)

b) 如果 S 的顶点或 S^c 的元素在 π 中是连续的，那么 S 和 S^c 都不会与 V 的任何子集形成 $ABAB$ 模式。

Proof: 对于部分 a) 注意，如果 S 的元素和 S^c 的元素都不是连续的，那么 S 和 S^c 一起形成了一个 $ABAB$ 模式。

对于 b) 部分，我们可以使用观察结果 4 并将 S（或 S^c）移到排序的开头。如果我们有一个区间位于顺序的开始位置，它显然无法与其他 V 子集形成 $ABAB$ 模式。 □

引理 6 令 $V = \{1, 2, \ldots, N\}$，其中 $N \geq 4$，并令 $\mathcal{E}$ 为所有圆形区间的集合 $[N]$。然后超图 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 在一个排序 π 下是 $ABAB$-自由的当且仅当 π 等价于递增顺序 $1, 2, \ldots, N$。

Proof: 首先，考虑阶 $1, 2, \ldots, N$ 和一个圆形区间 S。如果 $x, y \in S$ 和 $x < y$，则要么是 $[x, y] \subset S$ 要么是 $[1, x] \cup [y, N] \subset S$，因此 S 不属于任何 $ABAB$ 模式。由于这对任何 S 都成立，该排序是 $ABAB$-自由的。

在另一个方向上，令 π 是 V 的一个排序，它不等价于 $1, 2, \ldots, N$。由于 $N \geq 4$，我们可以找到 $x, y, z, q \in V$ 使得 $x < y < z < q$，但在 π 中，它们的循环顺序既不是 x, y, z, q 也不是 q, z, y, x。

- 如果在 π 中的循环顺序是 x, y, q, z 或 x, z, q, y，那么 $[q, x]$ 和 $[y, z]$ 是不相交的圆区间，形成一个 $ABAB$ 模式。
- 如果在 π 中的循环顺序是 x, z, y, q 或 x, q, y, z，则 $[x, y]$ 和 $[z, q]$ 是不相交的圆形区间，形成一个 $ABAB$ 模式。

因此，任何不含 $ABAB$ 的排序都等价于 $1, 2, \ldots, N$。 □

令 $V = \cup_{i=1}^{k} A_i$ 对某些不相交的 $A_i \subset V$ 成立。我们说一个排序为 V 具有结构 $A_1, \ldots, A_k$ 如果对于任意的 $i \neq j$ 和 $v \in A_i, w \in A_j$，元素 v 在 w 之前当且仅当 $i < j$。也就是说，在 A_i 内部顺序之外，排序是固定的。

观察 7 一个排序 π 具有结构 $A_1, \ldots, A_k$ 当且仅当对于任何选择 $a_i \in A_i$，a_i-s 在 π 内是有序的。

令 $\mathcal{I}_k$ 表示所有圆形区间在 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 上的集合。由引理 6 和观察 7 我们得到以下结果。

推论 8 令 $V = \cup_{i=1}^{k} A_i$ 对某些不相交的 $A_i \subset V$ 成立，并令 $\mathcal{E} = \{\bigcup_{i \in \alpha} A_i : \alpha \in \mathcal{I}_k\}$。然后，当且仅当 π 等价于具有结构 $A_1, \ldots, A_k$ 的排序时，π 对 V 的排序是 $ABAB$ 免疫的。

现在我们准备证明定理 3。

Proof: 决定一个 3-均匀超图是否具有适当的 2 着色是 NP 难的 Dinur et al. (2002)。我们将这个问题归约到判定 $ABAB$ 无性，从而证明了该定理。

令 $\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, \mathcal{E}_\mathcal{G})$ 是任意给定的 3 一致超图，其中 $V_\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和 $\mathcal{E}_\mathcal{G} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$。我们构造一个超图 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$，使得 $\mathcal{G}$ 可以 2 着色当且仅当 $\mathcal{H}$ 是 $ABAB$-自由的。

