临界指数在 Nishimori 点处

盖苏尔多 · 德尔菲诺

SISSA – 经波诺梅亚 265 号，34136 特里埃斯特，意大利
意大利里雅斯特 34100，里雅斯特 INFN 区

摘要

随机键伊辛模型的内田点是具有强无序的重正化群固定点的原型。我们表明，可以从内田线的性质出发，在二维和三维空间中识别出该点的确切相关长度和交叉临界指数。这些是受挫随机磁体的第一个确切指数，这一情况也应与这样一个事实进行对比：即在三维中没有无序的伊辛模型的确切指数未知。我们的考虑扩展到更高维度和其他非伊辛模型。

具有淬火无序的系统的问题是统计物理学中一个众所周知的难题 [1]。它导致了一种临界行为模式，其中伊辛模型随机分布的铁磁和反铁磁键 [2] 提供了一个基本说明。在三维空间中，向纯铁磁体添加弱无序 [3] 可以导致一个新的重整化群固定点，该点可以进行微扰研究，并且尚未对特定类型的无序敏感（随机位点稀释的铁磁体属于同一普适类）[4]。然而，随着反铁磁键的比例增加，挫折开始变得重要并最终导致自旋玻璃相和强无序固定点的存在。在这个相图区域内的临界性质传统上无法用解析方法访问，并且一直是广泛数值工作的主题 [5, 6]。然而最近，已经表明如何在二维空间中利用散射框架内的共形不变性来精确地获取任意无序强度的随机固定点，并特别揭示了随机临界性和普适性的某些奇特特征 [7, 8]。

Nishimori 点 [1, 9, 10, 11] 是在增加有序相边界上的挫折时遇到的第一个强无序不动点，并且位于相图中的特定线上，在这条线上的一些性质是完全已知的 [1, 9]。这些性质的不寻常特性使它们对于 Nishimori 点处临界行为的影响解释变得复杂。在这篇论文中，我们展示了如何在进一步了解这些性质后，能够准确识别二维和三维空间中的关联长度和交叉临界指数。现在可用于这些指数的相当精确的数值估计与确切值非常一致。我们的考虑扩展到了更高维度以及其他非 Ising 模型。后者尤其为已经由二维的确切散射理论单独指出的随机性和内部对称性之间的相互作用提供了新的见解。

随机键伊辛模型 [2] 对应于哈密顿量

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j \,, \tag{1}$$

其中 $\sigma_i = \pm 1$ 是规则晶格上位置 i 的自旋变量，$\sum_{\langle i,j \rangle}$ 表示对最近邻的求和，而通过从概率分布 $P(J_{ij})$ 中抽取的随机耦合 J_{ij} 引入了无序。一个基本的选择是双峰分布

$$P(J_{ij}) = p\,\delta(J_{ij}-1) + (1-p)\,\delta(J_{ij}+1)\,, \tag{2}$$

其中 $1-p$ 是反铁磁键的分数。数值研究 [5, 6] 得出的相图如图 1所示。纯铁磁体（$p=1$）的有序相在无序强度 $1-p$ 增加时仍然存在，直到转变温度消失。在这个铁磁相边界上存在一个多临界点，并且在三维情况下，另一个相边界从多临界点出发，将顺磁相与低温自旋玻璃相分开。在二维情况下，未观察到 $T>0$ 的自旋玻璃相。在二分格子上，相图在 $p \to 1-p$ 下是对称的。

对于一类允许规范对称性的概率分布 $P(J_{ij})$，Nishimori 表明可以沿 p–T 平面上的一条线获得一些精确结果 [1, 9]，这条线被称为 Nishimori 线。此线从低温下的铁磁相穿过平面到达高温下的顺磁相，对于分布 (2) 读作

$$\tanh(1/T) = 2p-1\,. \tag{3}$$

铁磁序参量 M 与自旋玻璃序参量 Q 的一致可以在内 Simon 线 [1, 9] 上推导出，这意味着后者无法进入自旋玻璃相。此外，有论点 [10, 11]– 并且得到了数值研究的支持 – 表明在任何维

