

改进的乘积集 HELLY 数

SRINIVAS ARUN AND TRAVIS DILLON

摘要. 有限的凸集族 $\mathcal{F}$ 在 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 中是 k -相交的, 如果 $\mathcal{F}$ 中每个由 k 个凸集组成的子集的交集都包含 S 中的一个点。赫利数的 S 是最小的 k , 如果存在的话, 使得每个 k -相交族在其交集中包含一个 S 点。在本文中, 我们改进了形如乘积集的 Helly 数界限 A^d , 适用于各种集合 $A \subseteq \mathbb{R}$, 包括 “指数网格” $A = \{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 和由同余关系定义的集合同 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 。

1. 介绍

Helly 定理是离散几何和凸几何中的一个基本结果。它表明了一个有限集合 $\mathcal{C}$ 中, 该集合由在 $\mathbb{R}^d$ 中的凸集组成, 如果 $\mathcal{C}$ 或更少数量的集合在 $d+1$ 中的交集非空, 那么 $\bigcap \mathcal{C}$ 也是非空的。Helly 定理最初由 Eduard Helly 在 1913 年证明 (尽管直到 1923 年才发表 [10]), 并在 1921 年由 Radon 独立证明 [12]。Helly 定理是众多离散几何结果的引子, 上个世纪导致了数十种 Helly 定理的变化形式。Bárány 和 Kalai 的综述 [4] 提供了一个对广泛相关领域成果的最新且详尽的视角, 而 Amenta、de Loera 和 Soberón 的综述 [2] 则更加具体地关注 Helly 定理。

1973 年, Doignon 证明了整数格 [8] 的一个 Helly 型定理。

定理 1 (Doignon’s theorem). 令 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一组有限凸集。如果 $\mathcal{C}$ 中任意 2^d 或更少的集合的交集中包含一个整数点, 那么 $\bigcap \mathcal{C}$ 也包含。

该定理也由贝尔 [5] 和斯卡夫 [13] 独立发现。几年后, 霍夫曼通过将 Helly 型定理与多面体联系起来扩展了贝尔的结果。

给定一个集合 $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $Helly\ number$ 的 S , 表示为 $h(S)$, 是满足以下 *Helly-type theorem* 成立的最小 h :

令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一组有限凸集。如果 $\mathcal{F}$ 中任意 h 或更少的集合在其交集中包含一个点 S , 那么 $\mathcal{F}$ 中所有集合的交集也包含一个点 S 。

如果不存在这样的 h ，则我们说 $h(S) = \infty$ 。Helly 定理说明 $h(\mathbb{R}^d) \leq d + 1$ （虽然单纯形的面集表明 $h(\mathbb{R}^d) \geq d + 1$ ），Doignon 定理则说明 $h(\mathbb{Z}^d) \leq 2^d$ 。

此外，若集合 $\text{conv}(T) \cap S$ 仅包含 $\text{conv}(T)$ 的顶点，则子集 $T \subseteq S$ 被称为空的在 S 。我们称一个集合为 S 离散如果它没有聚点。

定理 2 (Hoffman [11]). 如果 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 S 是离散的，那么 $h(S)$ 等于 S 的一个空子集的最大大小。

霍夫曼实际上证明了这个结果的一个版本，该版本适用于任意子集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ ，但我们不需要这个更一般的结论。由于单位超立方体 $\{0, 1\}^d$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 中是空的，我们有 $h(\mathbb{Z}^d) \geq 2^d$ ；这表明杜伊贡定理是紧致的。关于 Helly 数的进一步研究考虑了混合整数子集 $\mathbb{Z}^r \times \mathbb{R}^{d-r}$ [3]、代数组 [2] 或格的并集 [9]。