顶点集 V 的 $\mathcal{H}$ 是如下构造的第一个 N 自然数的集合：对于 $\mathcal{G}$ 的每个顶点，我们取两个顶点，并且对于 $\mathcal{G}$ 的每条边，我们取四个顶点。即，设 $V_1 = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$，其中 $R_i = \{2i-1, 2i\}$，并且设 $V_2 = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$，其中 $S_j = \{2n+(4j-3), 2n+(4j-2), 2n+(4j-1), 2n+4j\}$。$\mathcal{H}$ 的顶点集是 $V = V_1 \cup V_2$。我们将用 t_j 表示 S_j 的第一个顶点，即 $t_j = 2n + (4j-3)$ 和 $S_j = \{t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3\}$。

现在，我们将分三个步骤构造超边的集合。$\mathcal{E}_1$ 是 $[N]$ 的圆区间集合，可以写成 R_i 和 S_j 的并集。推论 8 意味着任何 $ABAB$-free 排序的 $(V, \mathcal{E}_1)$ 等价于一个唯一的具有结构 $R_1, \ldots, R_n, S_1, \ldots, S_m$ 的 $ABAB$-free 排序。

我们的下一个目标是构造一组边 $\mathcal{E}_2$，使得任何 $ABAB$-free 的 $(V, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ 顺序对应于顶点集 $V_\mathcal{G}$ 的一个 2-着色，以这样的方式，顶点 v_i 的颜色可以从 R_i 内的顺序确定，并且进一步地，如果 $v_i \in e_j$，则颜色也可以从 S_j 内的顺序确定。取一个 $ABAB$-无序的 π_1 排序 $(V, \mathcal{E}_1)$，并设 π_2 为唯一的 $ABAB$-无序排序，该排序等价于 π_1 且具有结构 $R_1, \ldots, R_n, S_1, \ldots, S_m$。我们将说 v_i 的颜色是根据 $2i-1$ 和 $2i$ 在 π_2 中的顺序决定的。我们将 v_i 染成红色，如果 $2i-1$ 在 π_2 中先于 $2i$ 出现；否则将其染成蓝色。

考虑边 $e_j = \{v_i, v_k, v_l\}$ 及其对应的集合 $S_j = \{t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3\}$ 和 $i < k < l$。我们的目标是确保在 π_2 中 t_j 和 t_j+1 的顺序代表 v_l 的颜色，t_j+1 和 t_j+2 的顺序代表 v_k 的颜色，以及 t_j+2 和 t_j+3 的顺序代表 v_i 的颜色。我们强调，$i < k < l$，即配对 (t_j, t_j+1),(t_j+1, t_j+2),(t_j+2, t_j+3) 表示边的顶点颜色顺序相反。例如，顺序 $(t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3)$ 和 $(t_j+3, t_j+2, t_j+1, t_j)$ 分别对应于边 e_j 的所有顶点为红色和蓝色的颜色配置。

为了实现这一点，对于每个 v_i 和边 e_j，其中 v_i 是 r 最小的顶点在 e_j 中，我们将边 $I_{i,j,r} = \{2i, \ldots, t_j+(3-r)\}$ 和 $I'_{i,j,r} = \{2i-1, 2i+1, 2i+2, \ldots, t_j+(3-r)-1, t_j+(3-r)+1\}$ 添加到 $\mathcal{E}_2$。现在，$I_{i,j,r}$ 和 $I'_{i,j,r}$ 只在 4 个元素上不同，即 $2i-1, 2i, t_j+(3-r), t_j+(3-r)+1$，并且由 $\mathcal{E}_1$ 强制的结构确保前两个总是比后两个更早出现在 π_2 中。边 $I_{i,j,r}$ 和 $I'_{i,j,r}$ 强制要求在任何不含 $ABAB$ 的排序中，如果 $2i-1$ 先于 $2i$，则 $t_j+(3-r)$ 必须先于 $t_j+(3-r)+1$。参见表 1 中与固定 $e_j = \{v_i, v_k, v_l\}$ 对应的六条边。

所以任何不含 $ABAB$ 的 $(V, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ 排序对应于 $\mathcal{G}$ 的唯一着色，但这种着色可能不是恰

