

$E_2^{hC_6}$ -同源性与 $\mathbb{R}P^2$ 的关系和 $\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$

IRINA BOBKOVA, JACK CARLISLE, EMMETT FITZ, MATTIE JI, PETER KILWAY, HILLARY KIM, KOLTON O'NEAL,
JACOB SCHUCKMAN, AND SCOTTY TILTON

摘要. 令 E_2 为高度 2 在素数 2 处的莫拉瓦 E-理论。在这篇论文中, 我们使用同伦固定点谱序列计算了 $E_2^{hC_6} \wedge \mathbb{R}P^2$ 和 $E_2^{hC_6} \wedge \mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$ 的同伦群。

TABLE OF CONTENTS

| | |
|--------------------------------------|----|
| 1. 介绍 | 1 |
| 2. 同伦固定点谱序列用于 $E_2^{hC_2}$ | 3 |
| 3. 同伦不动点谱序列 $E_2^{hC_2} \wedge V(0)$ | 4 |
| 4. 同伦不动点谱序列 $E_2^{hC_6}$ | 9 |
| 5. 同伦固定点谱序列 $E_2^{hC_6} \wedge V(0)$ | 11 |
| 6. 同伦不动点谱序列 $E_2^{hC_6} \wedge Y$ | 14 |
| References | 18 |

1. 介绍

代数拓扑的一个基本问题是计算球谱 \mathbb{S} 的稳定同伦群 $\pi_k(\mathbb{S})$ 对于所有 $k > 0$ 。Serre 的一个经典定理断言对于所有的 $k > 0$, $\pi_k(\mathbb{S})$ 是有限阿贝尔群, 因此球的稳定同伦群可以逐个素数地进行研究。根据霍普金斯和雷文奈尔的色收敛定理 ([Rav92], 定理 7.5.7), 任何 p -局部有限谱 X 是色谱塔的同伦极限:

$$X \longrightarrow \dots \longrightarrow L_n X \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 X \longrightarrow L_0 X,$$

其中 L_n 表示关于莫拉瓦 K -理论 $\bigvee_{i=0}^n K(i)$ 在素数 p 处的局部化。

这里，从 $L_n X$ 到 $L_{n-1} X$ 的连接态射由色数断裂正方形给出：

$$\begin{array}{ccc} L_n X & \longrightarrow & L_{K(n)} X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ L_{n-1} X & \longrightarrow & L_{n-1} L_{K(n)} X \end{array} .$$

因此，为了研究球面的稳定同伦群，我们需要理解所有素数 p 处 p 局部球谱 $\mathbb{S}_{(p)}$ 中的中间项 $L_{K(n)} \mathbb{S}_{(p)}$ 。

令 \mathbb{S}_n 为在 p 处的第 n 个莫拉瓦稳定群， \mathbb{G}_n 为在 p 处的第 n 个扩展莫拉瓦稳定群，以及 E_n 为高度 n 在素数 p 处的莫拉娃 E-理论。Devnatz 和 Hopkins 的一个著名结果 [DH04] 表明了 $L_{K(n)} \mathbb{S}_{(p)} \simeq E_n^{h\mathbb{G}_n}$ ，并且存在一个同伦不动点谱序列（HFPSS），其特征为：

$$E_2^{*,*} : H_c^*(\mathbb{G}_n, \pi_*(E_n)) \implies \pi_*(E_n^{h\mathbb{G}_n}) \cong \pi_*(L_{K(n)} \mathbb{S}_{(p)}).$$

此外，对于任何闭合子群 $G \subseteq \mathbb{G}_n$ ，这个谱序列下降到一个 HFPSS。

$$(1) \quad E_2^{*,*} : H_c^*(G, \pi_*(E_n)) \implies \pi_*(E_n^{hG}).$$

这一结果可以从 \mathbb{S} 扩展到任何有限复形。设 X 是一个有限复形， G 是 \mathbb{G}_n 的一个闭子群。则存在一个签名如下的 HFPSS：

$$(2) \quad E_2^{*,*} = H_c^*(G, (E_n)_* X) \implies \pi_*(E_n^{hG} \wedge X).$$

HFPSS(1) 是一个乘法谱序列，并且单位映射 $E_n^{hG} \rightarrow E_n^{hG} \wedge X$ 引出了谱序列之间的自然映射。这赋予了 HFPSS(2) 在 (1) 上的模结构。一般来说，这给出了 HFPSS 对于 E_n^{hG} 的乘法莱布尼兹法则以及对于 $E_n^{hG} \wedge X$ 的“模”莱布尼兹法则。

理解有限子群 G 的 E_n^{hG} 对揭开 $E_n^{h\mathbb{G}_n}$ 的结构之谜至关重要。例如，在 $n = 2$ 存在分解为各种有限子群 G [GHMR05, Beh06, Hen07, Hen18, BG18] 的 $E_2^{h\mathbb{G}_2}$ 关于 E_2^{hG} 的解。

这为研究这些解析中出现的谱提供了动力。本文的重点是素数 2 处的谱 $E_2^{hC_6}$ 。我们的目标是通过确定各自同伦不动点谱序列中的微分和扩展来计算 $\mathbb{R}P^2$ 和 $\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$ 的 $E_2^{hC_6}$ 同调。

设 $V(0)$ 为 \mathbb{S} 上乘以 2 的余纤维，设 Y 为 $V(0)$ 与 C_n 的粉碎积，为稳定 Hopf 映射 η 的余纤维。然后我们有

$$V(0) \simeq \Sigma^{-1} \Sigma^\infty \mathbb{R}P^2 \quad \text{and} \quad Y \simeq \Sigma^{-3} \Sigma^\infty (\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2).$$

因此，计算 $E_2^{hC_6}$ 同调群的 $\mathbb{R}P^2$ 和 $\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$ 等价于计算 $E_2^{hC_6}$ 同调群的 $V(0)$ 和 Y 。本文的目标是在第 5 节和第 6 节中完全计算 $E_2^{hC_6} \wedge V(0)$ 和 $E_2^{hC_6} \wedge Y$ 的 HFPSS。沿途，作为初步步骤，我们还将回顾 Sections 2, 3 和 4 中的 $E_2^{hC_2}$, $E_2^{hC_2} \wedge V(0)$ 和 $E_2^{hC_6}$ 的 HFPSS。

致谢. 此项工作源于 2024 年电子计算同伦理论 (eCHT) 本科生研究体验项目, 该项目得到美国国家科学基金会 DMS-2135884 资助。作者感谢 Dan Isaksen 在其 eCHT 中的支持和领导。第一作者感谢 Agnes Beaudry 启发了这个项目, 并感谢多年来与之相关的许多讨论。

2. 同伦固定点谱序列用于 $E_2^{hC_2}$

在本文的其余部分, 我们将用 $E = E_2$ 表示高度为 2 在素数 2 处的 Morava E-理论。同伦不动点谱序列

$$(3) \quad E_r^{s,t}(E^{hC_2}) : H^s(C_2, E_t) \implies \pi_{t-s} E^{hC_2}$$

已经被完全计算和研究了几十年了, 例如, 请参阅 [HS14] 和 [HS20] 以获取更近期的研究成果。在本节中, 我们将总结该计算的关键结果而不提供证明, 因为我们将建立在整个论文中使用的符号。请注意, 我们使用 Adams 标记法表示我们的谱序列: 当我们提到元素在 $E_r^{s,t}$ 中时, 我们指的是同伦固定点谱序列中茎为 $t - s$ 和过滤阶为 s 的元素。

令 $\mathbb{W} = W(\mathbb{F}_4)$ 是 Witt 向量的环对于 \mathbb{F}_4 。回想一下

$$E_* = \mathbb{W}[[u_1]][u^{\pm 1}], \quad |u_1| = 0 \text{ and } |u| = -2$$

和 $\mathbb{G}_2 \cong (W(\mathbb{F}_4)\langle S \rangle / Sa^\sigma = aS, S^2 = 2)^\times$, 其中 σ 表示 Frobenius 形态提升。中心子群 $C_2 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{G}_2$ 对 $E_0 = \mathbb{W}[[u_1]]$ 的作用是平凡的, 并且通过乘以 -1 对 u 进行作用。通过这个动作,

$$E_2^{*,*} = H^*(C_2, E_*) = \mathbb{W}[[u_1]][[u^2]^{\pm 1}, \alpha] / (2\alpha),$$

其中 $\alpha \in H^1(C_2, \pi_2(E))$ 是 $H^1(C_2, \mathbb{Z}[sgn])$ 的生成元的在映射下的像, 该映射将符号表示的生成元 $\mathbb{Z}[sgn]$ 映射到 u^{-1} 。