在本文的第一部分，我们研究积集或形式为 $S = A^d$ 的集合的 Helly 数，对于某个 $A \subseteq \mathbb{R}$ 。Dillon[7] 证明了一个关于乘积集的一般准则，这尤其意味着如果 p 是一个次数至少为 2 且 $A = \{p(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ ，的多项式，则对于所有 $d \geq 2$ 都有 $h(A^2) = \infty$ 。基于这一结果，人们可能会猜想 $h(A^2)$ 的有限性与集合 A 的稀疏程度有关。然而，在 [7] 中，通过构建一个集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$ ，其连续元素之间的差值最多为 2（一个“2-准周期”集），使得该 A^2 具有任意大的空多边形，因此具有任意大的 Helly 数。在第 3 节中，我们通过构建一个包含凸位置的无限顶点集合且其凸包为空的 2-准周期集来加强这一结果。

迪林的方法却没有给出关于指数晶格的任何信息：形式为 $L_d(\alpha) = \{\alpha^n : n \in \mathbb{N}_0\}^d$ 的集合。Ambrus, Balko, Frankl, Jung 和 Naszódi[1] 在二维空间中研究了这些集合，并获得了所有 $\alpha > 1$ 的上限和 $\alpha \in [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ 的精确值。

定理 3 (Ambrus, Balko, Frankl, Jung, Naszódi [1]). 令 $\alpha > 1$.

- 如果 $\alpha \geq 2$ ，则 $h(L_2(\alpha)) = 5$.
- 如果 $\alpha \in [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2)$ ，则 $h(L_2(\alpha)) = 7$.
- 如果 $\alpha \in (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ ，则 $h(L_2(\alpha)) \leq 3\lceil \log_\alpha(\frac{\alpha}{\alpha-1}) \rceil + 3$.

在第 2.1 节中，我们获得了一个更强的界限，采用了一种更简洁、更几何的方法：

定理 1.1. 对于 $\alpha > 1$,

$$h(L_2(\alpha)) \leq 2 \left\lceil \log_{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \right\rceil + 3.$$

这个不等式恢复了 $\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的 $h(L_2(\alpha))$ 的精确值。我们的证明方法还允许我们完全描述所有最大空多边形, 当 $\alpha \geq 2$ 。

Ambrus 等人 [1] 也通过构建一个顶点位于双曲线上的空多边形证明了一个下界为 $h(L_2(\alpha))$ 。他们表明, 对于 $\alpha > 1$, 我们有 $h(L_2(\alpha)) \geq \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}}$ 。在第 2.2 节中, 我们将这一界限扩展到所有维度:

定理 1.2. 对于 $\alpha > 1$ 和 $d > 1$,

$$h(L_d(\alpha)) \geq \binom{k+d-1}{d-1},$$

其中 $k = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}} \right\rfloor$ 。

该结果在 $\alpha < 2$ 时是非平凡的, 并且当 α 接近 1 时最强。

在第 4 节中, 我们研究了算术同余集的幂的赫利数, 这些集合的形式为 $A = S + m\mathbb{Z}$ 的某个子集 $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, m\}$ 。这个问题属于两个先前结果的范畴:

- De Loera, La Haye, Oliveros 和 Roldán-Pensado[6] 表明如果 $h(S) \leq 3^{3\ell} 2^d$, 其中 $S = \mathbb{Z} \setminus (L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{\ell})$, $L_1, \dots, L_{\ell}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的子格。如果 $A = S + m\mathbb{Z}$, 那么 A^d 通过移除恰好 $m^d - |S|^d$ 个 $\mathbb{Z}^d$ 的子格形成, 所以 $h(A^d) \leq 3^{3(m^d - |S|^d)} 2^d$ 。
- Garber[9] 表明如果 $h(S) \leq k 2^d$ 当 S 是 k 个 $\mathbb{Z}^d$ 的平移的并集; 如果 $d = 2$, 他证明了 $h(S) \leq k + 6$ 。如果 $A = S + m\mathbb{Z}$, 则 A^d 是 $|S|^d$ 的 $\mathbb{Z}^d$ 平移的并集, 因此我们得出结论 $h(A^2) \leq |S|^2 + 6$ 和 $h(A^d) \leq (2|S|)^d$ 。