	R_i		$\dots$	R_k		$\dots$	R_l		$\dots$	S_j			
$I_{i,j,1}$		**x**	x	x	x	x	x	x	x	x	x	**x**	
$I'_{i,j,1}$	**x**		x	x	x	x	x	x	x	x	x		**x**
$I_{k,j,2}$					**x**	x	x	x	x	x	**x**		
$I'_{k,j,2}$				**x**		x	x	x	x	x		**x**	
$I_{l,j,3}$								**x**	x	**x**			
$I'_{l,j,3}$							**x**		x		**x**		

表 1: $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{E}_2$ 中的六条边对应 $\mathcal{G}$ 的边 $e_j = \{v_i, v_k, v_l\}$。

当的。为了以后使用我们注意以下内容。

观察 9 令 $E \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$，并令 D_1 为与 E 相交的集合 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m$ 中的第一个，D_2 为最后一个。然后列表中 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m$ 在 D_1 和 D_2 之间的集合是 E 的子集。

现在，我们添加一些边 $\mathcal{E}_3$ 以确保每个 $ABAB$-free 排序对应一个适当的 2-着色。对于每个 $S_j = \{t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3\}$，向 $\mathcal{E}_3$ 中添加 $\{t_j, t_j+3\}$ 和 $\{t_j, t_j+3\}^c$。由引理 5，S_j 在不含 $ABAB$ 的 $(V, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3)$ 排序中的可能顺序是那些 t_j 和 t_j+3 相邻的情况。这些不包括与单色边对应的顺序，即顺序 $(t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3)$ 和 $(t_j+3, t_j+2, t_j+1, t_j)$。因此，每个 $ABAB$-free 的 $(V, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3)$ 排序对应于一个正确的着色。

我们只剩下一项任务，我们必须证明对于每个适当的 2 着色都存在一个 $ABAB$-自由排序。我们将顶点按递增顺序取出，然后在每个 R_i 和 S_i 内重新排列顶点。这样得到的排序 π 将自动具有结构 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m$。将 R_i 视为 $2i-1, 2i$ 如果 v_i 是红色的，视为 $2i, 2i-1$ 如果 v_i 是蓝色的。订购一个与 $e_j = \{v_i, v_k, v_l\}$ 相对应的 $S_j = \{t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3\}$，基于 v_i, v_k, v_l 的颜色，并根据表 2 中的 $i < k < l$。

colors of v_i, v_k, v_l	order in S_j
red, red, blue	t_j+1, t_j+2, t_j+3, t_j
red, blue, red	$t_j+2,\ t_j+3,\ t_j,\ t_j+1$
red, blue, blue	$t_j+2, t_j+1, t_j, t_j+3,$
blue, red, red	t_j+3, t_j, t_j+1, t_j+2
blue, red, blue	$t_j+1,\ t_j,\ t_j+3,\ t_j+2$
blue, blue, red	$t_j, t_j+3, t_j+2, t_j+1,$

表 2: S_j 的排序规则。

我们可以看到在表 2 中，在每种情况下，配对 (t_j, t_j+1)、(t_j+1, t_j+2) 和 (t_j+2, t_j+3) 正确表示了 v_l, v_k, 和 v_i 的颜色。因此这种排序确实代表了所需的着色。

现在我们将证明 π 确实是一个 $ABAB$-自由排序。由于该排序具有 $R_1, \ldots, R_n, S_1, \ldots, S_m$ 结构，引理 5 的 b) 部分告诉我们 $\mathcal{E}_1$ 的边不能参与 $ABAB$ 模式。类似地，因为在每个 $S_j = \{t_j, t_j+1, t_j+2, t_j+3\}$ 中我们将 t_j 放置在与 t_j+3 相邻的位置，$\mathcal{E}_3$ 中的边不能与任何一条边形成一个 $ABAB$ 模式。

因此，我们只需要检查是否由 $\mathcal{E}_2$ 的两条边形成一个 ABAB 模式。首先考虑当有两条边对应同一个 $e_j = \{v_i, v_k, v_l\}$ 的情况，也就是说，来自表 1 的两行。边对 $(I_{i,j,1}, I'_{i,j,1})$, $(I_{k,j,2}, I'_{k,j,2})$, $(I_{l,j,3}, I'_{l,j,3})$ 不会形成 $ABAB$ 模式，因为排序正确地表示了着色。进一步，令 $H \in \{I_{i,j,1}, I'_{i,j,1}\}$，$K \in \{I_{k,j,2}, I'_{k,j,2}\}$，和 $L \in \{I_{l,j,3}, I'_{l,j,3}\}$。那么 $H \supset K \supset L$。因此，来自 $\{I_{i,j,1}, I'_{i,j,1}, I_{k,j,2}, I'_{k,j,2}, I_{l,j,3}, I'_{l,j,3}\}$ 的任意两条边不能形成一个 $ABAB$ 模式。