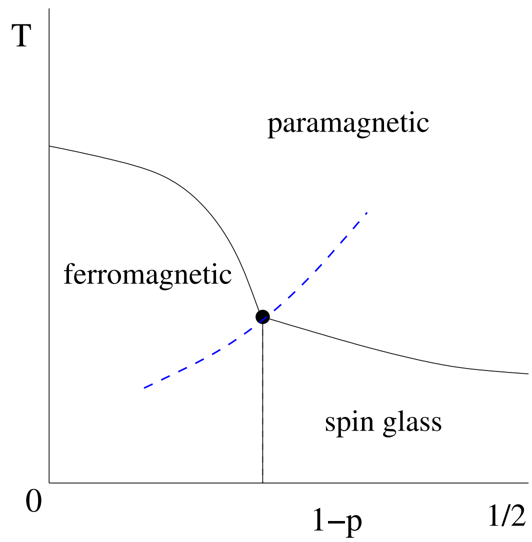

图 1: $\pm J$ 随机键伊辛模型的相图。Nishimori 线（虚线）在 Nishimori 多重临界点（点）处穿过铁磁相边界。在二维中，对于 $T > 0$ 未观察到自旋玻璃相。

度下，Nishimori 线都保持不变，该线与铁磁相边界交叉的点与该边界的多重临界点重合。多重临界点也被称为 Nishimori 点。

淬火无序意味着对随机变量 J_{ij} 的平均值是在自由能 $F = -\ln Z$ 上取的，其中

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-H/T} \tag{4}$$

是系统具有指定随机变量值的配分函数。理论上，使用恒等式

$$\ln Z = \lim_{n\to 0} \frac{Z^n - 1}{n}, \tag{5}$$

使得对无序的平均效果相当于耦合具有配分函数 Z 的系统 $n \to 0$ 个复本。在接近二级相变点的标度极限下，耦合复本由具有简化哈密顿量 $\mathcal{H}_n$ 的欧几里得场论来描述。平均值 $\langle \cdots \rangle$，以权重 $e^{-\mathcal{H}_n}$ 对 $n \to 0$ 进行计算，实现了对原始系统 (1) 自旋配置和无序的双重平均。在以下内容中将理解极限 $n \to 0$。

围绕 d 维空间中的多重临界 Nishimori 点，标度化简哈密顿量可以写为

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^{\mathrm{FP}} + g_1 \int d^d x\, \varepsilon_1(x) + g_2 \int d^d x\, \varepsilon_2(x)\,, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{H}_n^{\mathrm{FP}}$ 是与多重临界点相关的重正化群不动点的简化哈密顿量，g_i 们是测量多重临界点在 p–T 平面内偏差的耦合常数，而 ε_i 们是在系统自旋反转对称性下不变的操作符；这些操作符从重正化群意义上来说是相关的，即具有标度维度 $X_i < d$；我们的约定是

$$X_1 < X_2\,. \tag{7}$$

由于 $\mathcal{H}_n$ 是无量纲的，耦合常数按如下方式缩放：

$$g_i \sim \xi^{-y_i}\,, \tag{8}$$

其中 ξ 是相关长度且

$$y_i = d - X_i\,. \tag{9}$$

理论 (6) 描述了从多重临界点流出并在 p–T 平面内传播的重正化群轨迹。每个这样的轨迹由无量纲参数的值

$$\eta = g_1\,|g_2|^{-\phi}\,, \tag{10}$$

确定，其中

$$\phi = \frac{y_1}{y_2} \tag{11}$$

是多重临界点的交叉指数。Nishimori 线对应于两条轨迹——一条在顺磁相中，另一条在铁磁相中——其值为 η，我们将这些值表示为 $\pm\eta_N$。

当沿着轨迹接近多重临界点时，相关长度发散为

$$\xi \simeq a_i(\eta)\,|g_i|^{-\nu_i}\,, \tag{12}$$

其中

$$\nu_i = \frac{1}{y_i} \tag{13}$$

是多重临界点的相关长度指数，$a_i(\eta)$ 是临界振幅。

单位体积内的内能的奇点部分由

$$\frac{E_{\rm sing}}{V} = \frac{T}{V}\,\langle\mathcal{H}_n\rangle = b(\eta)\,\xi^{-d} \simeq c_i(\eta)\,|g_i|^{d\nu_i}\,, \tag{14}$$