我们对某些算术同余集改进了这些界限。

令 m 是一个最小素因子为 p 的正整数, 并且令 k 和 d 是满足 $d < \frac{p(m-1)}{m(m-k)}$ 的正整数。如果 $A = S + m\mathbb{Z}$ 其中 $|S| = k$, 则

$$h(A^d) \leq k^d.$$

这个定理在 m 自身为素数时最强, 此时不等式简化为 $d < (m - 1)/(m - k)$, 或 (重新排列后) $\frac{k}{m} > 1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{m})$ 。这一点在以下推论中更简洁地表述了。

推论 1.3. 对于任何素数 p 和任意的 $\alpha > 1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{p})$, 以及任意集合 $S \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$ 带有 $|S| \geq \alpha p$, 定义 $A = S + p\mathbb{Z}$ 。在这种情况下,

$$h(A^d) \leq |S|^d.$$

我们在 Section 5 中得出几个开放性问题。

2. 指数格子结构

2.1. 上界. Ambrus, Balko, Frankl, Jung 和 Naszódi 建立了 [1] 对 $h(L_2(\alpha))$ 的上界估计, 通过考虑一个空多边形并将它的边分为四种类型。然后他们利用空性质来限定每种类型的边的数量。

我们还考虑了指数格中的一个空多边形, 在一种情况下 (所有边的斜率均为非负), 我们在 [1] 中重复了分析。然而, 我们的剩余分析考虑了一组不同的点, 这是我们通过减少情况数来实现改进界限的方法。

引理 2.1 (引理 10 和推论 11 在 [1]). 一个仅包含非负斜率边的空多边形在 $L_2(\alpha)$ 中最多有 $2\lceil \log_\alpha(\frac{\alpha}{\alpha-1}) \rceil + 2$ 条边。

定理的证明 1.1. 考虑一个空的多边形 $\mathcal{P}$ 在 $L_2(\alpha)$ 中。如果 $\mathcal{P}$ 的所有边都有非负斜率, 那么 Lemma 2.1 是足够的。否则, $\mathcal{P}$ 包含顶点 $a = (\alpha^p, \alpha^q)$ 和 $b = (\alpha^r, \alpha^s)$, 使得 $p < r$ 和 $q > s$ 。我们可以选择 a 和 b 使得没有顶点严格位于 a 的左上方或 b 的右下方。如图 1 所示。令 $c = (\alpha^{r-1}, \alpha^{q-1})$, 并令 ℓ_1, ℓ_2 分别为通过 c 的水平线和垂直线。令 x 和 y 分别为 $\overline{ab}$ 与 ℓ_1 和 ℓ_2 的交点。我们定义 $i, j \in \mathbb{N}$ 使得 $d := (\alpha^{r-1-i}, \alpha^{q-1})$ 是 $\ell_1 \cap L_2(\alpha)$ 中严格位于 $\overline{ab}$ 左侧的最右点, 并且 $e := (\alpha^{r-1}, \alpha^{q-1-j})$ 是 $\ell_2 \cap L_2(\alpha)$ 中严格位于 $\overline{ab}$ 下方的最高点。 c 可能位于 $\overline{ab}$ 下方, 在这种情况下, 点 c, d, e 重合; 这不会影响我们的证明。为了限定 i 和 j , 设 $a' = (0, \alpha^q)$ 和 $b' = (\alpha^r, 0)$ 。直线 $\overline{a'b'}$ 和 ℓ_1 在 $x' = (\alpha^r - \alpha^{r-1}, \alpha^{q-1})$ 相交。由于 x' 严格位于 x 的左侧, 且 x 的第一个坐标小于 α^{r-i} , 我们