其次，假设 $H \in \{I_{i_1,j_1,r_1}, I'_{i_1,j_1,r_1}\}$ 和 $L \in \{I_{i_2,j_2,r_2}, I'_{i_2,j_2,r_2}\}$ 其中 $j_1 < j_2$ 并且假设 H 和 L 在顶点 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 上形成一个 $ABAB$ 模式。顶点之间从 $R_{max(i_1,i_2)}$ 到 S_{j_1} 属于 H 和 L，因此它们不能在 X 中。由于 $j_1 < j_2$，S_{j_1} 的顶点以及之后的顶点不能在 $H \setminus L$ 中，所以我们最多只能有一个 X 的顶点在那里。现在考虑三种情况。如果 $i_1 = i_2$ 我们只剩下两个可以放入 X 的顶点，即顶点 $2i_1 - 1$ 和 $2i_1$，但两个顶点是不够的。如果 $i_1 < i_2$，则 R_{i_2} 及之前的顶点不能属于 $L \setminus H$，因此那里最多只有一个 X 的顶点，这是不够的。类似地，如果 $i_2 < i_1$ 顶点在 R_{i_1} 以及之前不能属于 $H \setminus L$，所以我们最多有一个 X 的顶点在那里，这是不够的。

因此排序 π 是 $ABAB$-自由的，证明完成。 □

3 $ABABA$-自由性是 NP 完全的

在本节中，我们展示了定理 2 的一个特殊情况。

定理 10 *判断一个给定的超图是否是 $ABABA$-自由的是 NP 难的。*

我们从一个类似于引理 6 的引理开始。注意，观察 4 在 $ABABA$-free 设置中不成立，但是排序是 $ABABA$-free 当且仅当该排序的逆也是 $ABABA$-free。

引理 11 *令 $V = \{1, 2, \ldots, N\}$，其中 $N \geq 7$，并令 $\mathcal{E}$ 为 V 的所有 2-区间集合。然后超图 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 是 $ABABA$-自由的当且仅当 V 的排序是 $1, 2, \ldots, N$ 或 $N, N-1, \ldots, 1$。*

Proof: 很容易看出排序 $1, 2, \ldots, N$ 和 $N, N-1, \ldots, 1$ 确实是 $ABABA$ 自由的。设 π 是除 $1, 2, \ldots, N$ 和 $N, N-1, \ldots, 1$ 之外的 $[N]$ 的任意线性排序。然后必须存在一个 $x \in [N]$，使

得 x 和 $x+1$ 在 π 中不是邻居。由于 $N \geq 7$，存在一个 $y \in [N]$，使得 y 不是 x 或 $x+1$ 的邻居。由于 $x, x+1$ 和 y 在 π 中不是邻居，我们可以选择数字 z 和 q 将它们在顺序 π 中隔开。然后 $\{x, x+1, y\}$ 是一个 2 区间，它与另一个 2 区间 $\{z, q\}$ 形成一个 $ABABA$ 模式。 □

令 $\mathcal{J}_k$ 表示所有在 $\{1, 2, \dots, k\}$ 上的区间集合。类似于推论 8，引理 11 推出以下结论。

推论 12 *假设 $k \geq 7$ 和 $V = \cup_{i=1}^{k} A_i$ 是某些不相交的 $A_i \subset V$。令 $\mathcal{E} = \{(\bigcup_{i\in\alpha} A_i) \cup (\bigcup_{j\in\beta} A_j) : \alpha, \beta \in \mathcal{J}_k\}$。然后，一个排列 π 是 V 的 $ABABA$-自由的当且仅当 π 具有结构 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 或 $A_k, A_{k-1}, \dots, A_1$。*