给出，其中我们称 $c_i(\eta)$ 为从使用 (12) 得出的临界振幅。另一方面，在 Nishimori 线上的内能——让我们称之为 E_N——可以在任何晶格 [1, 9] 上精确确定。对于双峰无序分布（2）而言，有如下表达式：

$$E_N = N_B(1-2p)\,, \tag{15}$$

其中总键数 N_B 对应于体积 V 乘以一个晶格依赖因子。这一结果展示了一个特性，该特性也适用于允许规范对称性的其他无序分布：尽管这条线对于某些晶格依赖值的 p 给出了多重临界点，在 Nishimori 线上内部能量仍然是一个正则函数。乍一看，这种奇特的性质可以归因于奇异部分（14）在 Nishimori 线上消失的事实，即临界振幅 $c_i(\pm\eta_N)$ 消失。然而，临界振幅是非普适的 (即格依赖的) 量，而 E_N 在任何格上都是正则的。通过 $c_i(\pm\eta_N)$ 的消失来解释这种正则性相当于说这些振幅在任何格上的取值相同 (零)，从而与它们的格依赖性相矛盾。剩下的可能性是 (14)，通常这是内部能量的奇异部分，在这种情况下恰好是正则的。这需要

$$d\nu_i = k_i(d)\,, \tag{16}$$

或等价地

$$X_i = \frac{k_i(d) - 1}{k_i(d)}\, d\,, \tag{17}$$

其中 $k_i(d)$ 是正整数。临界指数 ν_i 的普适性与 E_N 规则性的格独立性相匹配。

某些整数 k_i 的值可以通过利用已知的特性的事实来排除，即在 Nishimori 线 [1, 9] 上比热是有限的，因此在多重临界点也是如此。当沿轨迹 $g_2 = 0$ 接近这一点时，比热的奇异（在一般情况下）部分表现为

$$C_{\text{sing}} \sim |g_1|^{-\alpha_1}\,, \tag{18}$$

其临界指数为

$$\alpha_1 = (d - 2X_1)\nu_1 = 2 - k_1(d)\,, \tag{19}$$

并且多重临界点处无发散意味着 $\alpha_1 < 0$；情况 $\alpha = 0$ 被排除，因为它会导致对数发散 [1]，正如纯伊辛模型在 $d = 2$ [12] 中的情况。结合 (7)，负的 α_1 的要求意味着

$$k_2(d) > k_1(d) \geq 3\,. \tag{20}$$

虽然（16）不能唯一确定指数 ν_i，但它只允许它们取一组离散的值。与这些指数的数值估计值（表 1）进行比较选择整数

$$k_1(2) = 3\,, \qquad k_2(2) = 8\,, \tag{21}$$

$$k_1(3) = 3\,, \qquad k_2(3) = 5\,, \tag{22}$$

$$k_1(4) = 3\,, \tag{23}$$

确实满足（20）。

值得注意的是，我们从已知的 Nishimori 线的结果出发，推导出了临界指数 ν_i 的条件 (16) 和 (20)，这些结果可以定义为允许规范对称性的特定无序分布。另一方面，临界指数的普适性意味着 (16) 和 (20) 更一般地适用于导致多重临界点的无序分布，即使它们不允许规范对称性（例如，对于双模分布 (2) 的变形，在这种情况下 J_{ij} 的两个值在模数上不相等）。我们将在更一般的情况下也将该多重临界点称为“Nishimori 点”。

上述结果导致了一些额外的考虑。首先，$k_1(d) = 3$ 对于 $d = 2, 3, 4$ 的事实表明猜想

$$\nu_1 = \frac{3}{d} \tag{24}$$

直到上临界维度 d_c。由于对于 $d \geq d_c$，指数 ν_1 需要取其平均场值 $1/2$，(24) 得到 $d_c = 6$，这确实是源自 Landau-Ginzburg 哈密顿量 [26, 27] 中存在三次项的已知值。在 $6 - \varepsilon$ 维度（24）

[1]由于比热与自由能关于温度的二阶导数成正比，对于一个一般的临界点我们有 $C_{\text{sing}} \sim \int d^d x\, \langle \varepsilon(x)\varepsilon(0)\rangle_{\text{conn}}$，其中 ε 是能量密度场。关联函数中的短距离行为 $|x|^{-2X_\varepsilon}$ 在积分中给出 $C_{\text{sing}} \sim \ln(\xi/r_0)$ 当 $X_\varepsilon = d/2$（即 $\alpha = 0$）时，其中 r_0 是一个短距离截止。C_{sing} 然后在临界极限 $\xi \to \infty$ 下以对数方式发散。