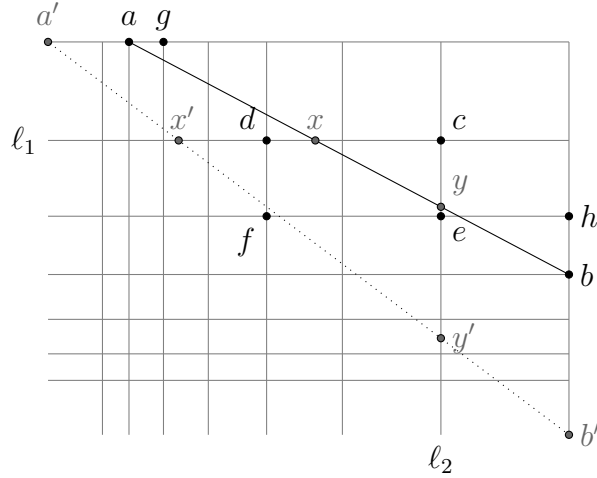


图 1. 证明中的命名点在定理 1.1 中。

有 $\alpha^r - \alpha^{r-1} < \alpha^{r-i}$. 换句话说,

$$i < \log_{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right).$$

同样的界限也适用于 j , 通过考虑 $\overline{a'b'}$ 和 ℓ_2 的交点。

我们的下一个目标是推导出关于 $\mathcal{P}$ 的顶点可能位置的限制。令 f 为使得 $cdef$ 成为矩形的点。令 g 是位于 a , 右边的格点, 令 h 是位于 b . 上方的格点。考虑一个位于 $\overline{ab}$ 下方且在五边形 $xyefd$. 外部的点 p

- 如果 p 位于 d , 的非严格下方和左侧, 则三角形 pab 包含 d .
- 如果 p 位于 e , 的非严格左下方, 则三角形 pab 包含 e .
- 否则, p 严格位于 b 的右下方或 a , 的左上方, 这违反了我们的假设。

因此, $\mathcal{P}$ 位于 $\overline{ab}$ 下方的所有顶点必须位于 $xyefd$. 内

同样地, 考虑一个位于 $\overline{ab}$ 上方且在三角形 cxy . 外部的点 p

- 如果 p 位于或高于 ℓ_1 , 则三角形 pab 包含 g .
- 如果 p 位于或在 ℓ_2 , 的右侧, 则三角形 pab 包含 h .

因此, $\mathcal{P}$ 位于 $\overline{ab}$ 上方的所有顶点必须是 g 或者 h , 或者位于 cxy . 内

最后, 我们限制矩形 $cdfe$. 中的顶点数量。对于任何给定的 x 坐标, 具有该 x 坐标的两个顶点不能位于 $\overline{ab}$ 的同一侧 (并且对 y 坐标也

是如此)。这表明矩形 $cdfe$ 中的顶点数量至多为

$$\min(i, j) + \min(i + 1, j + 1) \leq 2 \left\lceil \log_{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) \right\rceil - 1.$$

包括顶点 a, b, g, h 则得到所需的界限。 $\square$

基于这个证明，我们可以很容易地刻画所有最大的空多边形 $\alpha \geq 2$ 。

推论 2.2. 如果 $\alpha \geq 2$ ，则 $L_2(\alpha)$ 中的所有空五边形的顶点形式为 $(\alpha^p, \alpha^q), (\alpha^r, \alpha^s), (\alpha^{r-1}, \alpha^{q-1}), (\alpha^{p+1}, \alpha^q), (\alpha^r, \alpha^{s+1})$ ，其中 $p < r$ 和 $q > s$ 。

证明. Lemma 2.1 意味着任何边的斜率均为非负的空多边形最多有 4 个顶点。因此，五边形必须至少包含一条斜率为负的边；我们因此采用证明 Theorem 1.1 中的术语。如果 $\alpha \geq 2$ ，则 $\log_{\alpha}(\frac{\alpha}{\alpha-1}) \leq 1$ 。这意味着上述证明中的 i 和 j 都是 0，也就是说 $c = d = e$ 。因此，空多边形中唯一可能的顶点是 a, b, c, g, h ，这正是推论中所述的点。 $\square$