定理 10 的证明遵循与定理 3 的证明相同的思路。可能存在一个直接从 $ABAB$-自由性得出的简单化简，但我们不了解这一点，并在下面给出明确的证明。

Proof: 再一次，我们将使用对于 3-均匀超图找到 2 着色是 NP 难的问题。令 $\mathcal{G}$ 是一个 3-均匀超图，并且让 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 以与定理 3 证明中相同的方式构造。正如我们所见，$\mathcal{G}$ 可 2 着色当且仅当 $\mathcal{H}$ 是 $ABAB$-free。我们将构造一个超图 $\mathcal{H}'$，使得 $\mathcal{H}$ 是 $ABAB$ 自由的当且仅当 $\mathcal{H}'$ 是 $ABABA$-自由的。

回忆一下，顶点集 V 的 $\mathcal{H}$ 是 $[N]$ 和 $V = (\bigcup_{i=1}^{n} R_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} S_j)$。我们将基于顶点集 $[N+1]$ 构建 $\mathcal{H}'$。令 $\mathcal{I}$ 是由 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m, \{N+1\}$ 中某些集合的并集形成的 $[N+1]$ 上的区间集合。令 $\mathcal{E}_0$ 是由 $\mathcal{I}$ 中的区间形成的所有 2-区间，即 $\mathcal{E}_0 = \{I \cup J : I, J \in \mathcal{I}\}$。注意，根据推论 12，如果超图上的边集 $[N+1]$ 包含 $\mathcal{E}_0$，则任何不含 $ABABA$ 的排序将具有结构 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m, \{N+1\}$ 或 $\{N+1\}, S_m, \dots, S_1, R_n, \dots, R_1$。

考虑超图 $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$，其中 $V' = [N+1]$ 和 $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_0$ 满足 $\mathcal{E}_+ = \{E \cup \{N+1\} : E \in \mathcal{E}\}$。我们需要证明 $\mathcal{H}$ 是 $ABAB$-free 当且仅当 $\mathcal{H}'$ 是 $ABABA$free。首先，令 π 为 $\mathcal{H}$ 中 $[N]$ 的任意一个 $ABAB$-自由排序。回忆一下，对于任何 $ABAB$-free 排序 π 的 $\mathcal{H}$ 来说，都存在一个等价的 $ABAB$-free 排序 π_2，它具有结构 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m$。我们将证明通过将 $N+1$ 放在 π_2 之后得到的排序 π' 是一个 $\mathcal{H}'$ 的 $ABABA$-自由排序。

由于没有任何两条边来自 $\mathcal{E}$ 形成一个 $ABAB$ 模式，并且我们只引入了一个新的顶点，因此没有任何两条边来自 $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_+$ 可以形成一个 $ABABA$ 模式。因此，如果 H 和 L 形成一个 $ABABA$ 模式，我们可以假设 $H \in \mathcal{E}_0$。然后，由于 π' 具有结构 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m, \{N+1\}$，边 H 不仅在通常的排序下是 2-区间，而且也在 π' 下是 2-区间。因此，唯一可能性是 H 在模式中扮演 B 的角色。这也意味着 L 来自 $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_+$。

令 D_1 是与 L 相交的集合 $R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m, \{N+1\}$ 中的第一个，D_2 是最后一个。由于 H 和 L 形成了一个 $ABABA$ 模式，并且 H 是一个 2 区间，因此 H 必须位于 D_1 和 D_2 之间。回忆一下，$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$，并从观察 9 可知，如果 $L \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$，则列表

$R_1, \ldots, R_n, S_1, \ldots, S_m$ 中的集合在 D_1 和 D_2 之间是 L 的子集。这将意味着 $H \subset L$，这是一个矛盾。因此我们必须有 $L \in \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_+$。根据引理 5 我们知道，从 $\mathcal{E}_3$ 出发的一条边不能与任何东西形成一个 $ABAB$-模式。所以，令 $L \in \mathcal{E}_+$。由于 L 与 H 形成一个 $ABABA$ 模式，边 $L' = L \setminus \{N+1\} \in \mathcal{E}$ 必须与 H 形成一个 $ABAB$ 模式；这与之前的论证相矛盾。因此 π' 对 H' 是 $ABABA$-自由的。