引理 2.1. d_3 微分在 (3) 中由

$$d_3(u^{-2}) = \alpha^3 u_1$$

生成, 以及关于 α , u_1 和 $u^{\pm 4}$ 的线性性。

引理 2.2. d_7 微分在 (3) 中由

$$d_7(u^{-4}) = \alpha^7$$

产生, 以及关于 α 和 $u^{\pm 8}$ 的线性性。

我们有 $E_8^{*,*}(E^{hC_2}) = E_\infty^{*,*}(E^{hC_2})$, 显示在 Figure 2 中。

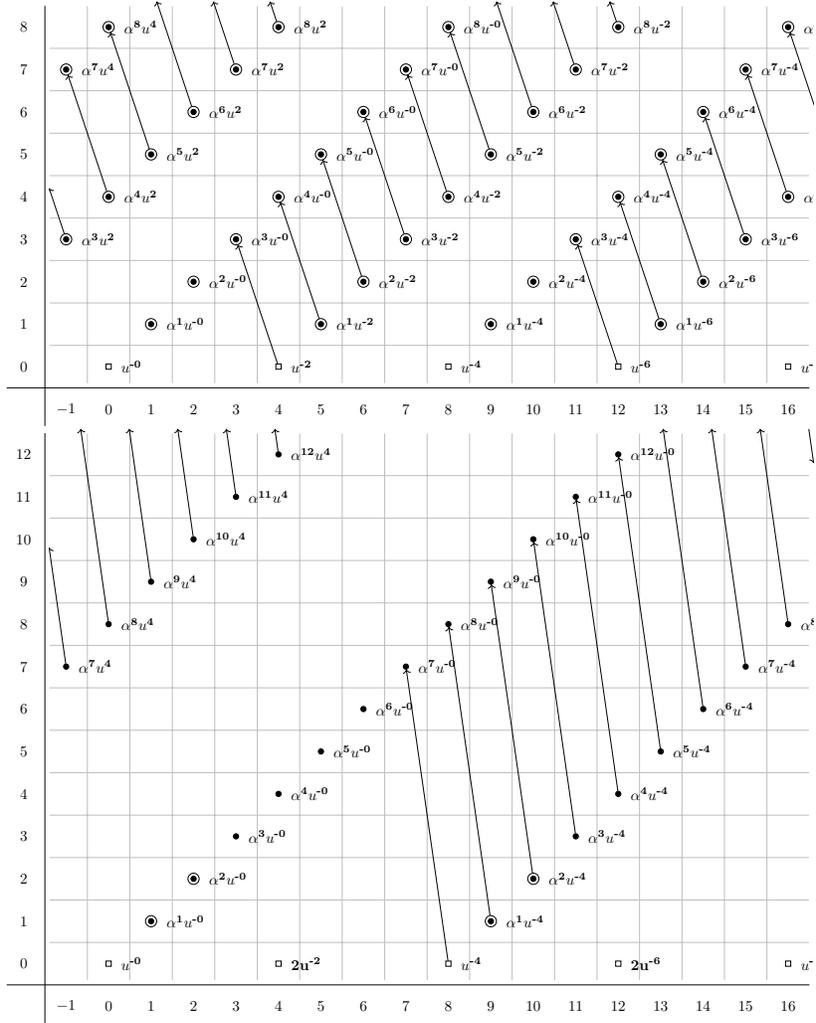


图 1. E_3 (顶部) 和 E_7 (底部) 页的 HFPSS 为 E^{hC_2} 。符号如下: $\odot = \mathbb{F}_4[[u_1]]$, $\bullet = \mathbb{F}_4$ 和 $\square = \mathbb{W}[[u_1]]$ 。

3. 同伦不动点谱序列 $E_2^{hC_2} \wedge V(0)$

在本节中, 我们将计算谱序列

$$(4) \quad E_r^{s,t}(E^{hC_2} \wedge V(0)) : H^s(C_2, \pi_t(E \wedge V(0))) \implies \pi_{t-s} E^{hC_2} \wedge V(0)$$

我们的起点是谱的纤维序列

$$(5) \quad E \xrightarrow{2} E \xrightarrow{i} E \wedge V(0) \xrightarrow{p} \Sigma E.$$

映射 i 是 $V(0)$ 底部的单元的包含, 而映射 p 是到顶部单元的投影。

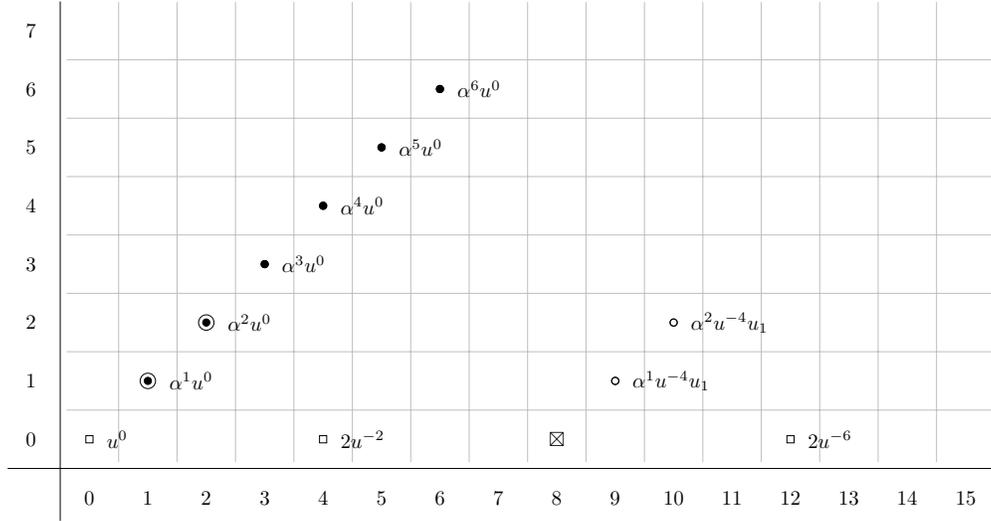


图 2. HFPSS 的 $E_8 = E_\infty$ 页针对 E^{hC_2} 。符号如下: $\odot = \mathbb{F}_4[[u_1]]$, $\bullet = \mathbb{F}_4$, $\circ = u_1\mathbb{F}_4[[u_1]]$, $\square = \mathbb{W}[[u_1]]$ 和位于 $(8, 0)$ 的 \boxtimes 表示 $2u^{-4}W \oplus u^{-4}u_1W[[u_1]]$ 。同伦群是 16 周期的, 其周期生成元为 u^{-8} 。

纤维序列 (5) 引发了一个同伦群的短精确序列

$$(6) \quad 0 \rightarrow \pi_t E \xrightarrow{2} \pi_t E \rightarrow \pi_t(E \wedge V(0)) \cong \pi_t E/2 \rightarrow 0$$

对于任何 t (如果 t 是奇数, 这个序列中的每一项都为零)。还需注意我们有

$$\pi_*(E \wedge V(0)) = E_*/2 \cong \mathbb{F}_4[[u_1]][u^{\pm 1}].$$

短精确序列 (6) 引发了一个群上同调的长正合列

$$(7) \quad \cdots \rightarrow H^s(C_2, \pi_t E) \xrightarrow{2} H^s(C_2, \pi_t E) \xrightarrow{i} H^s(C_2, \pi_t E/2) \xrightarrow{p} H^{s+1}(C_2, \pi_t E) \rightarrow \cdots$$

引理 3.1 (第 2.2 节 [BBG⁺24]). E_2 -页的 HFPSS 对于 $E^{hC_2} \wedge V(0)$ 是

$$E_2^{*,*}(E^{hC_2} \wedge V(0)) = H^*(C_2, E_*/2) = \mathbb{F}_4[[u_1]][u^{\pm 1}][\alpha].$$

请注意 $H^*(C_2, E_*/2)$ 是 $H^*(C_2, E_*)$ 和 $\eta = \alpha u_1$ 上的一个模。

备注 3.2. 令 $v_1 \in \pi_2(V(0))$ 在映射 p 下映射到 $\eta \in \pi_1(\mathbb{S})$, 并考虑交换图中 v_1 的命运, 其中垂直的映射是环光谱 E^{hC_2} 的单位映射:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{S}) & \xrightarrow{i} & \pi_2(V(0)) & \xrightarrow{p} & \pi_1(\mathbb{S}) \xrightarrow{2} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \pi_2(E^{hC_2}) & \xrightarrow{i} & \pi_2(E^{hC_2} \wedge V(0)) & \xrightarrow{p} & \pi_1(E^{hC_2}) \xrightarrow{2} \dots \end{array}$$

由于 $\eta \in \pi_1(E^{hC_2})$ 是一个阶为 2 的元素, 并且被 $u_1\alpha = u_1u^{-1}h$ 检测到, 我们有 $v_1 \in \pi_2(E^{hC_2} \wedge V(0))$ 被 u_1u^{-1} 检测到。

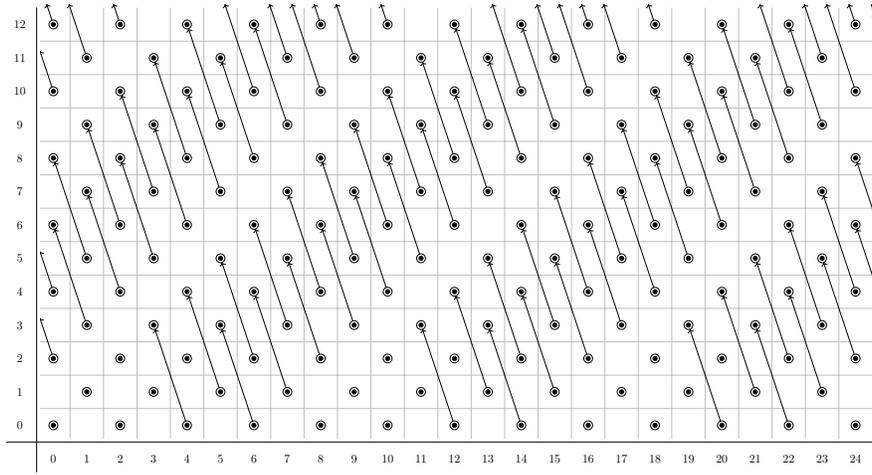


图 3. HFPSS 的第 E_3 页为 $E^{hC_2} \wedge V(0)$ 。符号 \bullet 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1]]$ 。

3.1. d_3 -微分.