2.2. 下界. 我们现在将证明 $h(L_d(\alpha)) \geq \binom{k+d-1}{d-1}$ ，其中 $k = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}} \right\rfloor$ 。

定理的证明 1.2. 考虑集合中的点 X 在 $L_d(\alpha)$ 上，这些点位于凸面 $\prod_{i=1}^d x_i = \alpha^k$ 上。我们声称 $\text{conv}(X)$ 在 $L_d(\alpha)$ 中是空的。由于 $\prod_{i=1}^d x_i = \alpha^k$ 是一个凸函数， $L_d(\alpha)$ 中唯一可能位于 $\text{conv}(X)$ 内的点满足 $\prod_{i=1}^d x_i \geq \alpha^k$ 。所有满足 $\prod_{i=1}^d x_i = \alpha^k$ 的点都是 $\text{conv}(X)$ 的顶点，因此 $\text{conv}(X) \cap L_d(\alpha)$ 中的任何其他点都满足 $\prod_{i=1}^d x_i \geq \alpha^{k+1}$ 。另一方面，多面体 $\text{conv}(X)$ 完全位于半空间 $\sum_{i=1}^d x_i \leq \alpha^k + d - 1$ 内。（此半空间的边界超平面与由顶点 $(1, 1, \dots, \alpha^k), \dots, (\alpha^k, 1, \dots, 1)$ 确定的 facet 重合。）因此，为了证明 $\text{conv}(X)$ 在 $L_d(\alpha)$ 中是空的，只需要证明表面 $\prod_{i=1}^d x_i \geq \alpha^{k+1}$ 完全位于超平面 $\sum_{i=1}^d x_i = \alpha^k + d - 1$ 之上。在 $\prod_{i=1}^d x_i \geq \alpha^{k+1}$ 上坐标和最小的点是 $(\alpha^{(k+1)/d}, \dots, \alpha^{(k+1)/d})$ ，因此只需证明

$$d\alpha^{(k+1)/d} \geq \alpha^k + d - 1.$$

我们将应用替换 $\alpha = 1 + s^2$ 。利用不等式 $(1 + s^2)^{(k+1)/d} \geq 1 + \frac{k+1}{d}s^2$ （通过二项式定理）和 $(1 + s^2)^k < e^{s^2 k}$ （通过泰勒近似），我们可以看

出只需证明

$$d \left(1 + \frac{k+1}{d} s^2 \right) \geq e^{s^2 k} + d - 1.$$

我们特别选择的 k 是 $k = 1/s$, 因此前面的不等式简化为

$$s^2 + s + 1 \geq e^s.$$

这是因为 $k \geq 1$, 从而 $s \leq 1$. 所以我们找到了一个空多面体。该多面体的顶点数是有序非负整数 d 元组 $(n_1, n_2, \dots, n_d)$ 的数量, 其中 $\prod_{i=1}^k \alpha^{n_i} = \alpha^k$; 换句话说, d 元组 $(n_1, \dots, n_d)$ 的数量, 其中 $\sum_{i=1}^d n_i = k$ 。这众所周知是 $\binom{k+d-1}{d-1}$ (例如, 通过 “星与条” 方法)。□

3. 2- SYNETIC 集合

集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 被称为 2-合成的如果对于每一个 $n \in \mathbb{Z}$, 要么 $n \in A$ 要么 $n+1 \in A$ (或两者)。为了构造一个 2-共联集 A , 使得 A^2 具有无限的 Helly 数, Dillon[7] 构造了一个一系列逐渐变大的空多边形序列, 该序列使用对固定无理数的有理逼近。

