

从黑洞内部到通过算子秩的量子复杂度

Alexey Milekhin

Institute for Quantum Information and Matter, California Institute of Technology,
Pasadena, CA 91125, USA

摘要

人们猜测黑洞内部的大小捕获了边界演化下的量子门复杂性。在这篇简短的笔记中，我们的目标是通过将某个穿越内部的二维码表面的面积直接与量子电路的深度关联起来，提供进一步的微观证据。我们的论证基于在早期使用算子施密特秩的概念严格建立这种关系，然后将体内的表面映射到电路表示中的切割来将其外推到后期。

1 动机

在量子动力学领域，一个非常有趣的量是电路复杂性：构建给定么正所需的最少基本门的数量——我们参考 [1] 进行最近的回顾。一段时间前有人提出 [2–5]，黑洞内部的“大小”等于准备该黑洞状态的电路的复杂性。这里我们在引号中使用了“大小”，因为对于这个几何量应该是什么有很多不同的提议：体积 [2, 3, 6, 7]、Wheeler–DeWitt 补丁内的作用量 [4, 5, 8]，更一般的泛函 [9, 10]。这些提议通过了许多有趣的间接的检查：初始线性增长、回弹效应 [11] 甚至在指数晚时间的饱和 [12]。然而，电路复杂度特别难以计算^a。此外，它取决于基元门的集合，并且可能存在多个局部最小的电路。在 $1+1$ 维本体和 Sachdev–Ye–Kitaev (SYK) 模型 [14–17] 中，通过直接映射 [18–20] 弦表示 [21, 22] 到 Krylov 复杂度 [23–30] 可以取得更多进展。因此，不幸的是，这个提议的大多数已知验证都是间接的。令人着迷的是，为复杂性找到一个代理，它是可计算的，并且有可能建立一个通用的直接链接，与内部的一些混凝土几何

^a我们参考了 [13] 在这个方向上的最新进展。

量相关：

A circuit complexity proxy $\xleftrightarrow{\text{direct}}$ A concrete geometric quantity.

本简短笔记的目的是展示这种联系。也就是说，我们将从基本原则出发论证通过黑洞内部的某个极值二维表面的面积，即 Hartman–Maldacena (HM) 表面 [31]，下界于边界演化算子的电路深度：

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}_{HM}}{4G_N} \leq C \times (\text{circuit depth})}, \quad (1)$$

其中 $C = \mathcal{A}_\partial (\log D) r^2 / 4$ 是一个与时间无关的常数： D 是局部希尔伯特空间维度， r 与底层量子电路的连通性相关， $\mathcal{A}_\partial$ 是 HM 表面锚定的区域的边界面积（事实上，在 $\mathcal{A}_{HM}$ 中有相同的因子）。对于早期时刻，我们将能够严格建立不等式 (1)。对于晚期时刻，这是一个猜想，我们通过将一个引力计算明确映射到量子电路图来支持它。电路深度是衡量底层电路复杂程度的指标：需要多少层门才能准备它。因此，它类似于电路复杂度。在平移不变的情况下，它们成正比：总门数等于深度乘以系统的大小。

重要的是，在公式 (1) 中，电路深度是准备给定么正的任何电路深度。这种关系将使我们能够澄清引力计算的结果。我们将论证它确实探测到了全局最小值，并且，令人惊讶的是，基元门集可以任意选择。

本文的主要观点是将热场双态的两个侧面不视为两个独立系统，而是同一系统的过去和未来。那么在这种状态下的纠缠熵可以被视为“时间上的纠缠”。我们将通过引入一个辅助量——算子施密特秩 χ 得到不等式 (1)：

$$\text{Early times: } \frac{\mathcal{A}_{HM}}{4G_N} \leq \log(\chi) \text{ and } \log(\chi) \leq C \times (\text{circuit depth}). \quad (2)$$

(rigorous)

算子秩 χ 是给定么正性的特征，它并不依赖于门集的选择。在长时间（超过总系统大小）后， $\log(\chi)$ 饱和到一个常数值。然而，HM 表面继续存在并以相同的速度增长。预计电路深度也是如此。此外，我们将能够直接将 Ryu–Takayanagi (RT) [32, 33] 表面翻译成电路表示中的最小切割，在此 HM 表面映射到时间切口探测深度。这就是为什么我们猜想不等式 (1)。

两个状态和三个量的行为如图 1 所示。在无限系统的情况下，晚期时间状态永远不会实现。为了使算子秩与复杂度之间的联系更强，我们在附录 A 中将论证 $\log \chi$ 满足复杂度的性质，例如次可加性和回溯效应。