引理 3.3. d_3 同伦固定点谱序列 (4) 中对于 $E^{hC_2} \wedge V(0)$ 的微分由

$$d_3(u^{-2}) = \alpha^3 u_1,$$

$$d_3(u^{-3}) = \alpha^3 u^{-1} u_1,$$

生成, 并且相对于 α , u_1 和 $u^{\pm 4}$ 是线性的。

证明. 第一个微分和相对于 u_1 , α 和 $u^{\pm 4}$ 的线性关系来自 Theorem 2.1 以及这个谱序列是 $E_r(E^{hC_2})$ 上的一个模的事实。接下来我们注意到, 在 $d_3(v_1^3) = v_1\eta^3$ 的 Adams–Novikov 谱序列中对于 $\pi_*V(0)$ (参见例如 [Rav78, Thm. 5.13(a)])。然后我们有

$$d_3(v_1^3) = d_3(u^{-3}u_1^3) = u_1^3 d_3(u^{-3}) = v_1\eta^3 = u_1u^{-1}\alpha^3 u_1^3,$$

这意味着 $d_3(u^{-3}) = \alpha^3 u^{-1} u_1$ 。

□

所有 d_3 微分都是单射的，因此这些微分的源在 E_4 页面上消失。这些微分不是满射的，并且它们的上核是由 α 的幂生成的 \mathbb{F}_4 的副本。这一点可以在 Figure 4 中看到。

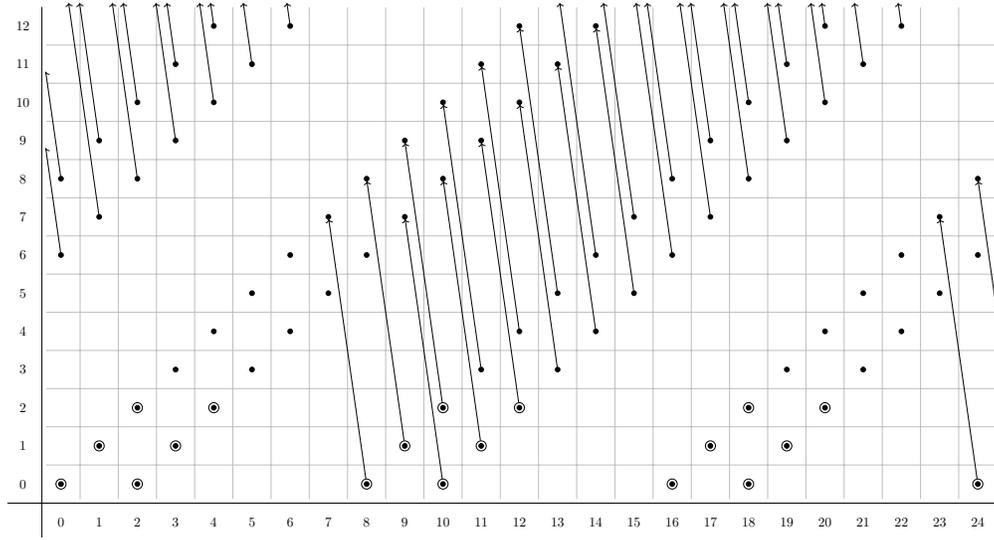


图 4. E_7 页的 HFPSS，对于 $E^{hC_2} \wedge V(0)$ 。符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 ，而 \circ 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1]]$ 。

3.2. 第 E_∞ 页. 由于稀疏性，对于偶数 r 没有可能的 d_r 微分。有可能的 d_5 微分，但它们是平凡的。

引理 3.4. 在谱序列 (4) 中没有非平凡的 d_5 微分。

证明. 这来自于模块结构 $E_r(E^{hC_2} \wedge V(0))$ 在 $E_r(E^{hC_2})$ 上的结构以及在 $E_r(E^{hC_2})$ 中没有 d_5 微分的事实。 □

在继续下一个微分之前，我们想陈述以下有用的技巧行引理，它是几何边界定理 [Rav86, Thm. 2.3.4] 的一个特例。

引理 3.5. 存在映射 $\delta_r : E_r^{s,t}(E^{hC_2} \wedge V(0)) \rightarrow E_r^{s+1,t}(E^{hC_2})$ 使得

$$\delta_2 : E_2^{s,t}(E^{hC_2} \wedge V(0)) \rightarrow E_2^{s+1,t}(E^{hC_2})$$

是从 (5) 产生的连接同态。对于所有 r ,

$$\delta_r d_r = d_r \delta_r$$

和 δ_{r+1} 是由 δ_r 诱导的。

引理 3.6. $HFPSS$ 中针对 $E^{hC_2} \wedge V(0)$ 的 d_7 微分由

$$\begin{aligned} d_7(u^{-4}) &= \alpha^7, \\ d_7(u^{-5}) &= u^{-1}\alpha^7, \end{aligned}$$

以及对 u_1 、 α 和 $u^{\pm 8}$ 的线性度产生。

证明. 第一个微分来自于同伦固定点谱序列中对于 E^{hC_2} 的相同微分. 谱序列 $E_r(E^{hC_2} \wedge V(0))$ 是环谱序列 $E_r(E^{hC_2})$ 上的模, 其中包含 $d_7(\alpha) = d_7(u_1) = 0$ 和 $d_7(u^{\pm 8}) = 0$, 因此这些元素上的微分是线性的. 最后, 由于 $\delta_2(u^{-5}) = u^{-4}\alpha$, Theorem 3.5 意味着

$$d_7(u^{-5}) = d_7(\delta_7(u^{-4}\alpha)) = \delta_7(d_7(u^{-4}\alpha)) = \delta_7(\alpha^8) = u^{-1}\alpha^7.$$

□

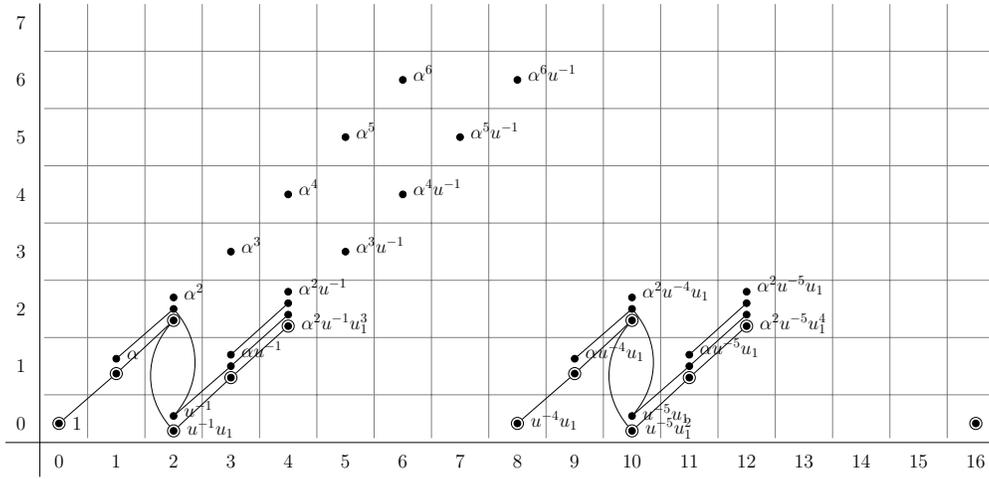


图 5. 同伦群为 $E^{hC_2} \wedge V(0)$. 符号表示为: $\bullet = \mathbb{F}_4$, 以及 $\odot = \mathbb{F}_4[[u_1]]$. 斜率为 1 的线表示乘以 η . 连接同一茎中元素的线表示群扩张. 同伦群是 16 周期的.