在 [1] 中, Ambrus, 等。证明了 “Fibonacci 格子” 包含具有任意多个顶点的空多边形。

我们结合这些方法来构造一个 2-共联集, 其中包含一个无限顶点集合, 这些顶点处于凸位置, 并且它们的凸包是空的。

命题 3.1. 存在一个集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$, 使得

- 对于每一个 $n \in \mathbb{Z}$, 要么是 $n \in A$ 要么是 $n+1 \in A$ (或两者都是), 并且
- $A \times A$ 包含一个凸位置中的无限集 $\{p_i\}_{i \geq 1}$, 使得 $\text{conv} \{p_i\}_{i \geq 1}$ 为空。

证明. 定义斐波那契数列为 $F_0 = 0, F_1 = 1$, 和 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 。令 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 。设

$$\{p_i = (-F_{2i}, 2F_{2i+1} - 1)\}_{i \geq 1}.$$

使用比内公式, $\overline{p_i p_{i+1}}$ 的斜率为

$$\begin{aligned}
 \frac{(2F_{2i+3} - 1) - (2F_{2i+1} - 1)}{(-F_{2i+2}) - (-F_{2i})} &= -2 \frac{F_{2i+2}}{F_{2i+1}} \\
 &= -2 \left(\frac{\phi^{2i+2} - \psi^{2i+2}}{\phi^{2i+1} - \psi^{2i+2}} \right) \\
 &= -2 \left(\phi + \frac{(\phi - \psi)(\psi^{2i+1})}{\phi^{2i+1} - \psi^{2i+1}} \right) \\
 &= -2 \left(\phi + \frac{\psi^{2i+1}}{F_{2i+1}} \right).
 \end{aligned}$$

因为 $-1 < \psi < 0$ 和 F_{2i+1} 是递增的, 所以当 i 增加时, 这个表达式减少。因此点 p_i 处于凸位置。令 $\mathcal{P} = \text{conv} \{p_i\}_{i \geq 1}$ 。

令 ℓ 为直线 $y = -2\phi x$ 。根据比内公式, p_i 和 ℓ 之间的垂直距离是

$$2\phi \left(\frac{\phi^{2i} - \psi^{2i}}{\phi - \psi} \right) - \left(\frac{2\phi^{2i+1} - 2\psi^{2i+1}}{\phi - \psi} - 1 \right) = 1 - 2\psi^{2i}.$$

特别是当 i 增加时, p_i 和 ℓ 之间的距离增大并趋于接近 1。

令 L 由 $-2\phi x - 1 < y = -2\phi x$ 定义的带状区域。我们得出结论 $\mathcal{P} \subseteq L$ 。由于 L 的垂直宽度为 1, L 中的任意两个整数点不会具有相同的 y 坐标; 因为 ℓ 的斜率小于 -2 , $\mathcal{P}$ 中的任意两个格点的 y 坐标至少相差 2。特别是, 点 p_i 的 y 坐标与 $\mathcal{P}$ 中任何其他整数点的 y 坐标不同。如果 Y 是 $\mathcal{P}$ 中非顶点格点的 y 坐标的集合。然后 $A = \mathbb{Z} \setminus Y$ 是一个 2-同源集, 而 $\mathcal{P}$ 在 $A \times A$ 中是空的, 如所期望的。□

4. 算术同余集

本节的主要结果是对算术同余集的一个上限估计, 此处重新陈述以便于参考。

*

证明. 考虑一个空多边形 $\mathcal{P}$, 其顶点在 A^d 。假设为了矛盾, $\mathcal{P}$ 有两个顶点 u 和 v , 且 $v - u \in m\mathbb{Z}^d$ 。对于每个 $1 \leq j \leq m-1$, 令 $c_j = u + \frac{j}{m}(v-u)$ 为一个整数点。固定 $1 \leq i \leq d$, 并考虑点 $c_1, \dots, c_{m-1}$ 的 i 坐标, 这些坐标形成了模 m 的等差数列

- 如果这个等差数列在模 m 下是常数, 那么由于 u 和 v 的 i 坐标位于 A 中, $c_1, \dots, c_{m-1}$ 的 i 坐标也位于该集合中。 A .
- 如果这个等差数列是非常数的, 那么任何余数在该数列中最多出现 $\frac{m}{p}$ 次。因此, $c_1, \dots, c_{m-1}$ 的 i 坐标包含至多 $\frac{m}{p}(m-k)$ 个余数不。 A .