反之，设 $\mathcal{H}'$ 是 $ABABA$-自由的，并且 π' 是 $\mathcal{H}'$ 的任意一个 $ABABA$-自由排序。由引理 11，$N+1$ 应在 π' 的最后一个或第一个位置。假设前者成立。我们声称，通过从 π' 中删除 $N+1$ 所得到的顺序 π 是 $\mathcal{H}$ 的一个 $ABAB$-自由顺序。事实上，如果两个超边 H, L 的 $\mathcal{H}$ 在 π 中存在一个 $ABAB$ 模式，则 H, L 也是 $\mathcal{H}'$ 的超边，并且它们在 π' 中形成一个 $ABAB$ 模式。假设，不失一般性，H 在 $ABAB$ 模式中扮演了 A 的角色。这表明对于超图 $\mathcal{H}'$，在 π' 中存在由 $H_+ = H \cup \{N+1\}$ 和 L 构成的 $ABABA$ 模式；矛盾。因此，$\mathcal{H}$ 是 $ABAB$-free 的。证明完毕。 □

4 定理 1 和定理的证明 2

我们使用对 k 的归纳法证明定理 2 和定理 1。基本情况由定理 3 和定理 10 涵盖。

对于超图 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 和 $t \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{H}_t$ 表示其顶点集为 $V' = V \cup X$（包含一些新顶点 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$）且边集为 $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E \cup \{x\} : E \in \mathcal{E},\ x \in X\}$ 的超图。

引理 13 令 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 为一个给定的超图。那么对于任意的 $k \in \mathbb{N}$，超图 $\mathcal{H}$ 是 $(AB)^{k-1}A$-自由的当且仅当 $\mathcal{H}_{2k+1}$ 是 $(AB)^k A$-自由的。

Proof: 设 $\mathcal{H}$ 是 $(AB)^{k-1}A$-自由的，且 π 是 V 的一个 $(AB)^{k-1}A$-自由排序。我们将证明 $\mathcal{H}_{2k+1} = (V', \mathcal{E}')$ 是 $(AB)^k A$-自由的。令 $\pi = v_1, v_2, \ldots, v_n$。考虑 V' 的排序 $\pi' = v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_{2k+1}$。如果存在形成 $(AB)^k A$ 模式的超边 $H', L' \in \mathcal{E}'$，则在 π' 中按此顺序存在顶点 $h_1, l_1, \ldots, h_k, l_k, h_{k+1}$，使得对于 $1 \le i \le k+1$ 有 $h_i \in H' \setminus L'$ 和对于 $1 \le j \le k$ 有 $l_j \in L' \setminus H'$。令 $H, L \in \mathcal{E}$ 分别是 H', L' 与顶点集 V 的交点。由于 H' 和 L' 至多包含 X 的一个顶点，我们有 $|H' \setminus H| \le 1$ 和 $|L' \setminus L| \le 1$。另外，由于 $\mathcal{H}$ 是 $(AB)^{k-1}A$-free 的，在序列 $h_1, l_1, \ldots, h_k, l_k, h_{k+1}$ 中，至少最后三个顶点必须来自 X，否则 H 和 L 在排序 π 中会形成一个 $(AB)^{k-1}A$ 模式。然而，这是不可能的，因为有 $|H' \setminus H| \le 1$ 和 $|L' \setminus L| \le 1$。因此，π' 是 $\mathcal{H}_{2k+1}$ 的一个无 $(AB)^k A$ 排序。

反之，假设 $\mathcal{H}_{2k+1}$ 是 $(AB)^k A$-自由的。我们将证明 $\mathcal{H}$ 是 $(AB)^{k-1}A$-自由的。令 π' 是超图 $\mathcal{H}_{2k+1}$ 上 V' 的一个 $(AB)^k A$-自由排序，并令 π 是顶点集 V 上 π' 的一个诱导排序。假设存在超边 $H, L \in \mathcal{E}$ 形成一个 $(AB)^{k-1}A$ 模式在 $\mathcal{H}$ 中，并且让 $h_1, l_1, \ldots, h_{k-1}, l_{k-1}, h_k$ 是按