3.3. 扩展问题. 回忆同伦群中的长正合序列

$$\cdots \rightarrow \pi_{2k-s}(E^{hC_2}) \xrightarrow{i} \pi_{2k-s}(E^{hC_2} \wedge V(0)) \xrightarrow{p} \pi_{2k-s-1}(E^{hC_2}) \xrightarrow{2} \cdots$$

所有第 E_∞ 页上的非平凡扩张都由以下引理中的扩张生成.

引理 3.7. 我们有 $2u^{-1} = \alpha^2 u_1 \in \pi_2(E^{hC_2} \wedge V(0))$.

证明. 对于 $u^{-1} \in \pi_2(E^{hC_2} \wedge V(0))$, 我们有 $p_*(u^{-1}) = \alpha \in \pi_1 E^{hC_2}$. 然后根据来自 [BBPX22] 的引理 2.19,

$$2u^{-1} = i_*(\eta\alpha) = \alpha^2 u_1. \quad \square$$

作为引理 3.7 的推论, 我们能够解决第 E_∞ 页上的扩展问题 (参见图 5 并发现 $\pi_2(E^{hC_2} \wedge V(0)) = \alpha^2 \mathbb{F}_4 \oplus u^{-1} \mathbb{W}/4[[u_1]]$ 和 $\pi_{10}(E^{hC_2} \wedge V(0)) = \alpha^2 u^{-4} u_1 \mathbb{F}_4 \oplus u^{-5} u_1 \mathbb{W}/4[[u_1]]$).

4. 同伦不动点谱序列 $E_2^{hC_6}$

在本节中, 我们计算同伦不动点谱序列

$$(8) \quad E_r^{s,t}(E^{hC_6}) : H^s(C_6, E_r) \implies \pi_{t-s}(E^{hC_6})$$

我们不声称本节中的计算有任何原创性; 这些计算几十年来一直为人所知, 最早可追溯到 Mahowald 和 Rezk 的工作在 [MR09]。我们将这个计算展示在这里是为了为我们接下来两节的计算奠定基础。

4.1. 计算 E_2 -页. 群 $C_3 = \mathbb{F}_4^\times = \langle \zeta \rangle$ 在谱 E^{hC_2} 和 $E^{hC_6} \simeq (E^{hC_2})^{hC_3}$ 上有一个作用。此外, 对于 E^{hC_6} 的同伦固定点谱序列是 E^{hC_2} 的同伦固定点谱序列的 C_3 固定点, 前者中的 d_r 微分是后者中 d_r 微分的限制。 C_3 在群上同调 $H^*(C_2, E_*)$ 上的作用由下式给出 (见 (2.2) 式的 [BBG⁺24]):

$$(9) \quad \zeta \cdot u_1 = \omega u_1 \quad \zeta \cdot u = \omega u \quad \zeta \cdot \alpha = \omega^2 \alpha,$$

其中 ω 是一个原始三次单位根。

应用这些公式, 我们可以计算出 E^{hC_6} 的 HFPS 的 E_2 页。

命题 4.1 (引理 2.3 的 [BBG⁺24]). 令 $w = u^{-2}\alpha$ 。同伦谱序列 (8) 的 E_2 页由以下给出:

$$E_2^{*,*} = H^*(C_6, E_*) = \mathbb{W}[[u_1^3]][w, [u_1 u^{-4}], [u^6]^{\pm 1}]/(2w).$$

我们还为以下重要的 C_6 -不变元素命名

$$v_1 v_2 := u_1 u^{-4} \quad v_2^2 := u^{-6} \quad v_1^2 := u_1^2 u^{-2} = [v_1 v_2]^2 [v_2^2]^{-1}$$

请注意, 这些元素是不可分解的: $v_1 = u^{-1} u_1$ 和 $v_2 = u^{-3}$ 不是 C_6 不变的, 也不是这个上同调环中的元素。注意, $v \in \pi_3 \mathbb{S}$ 被 $\alpha^3 = w^3 v_2^2$ 检测到。

4.2. 计算中间页. 在谱序列 (8) $E_r(E^{hC_6})$ 中, 唯一的非平凡微分是 d_3 和 d_7 。如上所述, $E_r(E^{hC_6})$ 中的微分仅仅是谱序列 $E_r(E^{hC_2})$ 中微分在 C_3 固定点上的限制。

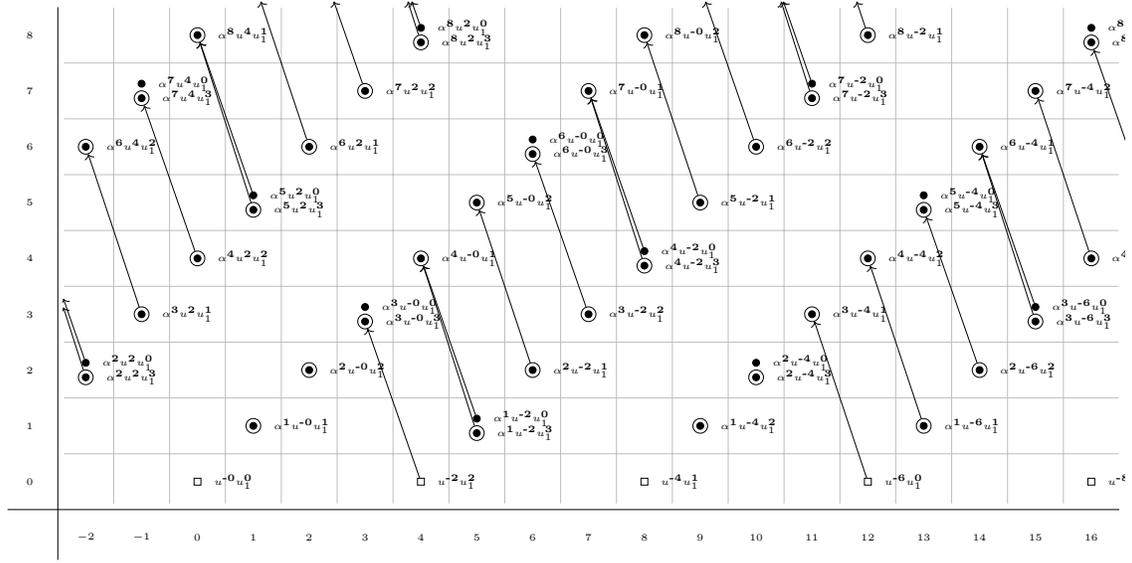


图 6. HFPSS 的 E_3 页针对 E^{hC_6} 。符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 ，符号 \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$ ，符号 \square 表示 $\mathbb{W}[[u_1^3]]$ 。每个符号右边的项表示生成元。

引理 4.2. d_3 -差分在谱序列 (8) 中由

$$d_3(u^{-2}u_1^2) = \alpha^3 u_1^3$$

$$d_3(u^{-2}\alpha) = \alpha^4 u_1$$

生成，并且相对于 $v = \alpha^3, \eta = \alpha u_1, u^{-4}u_1$ 和 $v_2^{\pm 4} = u^{\pm 12}$ 是线性的。

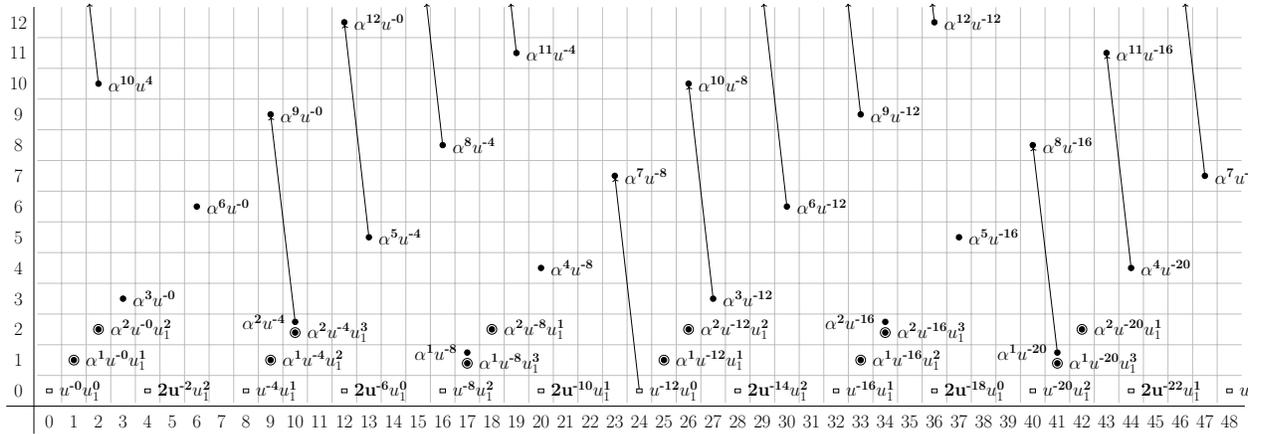


图 7. HFPSS 的第 E_7 页针对 E^{hC_6} 。符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 ，符号 \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$ ，符号 \square 表示 $\mathbb{W}[[u_1^3]]$ 。