在两种情况下, $c_1, \dots, c_{m-1}$ 的第 i 个坐标中最多包含 $\frac{m}{p}(m-k)$ 个不在 A 中的剩余元素。对所有 i , 求和, $c_1, \dots, c_{m-1}$ 中至多有 $\frac{m}{p}(m-k)d$ 个坐标不在 A 中。然而, 我们知道 $\frac{m}{p}(m-k)d < m-1$ 。因此, 根据抽屉原理, 存在某个 c_i 其所有坐标都在 A 中。这违反了空条件。

因此, 任何给定的余数序列模 m , 至多有一个顶点, 所以总顶点数至多为 k^d 。 $\mathcal{P}$. $\square$

假设 $d < \frac{p(m-1)}{m(m-k)}$ 不能被加强为等式。例如, 以下情况满足 $d = \frac{p(m-1)}{m(m-k)}$ 但 $h(A^d) > k^d$ 。

命题 4.1. 如果 $S = \{0, 1\}$ 和 $A = S + 3\mathbb{Z}$, 则 $h(A^2) = 8$ 。

证明. 8 个点的构造如图 2 所示。

我们声称任何空多边形 P 至多有两个顶点, 其模 3 余数为 $(0, 0)$ 。然后, 通过应用 A 的对称性, 在 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ 中的四个可能的余数中, 每个最多在空多边形的顶点中出现两次——因此任何空多边形至多有 8 个顶点。

假设为了产生矛盾, $(3x_1, 3y_1), (3x_2, 3y_2), (3x_3, 3y_3)$ 是 P 的所有顶点。由于 P 是空的, 重心 $(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$ 必须有一个坐标与

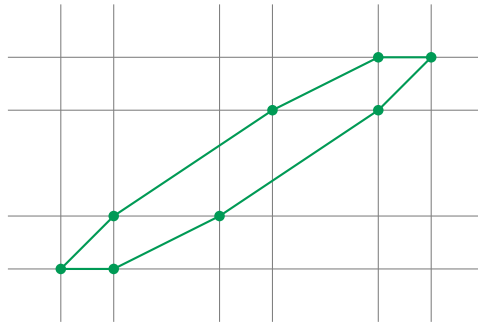


图 2. 一个空的 8-顶点多边形在 $(\{0, 1\} + 3\mathbb{Z})^2$ 中。

2(模 3) 同余。我们可以假设 $x_1 + x_2 + x_3 \equiv 2 \pmod{3}$ 。由于 x_1, x_2, x_3 的剩余类取值于 $\{0, 1\}$ ，因此它们不能在模 3 下互不相同。所有参数都相同，因此假设 $x_1 \equiv x_2 \pmod{3}$ 。同余条件保证了以下凸组合是整数点：

$$\begin{aligned} (2x_1 + x_2, 2y_1 + y_2), \\ (2x_2 + x_1, 2y_2 + y_1). \end{aligned}$$

由于两点的 x 坐标都是 0 (模 3)，那么两点的 y 坐标必须有余数 2 (模 3)。但这不可能，因为两点的 y 坐标的和是 0 (模 3)。因此， P 包含最多 2 个与 $(0, 0)$ 模 $3\mathbb{Z}^2$ 同余的顶点。 $\square$

5. 开放问题

本文中主要未解决的问题是在三维或更多维度的指数格中的空多边形顶点数的界限。特别地，目前还不清楚任何三维指数格是否包含具有无限多个顶点的空多边形。

问题 1. 是 $h(L_3(\alpha)) < \infty$ 吗？

虽然我们对 Theorem 1.1 的大部分证明可以扩展到更高维度，但我们引用 Lemma 2.1 来处理一个特殊情况，其在 [1] 中的证明依赖于对多边形边缘斜率进行排序。由于更高维度中的面无法以这种方式排序，因此需要一种新方法。