Date	$y_1(2)$	$y_2(2)$	$y_1(3)$	$y_2(3)$	$y_1(4)$
1991 [13]			1.17(11)	0.63(11)	
1996 [14]	0.75(7)				1.25(15)
1999 [15]		≈ 0.25			
2001 [16]	0.75(2)				
2002 [17]	0.67(3)	0.25(3)			
2006 [18]	0.67(1)				
2006 [19]	0.67(1)	~ 0.3			
2007 [20]			1.02(5)	0.61(2)	
2008 [21]	0.655(15)	0.250(2)			
2009 [22]	0.66(1)	0.250(2)			
2009 [23]	0.65(2)				
2014 [24]	0.642(22)				
2024 [25]	0.67(1)				
present work	2/3	1/4	1	3/5	4/3

表 1: 相关长度指数在 $y_i(d)$ 处的逆数值估计，位于 Nishimori 点的 d 维随机键伊辛模型中，最后一行给出了它们的确切值。

得到 $\nu_1 \simeq (1+\varepsilon/6)/2$，这与 [27] 的 ε 展开结果 $(1+5\varepsilon/6)/2$ 不同（另见 [11]）。ε 的多临界点展开已知存在问题，因为对于 $O(N)$ 对称性，在伊辛值 $N=1$ 以上的临界指数是复数的，尽管在平均场区域内 $d>6$，过渡仍然是连续的且具有实指数 [5, 27]。

在 [28] 中表明，一个无序的 XY 模型（具有 $O(2)$ 对称性）可以被定义为在一个表现出与伊辛模型相同性质的内藤线上。特别是，在任何晶格 [28] 上的常规内部能量和非发散的比热容意味着我们的方程 (16) 和 (20) 在 XY 模型的多重临界点上仍然成立。数值估计值 $y_1=0.93(3)$ 和 $y_2=0.56(3)$ 在 [29] 中得出，对于 $d=3$，确定整数 (22) 与伊辛情形相同。XY 模型中 [29] 的估计精度较低，相对于 Ising 模型中的 [20]，这主要归因于在蒙特卡罗模拟中使用的较小系统规模；无论如何，在交叉指数的估计 [29] 中获得的 $\phi=1.7(1)$ 在误差范围内具有精确值 5/3。

伊辛模型和 XY 模型共享 $k_1(3)$ 和 $k_2(3)$ 的值意味着，对于具有不同对称性的两种模型，尺度维度 X_1 和 X_2 取相同的值，在这种意义上它们是*超通用的*。这在人们回忆起尺度不变散射 [8, 30] 显示二维 N 态 Potts 模型 [7, 31] 和 $O(N)$ 模型 [32, 33] 的随机不动点具有超普适性——即，不依赖于对称参数 N——散射区时就不那么令人惊讶了，这一特性在没有无序的情况下是没有对应的。在 [7] 中观察到，这可以解释自 [34] 以来在二维 N 态 Potts 模型中最弱无序不动点的数值研究中所观察到的相关长度临界指数 ν 缺乏显著的 N 依赖性。更一般地说，

在 [8] 中认为，散射结果指向一些临界指数在二维中，以及可能在更高维度中的随机不动点作为较为常见的超普适特征。至少对于多重临界尼什莫里点，条件（17）和（20）阐明了这一现象可能发生的机制。

下限 $d\nu \geq 2$ 在一大类无序系统临界点的关联长度指数中被严格证明于 [35]。条件 (16) 和 (20) 表明在 Nishimori 点上更强的界限 $d\nu_i \geq 3$ 以离散形式成立。此外，Ising 和 XY 情形表明后者界限趋于被 ν_1 饱和。

在二维情况下，经过证明可以使用共形不变性来访问随机固定点后（[7]），人们期待能够获得淬火无序的精确临界指数。看到我们当前的结果如何有助于识别随机临界性的共形场论（$d = 2$）是未来研究的一个有趣目标。在更高维度下（低于 d_c），拥有精确指数更为令人惊讶，但我们已经看到了通过重整化群和普适性来考察 Nishimori 线的 d-独立精确性质如何使之成为可能。