第 E_4 页是 $(24,0)$ -周期的, 其周期性生成元为 u^{-12} 。由于稀疏性, 我们有 $E_4 = E_7$ 页, 在 Figure 7 中显示。我们在下面的命题中总结了在 E_7 页上的微分。

命题 4.3. d_7 在谱序列 (8) 中的微分由

$$\begin{aligned} d_7(\alpha^2 u^{-4}) &= \alpha^9, \\ d_7(u^{-12}) &= \alpha^7 u^{-8}, \\ d_7(\alpha u^{-20}) &= \alpha^8 u^{-16}, \end{aligned}$$

生成, 并且相对于 $v = \alpha^3$ 和 $v_2^{\pm 8} = u^{\pm 24}$ 是线性的。

由稀疏性可知, 在第 E_8 页及更高页和 $E_8 = E_\infty$ 页上没有微分, 如 Figure 8 所示。同伦群具有周期为 48 的周期性, 其周期生成元为 v_2^8 。我们记录以下正滤子中的生成元:

$$(10) \quad \eta = \alpha u_1 \quad \bar{\kappa} = \alpha^4 u^{-8} \quad y = \alpha u^{-8} = w v_2^2$$

并注意 $v = \alpha^3 = y^3 v_2^{-8}$ 。

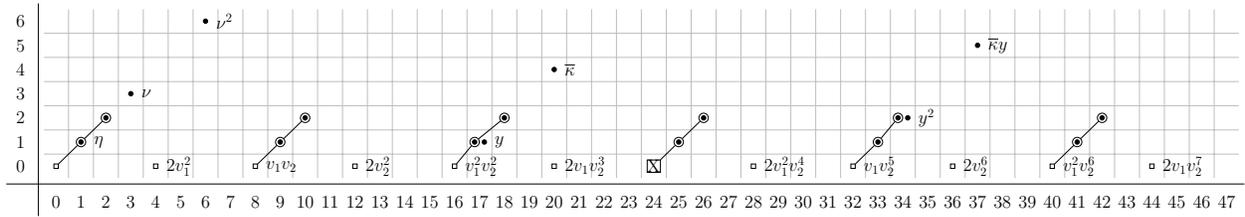


图 8. HFPSS 的 $E_8 = E_\infty$ 页针对 E^{hC_6} 。符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 , \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$, \square 表示 $\mathbb{W}[[u_1^3]]$ 。
 \boxtimes 在茎 24 处表示 $2v_2^4 \mathbb{W} \oplus v_1^3 v_2^3 \mathbb{W}[[u_1^3]]$ 。线条表示与 η 相乘。同伦群是 48 周期的。

5. 同伦固定点谱序列 $E_2^{hC_6} \wedge V(0)$

在本节中, 我们计算同伦固定点谱序列 $E^{hC_6} \wedge V(0)$

$$(11) \quad E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge V(0)) := (E_2^{s,t}(E^{hC_2} \wedge V(0)))^{C_3} = H^s(C_6, E_t/2) \implies \pi_{t-s}(E^{hC_6} \wedge V(0)).$$

5.1. 第 E_2 页。由于 $E^{hC_6} \simeq (E^{hC_2})^{hC_3}$, 且 $V(0)$ 是一个有限复形, 我们有 $E^{hC_6} \wedge V(0) \simeq (E^{hC_2} \wedge V(0))^{hC_3}$ 。我们使用同构 $H^*(C_6, E_*/2) \cong H^*(C_2, E_*/2)^{C_3}$ 来计算 $H^*(C_6, E_*/2)$ 。 $H^*(C_2, E_*/2)$ 的同调在 Theorem 3.1 中描述, $C_3 = \mathbb{F}_4^\times$ 的作用如 (9) 所示, 并且我们读取不变量。

引理 5.1. 我们有

$$H^*(C_6, E_*/2) = \mathbb{F}_4[[u_1^3]][[u_1 u^{-1}], [u^{-3}]^{\pm 1}, w],$$

其中 $w = \alpha u^{-2}$ 。

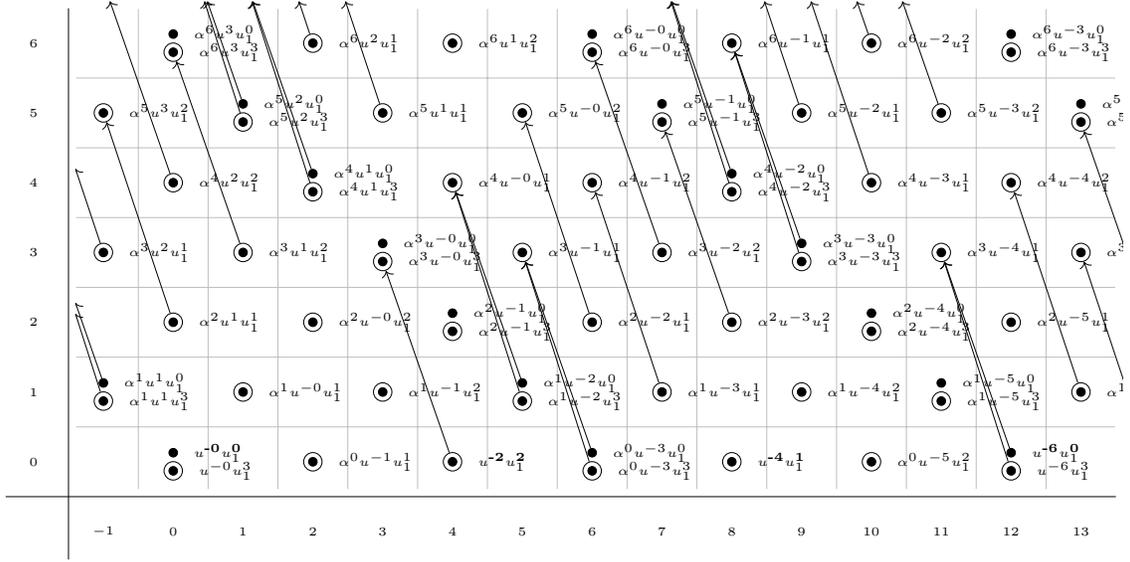


图 9. E_3 页的 HFPSS 代表 $E^{hC_6} \wedge V(0)$, 符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 , 符号 \circ 表示 $\mathbb{F}_4[[u^3]]$.

5.2. **微分.** 大多数微分来自于以下事实: $E^{hC_6} \wedge V(0)$ 的 HFPSS 是在 C_3 作用下 $E^{hC_2} \wedge V(0)$ 的 HFPSS 的固定点, 该作用由 (9) 给出.

引理 5.2. d_3 微分在 (11) 中由

$$\begin{aligned} d_3(u_1^2 u^{-2}) &= \alpha^3 u_1^3 \\ d_3(u^{-3}) &= \alpha^3 u^{-1} u_1 \end{aligned}$$

生成, 并且相对于 η, ν, u_1^3 和 $u^{\pm 12}$ 具有线性.

证明. 这些微分是限制在 C_6 固定点的 Theorem 3.3 中的微分. □

我们现在将计算以下引理中的 d_7 微分.

引理 5.3. d_7 谱序列 (11) 中的微分由

$$\begin{aligned} d_7(\alpha^2 u^{-4}) &= \alpha^9 & d_7(\alpha u^{-5}) &= \alpha^8 u^{-1} \\ d_7(u^{-12}) &= \alpha^7 u^{-8} & d_7(\alpha^2 u^{-13}) &= \alpha^9 u^{-9} \\ d_7(\alpha u^{-20}) &= \alpha^8 u^{-16} & d_7(u^{-21}) &= \alpha^7 u^{-17} \end{aligned}$$

生成, 并且关于 ν, u_1^3, η 和 $u^{\pm 24}$ 是线性的.