此顺序的顶点在 π 中，使得 $h_i \in H \setminus L$ 对于 $1 \leq i \leq k$ 和 $l_j \in L \setminus H$ 对于 $1 \leq j \leq k-1$。由于 $|X| = 2k+1$ 和 $|\{h_1, l_1, \ldots, h_{k-1}, l_{k-1}, h_k\}| = 2k-1$，所以在排序 π' 中，必须至少有两个顶点 $x, y \in X$ 位于序列 $h_1, l_1, \ldots, h_{k-1}, l_{k-1}, h_k$ 的两个连续元素之间，或者它们都出现在该序列的所有元素之前或之后。然后要么 $H \cup \{x\}$ 和 $L \cup \{y\}$，或者 $H \cup \{y\}$ 和 $L \cup \{x\}$ 形成一个 $(AB)^k A$ 模式在 π' 中；这是一个矛盾。因此，π 是 $\mathcal{H}$ 的一个 $(AB)^{k-1}A$-自由排序。□

引理 14 *令 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 为一个给定的超图。那么对于任意的 $k \in \mathbb{N}$，超图 $\mathcal{H}$ 是 $(AB)^k$-自由的当且仅当 $\mathcal{H}_{2k+2}$ 是 $(AB)^{k+1}$-自由的。*

Proof: 证明与引理 13 的证明相同。 □

现在定理 1 和定理 2 的证明是上述两个引理的直接推论，即定理 3 和定理 10。

5 相关问题

一组伪圆是一组闭合的若尔当曲线，其中任意两条要么不相交，要么恰好在一个点上接触，或者在两个点上恰当地交叉。一组伪盘是由紧致平面区域组成的集合，其边界形成一组伪圆。

一族平面伪圆盘 $\mathcal{A}$ 被称为一个刺中伪圆盘排列，如果平面上存在一个点位于每个伪圆盘 $\mathcal{A}$ 中。

定理 15 (Ackerman, Keszegh, Pálvölgyi Ackerman et al. (2020)) *一个超图可以作为被平面中刺穿的伪圆和点的关联超图实现，当且仅当它是 ABAB-free。*

定理 16 *判断一个抽象超图是否可以实现为平面上点和伪圆盘的关联超图是 NP 完全问题。*

Proof: 问题属于 NP 类，因为我们可以给出实现排列的简短组合描述。

为了证明 NP 难，我们表明 $ABAB$-自由性可以归约为识别伪盘超图。设 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 为给定的超图，并且我们要决定它是否是 $ABAB$-自由的。考虑超图 $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$ 其中 $V' = V \cup \{x\}$ 和 $\mathcal{E}' = \{E \cup \{x\} : E \in \mathcal{E}\}$。显然，$\mathcal{H}'$ 可以表示为平面上的伪圆盘超图当且仅当 $\mathcal{H}'$ 可以表示为平面上的刺戳个伪圆盘超图。根据定理 15，一个超图是平面上被刺穿的伪圆盘超图当且仅当它是 $ABAB$-自由的。此外，由于 x 在每个边中存在，它不能参与 $ABAB$ 模式。因此，H' 是 $ABAB$-自由的当且仅当 H 是 $ABAB$-自由的。因此，H 是 $ABAB$-自由的当且仅当 H' 可以表示为平面上点和伪盘的关联超图。

应用定理 3，我们得出结论，判定 $\mathcal{H}$ 是否为平面上的点和伪盘构成的超图是 NP 困难的。
□

5.1 开放问题

这里我们收集了一些开放性问题。最自然的是定理 2 中缺失的 $k = 1$ 情况。

问题 17 *判断一个给定的超图是否是 ABA-free 是否是一个 NP 完全问题？*

我们提到一些相关的结果。Opatrny 证明了相关的问题 BETWEENNESS 是 NP 完全问题 Opatrny (1979)。这里的输入是一些基集 V 的有序三元组集合，问题是是否存在一种对 V 的排序方式，在这种排序中所有有序三元组中的中间元素都在其他两个元素之间。不难看出这意味着 NON-BETWEENNESS 也是 NP 完全问题，即当我们的输入是某个基集 V 的有序三元组集合时，问题是是否存在一种对 V 的排序方式，在这种排序中所有有序三元组的中间元素不在不中间。决定 ABA-自由性是非 BETWEENNESS 的一个特殊情况。我们还提到了关于此类关系 Biró et al. (2023) 的 Helly 性质的一个最近结果（并注意到如 ABA-free 超图不具有 Helly 性质，正如由 2-均匀（超）图 C_n 所示）。