$h(L_d(\alpha))$ 的增长——当然，假设它是有限的——也是未知的。在二维情况下，Ambrus、Balko、Frankl、Jung 和 Naszódi[1] 指出，如果 $\alpha = 1 + \frac{1}{x}$ ，平面中最佳已知界限是

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq h(L_2(\alpha)) \leq Cx \log(x)$$

对于某些 $C > 0$ 。

问题 2. 改进 $h(L_2(1 + \frac{1}{x}))$ 的渐近界作为 $x \rightarrow \infty$ 。

在更高维度中，如 $x \rightarrow \infty$ ，Section 2.2 所示，对于每一个 d ，都存在一个 $c_d > 0$ 使得

$$c_d x^{(d-1)/2} \leq h(L_d(\alpha)),$$

尽管当然我们没有相应的上限。

我们在算术同余集上的界在 m 为素数且 S 是 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的重要比例时最强。当这些条件不成立时会发生什么？在这个方向上可能有很多值得探索的内容。

问题 3. 进一步证明算术同余集的 Helly 数的界限。

6. 致谢

本研究是在 MIT PRIMES –USA计划的资助下进行的。Dillon 还获得了国家自然科学基金会研究生研究基金的资助，资助编号为 2141064。

REFERENCES

- [1] Gergely Ambrus, Martin Balko, Nóra Frankl, Attila Jung, and Márton Naszódi, *On Helly numbers of exponential lattices*, European Journal of Combinatorics **116** (2024), 103884.
- [2] Nina Amenta, Jesús A. De Loera, and Pablo Soberón, *Helly's Theorem: New Variations and Applications*, 2016, arXiv:1508.07606 [math.MG].
- [3] Gennadiy Averkov and Robert Weismantel, *Transversal numbers over subsets of linear spaces*, Advances in Geometry **12** (2012), no. 1, 19–28.
- [4] Imre Bárány and Gil Kalai, *Helly-type problems*, Bulletin of the American Mathematical Society **59** (2022), no. 4, 471–502.
- [5] David E. Bell, *A theorem concerning the integer lattice*, Studies in Applied Mathematics **56** (1977), no. 2, 187–188.
- [6] Jesús A. De Loera, R. N. La Haye, D. Oliveros, and E. Roldán-Pensado, *Helly numbers of algebraic subsets of $\mathbb{R}^d$ and an extension of Doignon's Theorem*, Advances in Geometry **17** (2017), no. 4, 473–482.
- [7] Travis Dillon, *Discrete quantitative Helly-type theorems with boxes*, Advances in Applied Mathematics **129** (2021), 102217.
- [8] Jean-Paul Doignon, *Convexity in cristallographical lattices*, Journal of Geometry **3** (1973), no. 1, 71–85.
- [9] Alexey Garber, *On helly numbers for crystals and cut-and-project sets*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **61** (2024), no. 3, 203–214.
- [10] Eduard Helly, *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkte.*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **32** (1923), 175–176.
- [11] Alan J. Hoffman, *Binding constraints and Helly numbers*, Annals of the New York Academy of Sciences **319** (1979), no. 1 Second Intern, 284–288.
- [12] Johann Radon, *Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten*, Mathematische Annalen **83** (1921), no. 1, 113–115.

- [13] Herbert E. Scarf, *An observation on the structure of production sets with indivisibilities*, Proceedings of the National Academy of Sciences **74** (1977), no. 9, 3637–3641.

SRINIVAS ARUN, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE,
MA 02139, USA

Email address: `sarun@mit.edu`

TRAVIS DILLON, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE,
MA 02139, USA

Email address: `travis.dillon@mit.edu`