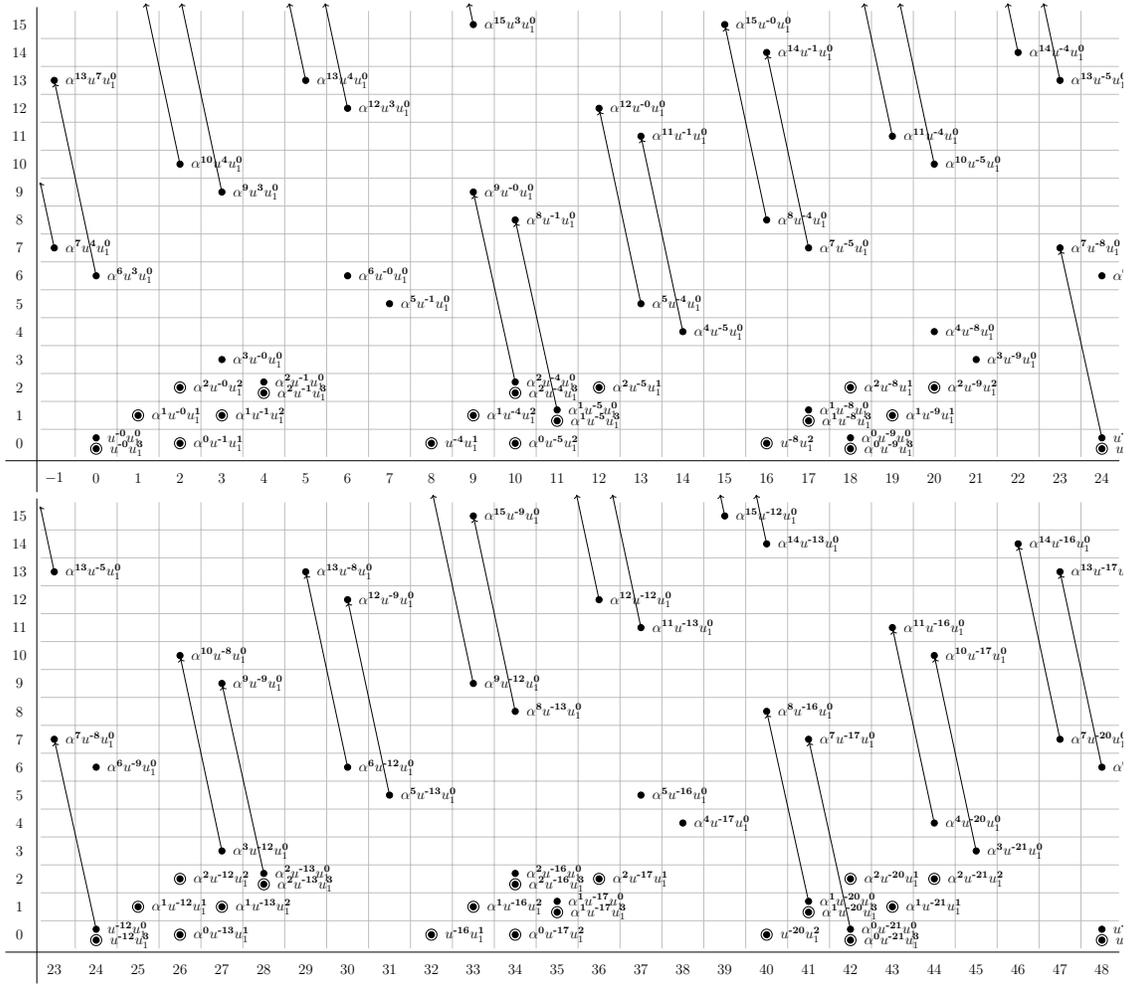


图 10. E_7 页的 HFSS 代表 $E^{hC_6} \wedge V(0)$, 符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 , 符号 \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$.

证明. 左列的微分通过自然性 (或模结构上的 E^{hC_6}) 从 Theorem 4.3 的微分得出. 右列的微分是将 Theorem 3.6 的微分限制到 C_6 的不动点上得到的. 或者, 右列的微分通过几何边界定理 (参见 [Rav86, Thm. 2.3.4] 和 [Beh12, App. 4] 中的一般陈述和证明或 [BBPX22, Thm. 2.17] 中对类似情况的应用) 得出. \square

E_7 页面的图表显示在 Figure 10 中, 而 $E_\infty = E_8$ 页面显示在 Figure 11 中. 对于这些扩展, 我们使用了 [BBPX22] 中的引理 2.19, 这表明 $2u^{\frac{1}{2}}u_1^i = \eta\alpha u^{\frac{1}{2}}u_1^i$. 我们使用以下符号表示第 E_∞ 页的生成元 (请注意, y 和 \bar{k} 是来自 $\pi_*E^{hC_6}$ (10) 中同名元素的图像):

$$(12) \quad x = \alpha^2 u^{-1} \quad v_1 = u_1 u^{-1} \quad v_2 = u^{-3} \quad y = \alpha u^{-8} \quad \bar{k} = \alpha^4 u^{-8}$$

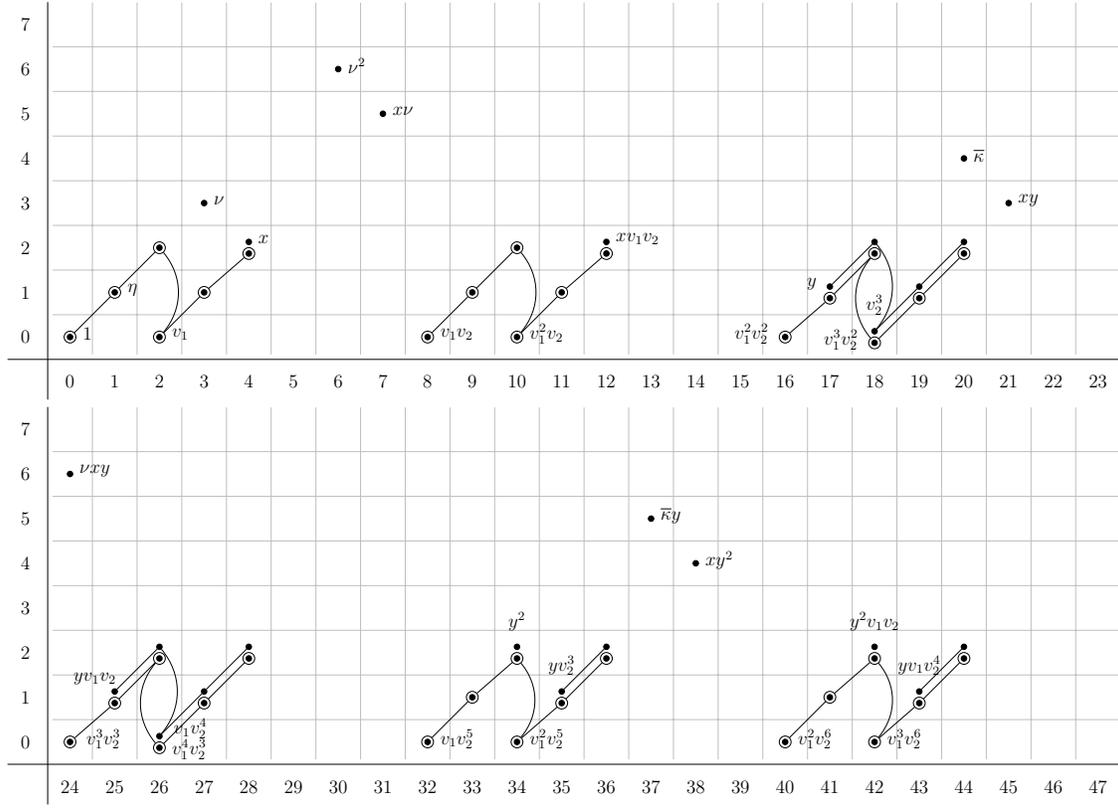


图 11. 第 $E_8 = E_\infty$ 页的 HFPS 为 $E^{hC_6} \wedge V(0)$. 符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 , 而符号 \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$. 斜率为 1 的直线表示乘以 η .

6. 同伦不动点谱序列 $E_2^{hC_6} \wedge Y$

在本节中, 我们计算同伦不动点谱序列 $E^{hC_6} \wedge Y$

$$(13) \quad E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge Y) = H^s(C_6, \pi_t(E \wedge Y)) \implies \pi_{t-s}(E^{hC_6} \wedge Y).$$

6.1. 第 E_2 页. 余纤维序列

$$E^{hC_6} \wedge \Sigma V(0) \xrightarrow{\eta} E^{hC_6} \wedge V(0) \rightarrow E^{hC_6} \wedge Y$$

诱导出对应同伦不动点谱序列的 E_2 页上的映射

$$\dots \xrightarrow{\eta} E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge V(0)) \xrightarrow{i} E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge Y) \xrightarrow{p} E_2^{s,t-2}(E^{hC_6} \wedge V(0)) \xrightarrow{\eta} E_2^{s+1,t}(E^{hC_6} \wedge V(0)) \rightarrow \dots$$

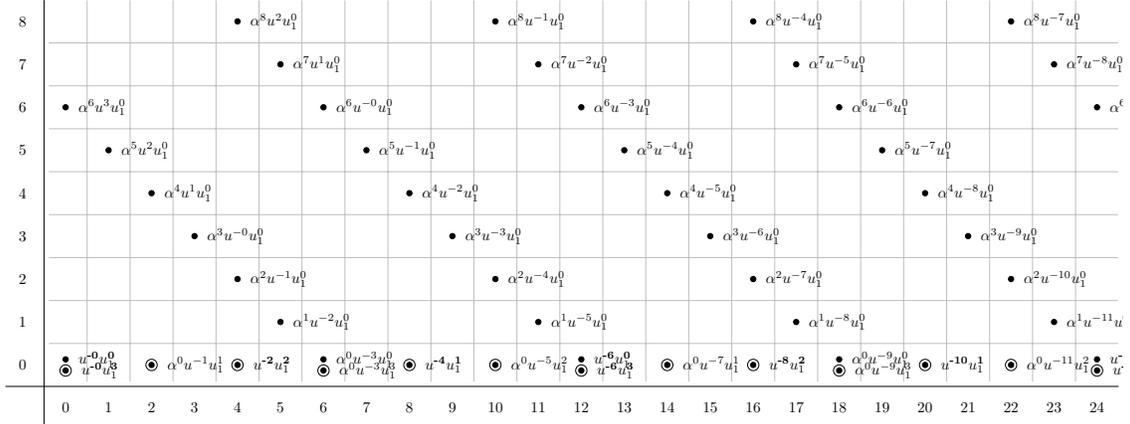


图 12. E_2 页的 HFPSS 代表 $E^{hC_6} \wedge Y$, 符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 , 而符号 \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$.