在我们的证明中，有一些超边具有线性数量的顶点。如引言所述，判断一个 2-均匀超图是否为 $ABAB$-自由可以在多项式时间内完成，因为它们恰好是外平面图 Ackerman et al. (2020)。然而，我们不知道这个问题在 3-均匀超图中是否属于 P，即使如此；也许如果我们限制超边的大小，这些问题会变得可处理。

在证明中我们经常使用了与所谓的连续一属性紧密相关的 k-区间。让我们说一个 $(0, 1)$ 矩阵具有 *k-连续一属性*，如果存在一行的顺序，使得每列中所有的一都出现在至多 k 个连续块中。显然，一个超图的关联矩阵具有 k-连续一属性当且仅当顶点有一个排序，使得每个超边是那个排序中的至多 k 个区间的并。

判断给定的 (0,1)-矩阵是否具有 1-连续 1 属性可以在多项式时间内完成 Booth and Lueker (1976); Fulkerson and Gross (1965)。另一方面，对于 $k \geq 2$ 来说，判断一个给定的 (0,1)-矩阵是否具有 k-连续 1 属性是 NP 完全问题 Goldberg et al. (1995)。这个后一个结果也可以通过我们的方法进行简单的修改得到，甚至对于圆周 k 区间的情况也是如此，但我们省略了这些。

Acknowledgements

这项研究始于 2023 年布达佩斯 Erdős 中心的离散几何与凸性特别学期，得到了 ERC 高级资助“GeoScape”和“ERMiD”的支持，编号分别为 882971 和 101054936。该研究还部分得到了 IIIT-Delhi 通过海外研究基金的支持。

参考文献

E. Ackerman, B. Keszegh, and D. Pálvölgyi. Coloring hypergraphs defined by stabbed pseudo-disks and ABAB-free hypergraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34 (4):2250–2269, 2020. doi: 10.20382/jocg.v10i1a1.

M. Alishahi and H. Hajiabolhassan. On the chromatic number of general Kneser hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 115:186–209, 2015. ISSN 0095-8956. doi: 10.1016/j.jctb.2015.05.010.

C. Biró, J. Lehel, and G. Tóth. Helly-type theorems for the ordering of the vertices of a hypergraph. *Order*, 40(3):665–682, 2023. ISSN 0167-8094. doi: 10.1007/s11083-023-09625-x.

K. S. Booth and G. S. Lueker. Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using pq-tree algorithms. *Journal of Computer and System Sciences*, 13(3):335–379, 1976. ISSN 0022-0000. doi: 10.1016/S0022-0000(76)80045-1.

I. Dinur, O. Regev, and C. Smyth. The hardness of 3-Uniform hypergraph coloring. pages 33 – 40, 02 2002. ISBN 0-7695-1822-2. doi: 10.1109/SFCS.2002.1181880.

D. R. Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, 15(3):835 – 855, 1965. doi: 10.2140/pjm.1965.15.835.

P. W. Goldberg, M. C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir. Four strikes against physical mapping of DNA. *Journal of Computational Biology*, 2(1):139–152, 1995. doi: 10.1089/cmb.1995.2.139.

B. Keszegh and D. Pálvölgyi. An abstract approach to polychromatic coloring: shallow hitting sets in ABA-free hypergraphs and pseudohalfplanes. *J. Comput. Geom.*, 10(1): 1–26, 2019. doi: 10.20382/jocg.v10i1a1.

S. Lee and E. Nevo. On colorings of hypergraphs embeddable in $\mathbb{R}^d$, 2023. URL `https://arxiv.org/abs/2307.14195`.

J. Opatrny. Total ordering problem. *SIAM Journal on Computing*, 8(1):111–114, 1979. doi: 10.1137/0208008.

S. Smorodinsky and Y. Yuditsky. Polychromatic coloring for half-planes. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 119(1):146–154, 2012. ISSN 0097-3165. doi: 10.1016/j.jcta.2011.07.001.