总之，我们展示了 Nishimori 线的性质如何暗示在受挫随机磁体的多临界 Nishimori 点处两个相关长度临界指数的分离条件，以及该条件如何允许精确识别二维和三维随机键 Ising 模型的两个指数。现有的数值估计与精确值高度一致。在任何维度、任何内部对称性下，多临界点的分离条件都成立，并且由于普遍性，也适用于不允許定义 Nishimori 线的无序分布。我们在 $d = 3$ 中发现的无序 Ising 和 XY 模型在 Nishimori 点处共享相同的相关长度指数，这为最近在 $d = 2$ 中揭示的随机临界性的超普遍性性质提供了新的见解。对具有其他内部对称性的系统的数值研究肯定有助于阐明这种非平凡的涌现现象。

参考文献

[1] H. Nishimori, Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction, Oxford University Press, 2001.

[2] S.F. Edwards and P.W. Anderson, J. Phys. F: Met. Phys. 5 (1975) 965.

[3] A.B. Harris, J. Phys. C 7 (1974) 1671.

[4] J. Cardy, Scaling and renormalization in statistical physics, Cambridge University Press, 1996.

[5] K. Binder and A.P. Young, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 801.

[6] N. Kawashima and H. Rieger, in Frustrated Spin Systems, edited by H.T. Diep, World Scientific, Singapore, 2005, Chap. 9, p. 491.

[7] G. Delfino, Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 250601.

[8] G. Delfino, Eur. Phys. J. B 94 (2021) 65.

[9] H. Nishimori, Prog. Theor. Phys. 66 (1981) 1169.

[10] P. Le Doussal and A.B. Harris, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 625.

[11] P. Le Doussal and A.B. Harris, Phys. Rev. B 40 (1989) 9249.

[12] L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117.

[13] R.R.P. Singh, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 899.

[14] R.R.P. Singh and J. Adler, Phys. Rev. B 54 (1996) 364.

[15] F.D.A.A. Reis, S.L.A. de Queiroz and R.R. dos Santos, Phys. Rev. B 60 (1999) 6740.

[16] A. Honecker, M. Picco and P. Pujol, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 047201.

[17] F. Merz and J.T. Chalker, Phys. Rev. B 65 (2002) 054425.

[18] S.L.A. de Queiroz, Phys. Rev. B 73 (2006) 064410.

[19] M. Picco, A. Honecker and P. Pujol, J. Stat. Mech. (2006) P09006.

[20] M. Hasenbusch, F. Parisen Toldin, A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. B 76 (2007) 184202.

[21] M. Hasenbusch, F. Parisen Toldin, A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. E 77 (2008) 051115.

[22] F. Parisen Toldin, A. Pelissetto and E. Vicari, J. Stat. Phys. 135 (2009) 1039.

[23] S. L. A. De Queiroz, Phys. Rev. B 79 (2009) 174408.

[24] C. Wang, S.-M. Qin and H.-J. Zhou, Phys. Rev. B 90 (2014) 174201.

[25] T. Chen, E. Guo, W. Zhang, P. Zhang and Y. Deng, Tensor network Monte Carlo simulations for the two-dimensional random-bond Ising model, arXiv:2409.06538.

[26] A.B. Harris, T.C. Lubensky and J.H. Chen, Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 415.

[27] J.H. Chen and T.C. Lubensky, Phys. Rev. B 16 (1977) 2106.

[28] Y. Ozeki and H. Nishimori, J. Phys. A: Math. Gen. 26 (1993) 3399.

[29] V. Alba and E. Vicari, Phys. Rev. B 83 (2011) 094203.

[30] G. Delfino, Annals of Physics 333 (2013) 1.

[31] G. Delfino and E. Tartaglia, J. Stat. Mech. (2017) 123303.

[32] G. Delfino and N. Lamsen, JHEP 04 (2018) 077.

[33] G. Delfino and N. Lamsen, J. Stat. Mech. (2019) 024001.

[34] S. Chen, A.M. Ferrenberg and D.P. Landau, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1213.

[35] J.T. Chayes, L. Chayes, D.S. Fisher and T. Spencer, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2999.