每个与 η 相乘的映射都是单射, 只是在幂级数模中移动次数。因此, $p : E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge Y) \rightarrow E_2^{s,t-2}(E^{hC_6} \wedge V(0))$ 映射是零映射。我们得出结论, 每个 $E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge Y)$ 都同构于 η 的上核:

$$0 \rightarrow E_2^{s-1,t-2}(E^{hC_6} \wedge V(0)) \xrightarrow{\eta} E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge V(0)) \rightarrow E_2^{s,t}(E^{hC_6} \wedge Y) \rightarrow 0.$$

E_2 页在 Figure 12 中给出。

6.2. d_3 和 d_5 微分方程.

定理 6.1. 所有同伦不动点谱序列中与 $E^{hC_6} \wedge Y$ 相关的微分 d_r 均相对于 $v_1 = u^{-1}u_1$ 、 $v = \alpha^3$ 和 $v_2^{\pm 8}$ 是线性的。

证明. 谱 Y 具有一个 v_1 -自映射, 因此引理 5.12 的 [BBPX22] 表明 HFPSS 中所有关于 $E^{hC_6} \wedge Y$ 的微分 d_r 都是 $v_1 = u^{-1}u_1$ -线性的。微分是 α^3 线性的, 因为 α^3 是一个永久循环, 因为它检测到了 $v \in \pi_3(\mathbb{S})$ 。微分是 $v_2^{\pm 8}$ 线性的, 因为 HFPSS 上的模块结构对于 E^{hC_6} 而言。□

与前两个谱序列不同, E_3 页面上的微分都是平凡的。

引理 6.2. d_3 -微分在 $E^{hC_6} \wedge Y$ 的同伦不动点谱序列中都是平凡的。

证明. 唯一可能支持非平凡的 d_3 微分的群是 $t \equiv 4 \pmod{6}$ 的 $E_3^{0,t} = E_2^{0,t}$ 群。对于这些群, 我们有

$$E_3^{0,t} \cong u^{-\frac{t}{2}} u_1^2 \mathbb{F}_4[[u_1^3]] \cong (u^{-3})^{\frac{t-4}{6}} v_1^2 \mathbb{F}_4[[u_1^3]].$$

然后我们观察到, 对于任意的 $f \in \mathbb{F}_4[[u_1^3]]$ 和任何整数 n , 由于稀疏性, 我们有 $d_3(f(u^{-3})^n) = 0$ 。然后, 由于 d_3 是 v_1 -线性的 (因此, 也是 v_1^2 -线性的), 我们有 d_3 对于 $E_3^{0,t}$ 中的任何元素在 $t \equiv 4 \pmod{6}$ 下必须消失。□

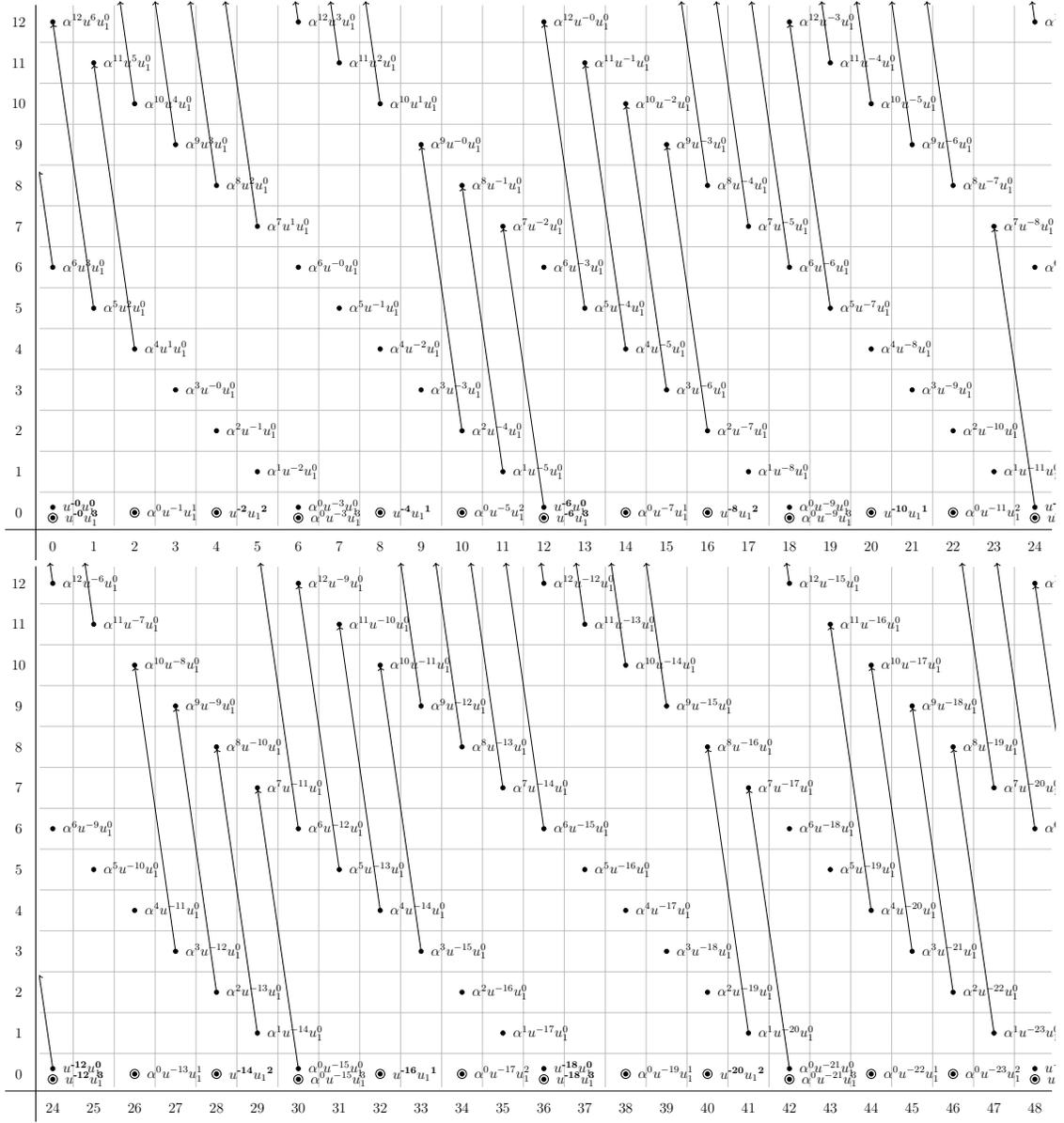


图 13. E_7 页面的 HFSS 为 $E^{hC_6} \lambda Y$ 。符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 。

引理 6.3. d_5 -微分在 $E^{hC_6} \lambda Y$ 的同伦固定点谱序列中全部为平凡的。

证明. 如在 Theorem 6.2 中, d_5 的唯一可能来源是群组 $E_5^{0,t} = u^{-\frac{t}{2}} u_1 \mathbb{F}_4[[u_1^3]]$ 对于 $t \equiv 2 \pmod{6}$ 。对于 $f \in \mathbb{F}_4[[u_1^3]]$, 我们有 $d_5(fu^{-\frac{t}{2}} u_1) = v_1 d_5(fu^{-(\frac{t}{2}-1)}) = 0$ 。 \square

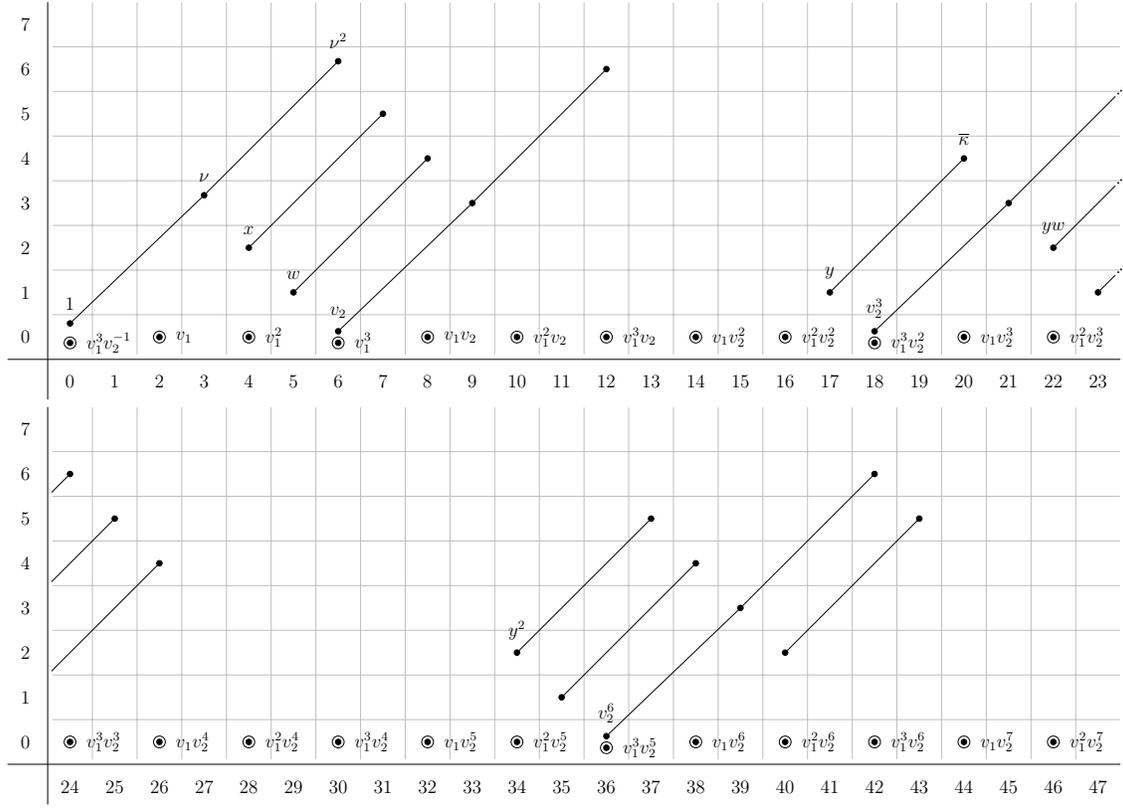


图 14. HFPSS 的 $E_8 = E_\infty$ 页为 $E^{hC_6} \wedge Y$. 符号 \bullet 表示 \mathbb{F}_4 , 符号 \odot 表示 $\mathbb{F}_4[[u_1^3]]$. 这些线表示乘以 ν . 同伦群是 48 周期性的, 其周期性生成元为 ν_2^8 .

6.3. d_7 -微分. 回忆一下, 余纤维序列

$$\Sigma E^{hC_6} \wedge V(0) \xrightarrow{\eta} E^{hC_6} \wedge V(0) \rightarrow E^{hC_6} \wedge Y$$

诱导了一个同伦群中的长正合序列

$$(14) \quad \cdots \rightarrow \pi_{k-1}(E^{hC_6} \wedge V(0)) \xrightarrow{\eta} \pi_k(E^{hC_6} \wedge V(0)) \rightarrow \pi_k(E^{hC_6} \wedge Y) \rightarrow \cdots$$

从这里, 我们可以获得关于 $\pi_*(E^{hC_6} \wedge V(0))$ 中某些群的信息, 这将帮助我们计算 d_7 微分.

引理 6.4. HFPSS 中针对 $E^{hC_6} \wedge Y$ 的 d_7 微分由

$$\begin{aligned} d_7(\alpha^2 u^{-4}) &= \alpha^9 & d_7(\alpha u^{-5}) &= \alpha^8 u^{-1} & d_7(u^{-6}) &= \alpha^7 u^{-2} & d_7(\alpha^2 u^{-7}) &= \alpha^9 u^{-3} \\ d_7(u^{-12}) &= \alpha^7 u^{-8} & d_7(\alpha^2 u^{-13}) &= \alpha^9 u^{-9} & d_7(\alpha u^{-14}) &= \alpha^8 u^{-10} & d_7(u^{-15}) &= \alpha^7 u^{-11} \\ d_7(\alpha u^{-20}) &= \alpha^8 u^{-16} & d_7(u^{-21}) &= \alpha^7 u^{-17} & d_7(\alpha^2 u^{-22}) &= \alpha^9 u^{-18} & d_7(\alpha u^{-23}) &= \alpha^8 u^{-19} \end{aligned}$$

以及对 $\nu = \alpha^3$ 和 $u^{\pm 24}$ 的线性度产生.

证明. 左侧两列的微分来自于自然性以及 $E^{hC_6} \wedge V(0)$ 的 HFPSS 中的微分。

推导其他微分的最简单方法是使用 (14) 计算一些同伦群 $\pi_i E^{hC_6} \wedge Y$, 并分析同伦不动点谱序列的 E_7 页面, 以确定哪些微分需要是非平凡的以确保那些同伦群值。首先, 注意到 $\pi_{15}(E^{hC_6} \wedge Y) = 0$ 。在同伦不动点谱序列中实现这一点的唯一方法是存在 $d_7(u^{-6}\alpha^3) = \alpha^{10}u^{-2}$ 和 $d_7(\alpha^2u^{-7}) = \alpha^9u^{-3}$ 。前者微分和 α^3 -线性则暗示 $d_7(u^{-6}) = \alpha^7u^{-2}$ 。

接下来, $\pi_{29}(E^{hC_6} \wedge Y) = 0$ 表明微分 $d_7(\alpha u^{-14}) = \alpha^8u^{-10}$ 和 $d_7(u^{-15}) = \alpha^7u^{-11}$ 。

最后, $\pi_{45}(E^{hC_6} \wedge Y) = \pi_{47}(E^{hC_6} \wedge Y) = 0$ 表明微分 $d_7(\alpha^2u^{-22}) = \alpha^9u^{-18}$ 和 $d_7(\alpha u^{-23}) = \alpha^8u^{-19}$ 。□

E_7 页面的图表可以在 Figure 13 中找到。由于稀疏性, 不存在 d_r 为 $r > 7$, 所以我们有 $E_8 = E_\infty$ 。我们仍然需要解决扩展问题。根据 [BBPX22] 的引理 2.19, 任何可被二整除的元素都在 η 的像中, 因此 E_∞ 页面上的每个群扩张都是分裂的。

REFERENCES

- [BBG⁺24] Agnès Beaudry, Irina Bobkova, Paul G. Goerss, Hans Werner Henn, Viet Cuong Pham, and Vesna Stojanoska. Cohomology of the Morava stabilizer group through the duality resolution at $n = p = 2$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 377(3):1761–1805, March 2024. Publisher Copyright: © 2024 by the authors.
- [BBPX22] Agnès Beaudry, Irina Bobkova, Viet-Cuong Pham, and Zhouli Xu. The topological modular forms of $\mathbb{R}P^2$ and $\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$. *Journal of Topology*, 15(4):1864 – 1926, September 2022.
- [Beh06] Mark Behrens. A modular description of the $K(2)$ -local sphere at the prime 3. *Topology*, 45(2):343–402, 2006.
- [Beh12] M. Behrens. The Goodwillie tower and the EHP sequence. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 218(1026):xii+90, 2012.
- [BG18] Irina Bobkova and Paul G. Goerss. Topological resolutions in $K(2)$ -local homotopy theory at the prime 2. *Journal of Topology*, 11(4):918 – 957, August 2018.
- [DH04] Ethan S. Devinatz and Michael J. Hopkins. Homotopy fixed point spectra for closed subgroups of the Morava stabilizer groups. *Topology*, 43(1):1–47, 2004.
- [GHMR05] P. G. Goerss, H.-W. Henn, M. Mahowald, and C. Rezk. A resolution of the $K(2)$ -local sphere at the prime 3. *Ann. of Math. (2)*, 162(2):777–822, 2005.
- [Hen07] H.-W. Henn. On finite resolutions of $K(n)$ -local spheres. In *Elliptic cohomology*, volume 342 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 122–169. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [Hen18] H.-W. Henn. The Centralizer resolution of the $K(2)$ -local sphere at the prime 2. Preprint. Available from hal.archives-ouvertes, hal-01697478, January 2018.
- [HS14] Drew Heard and Vesna Stojanoska. K -theory, reality, and duality. *J. K-Theory*, 14(3):526–555, 2014.
- [HS20] Jeremy Hahn and XiaoLin Danny Shi. Real orientations of Lubin – Tate Spectra. *Inventiones mathematicae*, 221(3):731 – 776, Mar 2020.
- [MR09] Mark E. Mahowald and Charles Rezk. Topological modular forms of level 3. *Pure Appl. Math. Q.*, 5(2, Special Issue: In honor of Friedrich Hirzebruch. Part 1):853–872, 2009.
- [Rav78] Douglas C. Ravenel. A novice’s guide to the Adams-Novikov spectral sequence. In *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II*, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 404–475. Springer, Berlin, 1978.

- [Rav86] D. C. Ravenel. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres*, volume 121 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.
- [Rav92] Douglas C. Ravenel. *Nilpotence and Periodicity in Stable Homotopy Theory. (AM-128)*. Princeton University Press, 1992.