通常获得复杂性的下界（在这个词的广义上）是困难的，这就是为什么不等式 (1) 自身就很有趣。其他关于复杂性下界的途径包括几何方法 [34] 和纠缠能力 [35]。

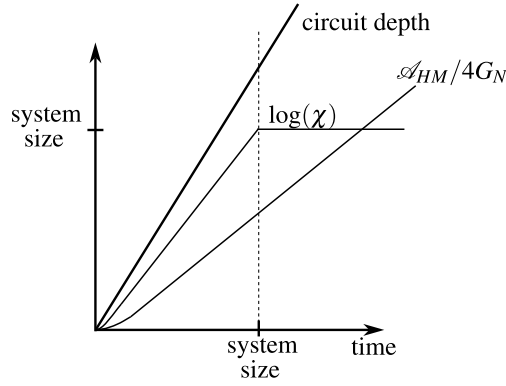


图 1: 各种量随时间变化的行为草图。我们期望这三个在早期都具有相同的线性斜率, 但我们无法严格证明这一点。

2 推导

给定两个副本 (左 L 和右 R) 的系统, 我们可以定义时间演化 TFD 态 $|\text{TFD}(t)\rangle$ 为:

$$|\text{TFD}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n e^{(-\beta/2 - it)E_n} |n\rangle_L |n\rangle_R, \quad (3)$$

其中 $|n\rangle$ 是能量本征态, $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$ 是配分函数。我们可以使用以下张量图来表示该状态 - 图 2(a), 其中 $U = e^{-(\beta/2 + it)H}$ 。对于全息理论, 据推测该状态与反德西特 (AdS)[36] 空间中的双侧黑洞几何体对偶 - 图 3(a)。Hartman 和 Maldacena[31] 研究了一个子区域 $A = A_L \cup A_R$ 的纠缠熵, 该子区域由两个相同的子区域组成: 左侧的 A_L 和右侧的 A_R 。为了具体起见, 我们将考虑具有周期性边界条件的有限系统, 使得该系统具有平移不变性。子系统 $A_{L/R}$ 的大小约为整个系统大小的一半。对于全息理论, 在 G_N 的主要阶次中, 纠缠熵 $S_{vN}(A_L \cup A_R)$ 等于 [32, 33] 极值曲面的面积 $\mathcal{A}$, 该极值曲面与 $A_L \cup A_R$ 同调:

$$S_{vN}(A_L \cup A_R) = \frac{\mathcal{A}}{4G_N} + \mathcal{O}(G_N^0). \quad (4)$$

如果有多个竞争曲面, 则需要选择最小的那个。我们将 HM 面定义为:

HM 表面: 极值连接的^b 曲面中同调于 $A_L \cup A_R$ 的最小值。

在这个术语中, 早期时间 (小于系统尺寸的时间) 相关的极值曲面是穿过黑洞内部的 HM 面 γ - 图 3。而在晚期时间 (大于系统尺寸的时间), 最小的极值曲面是图 3 上的不连通的 γ' 。

^b在 2+1 维的体空间中, 穿过黑洞内部的相关体表面由两个部分组成。然后我们可以用 “每个部分连接 A_L 到 A_R ” 来替换单词 “connected”。

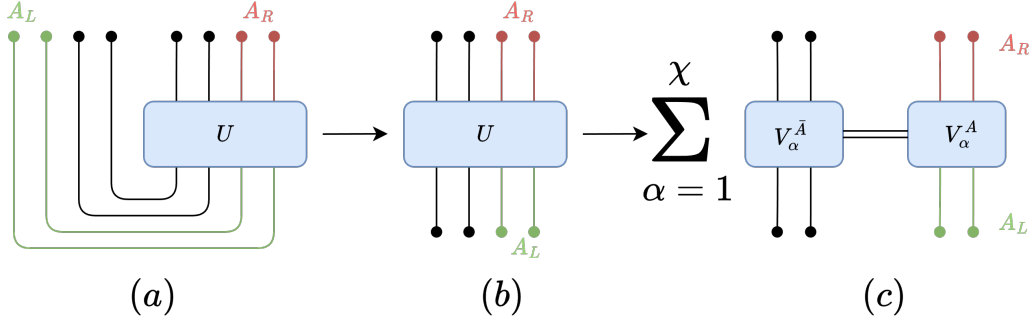


图 2: 从 TFD 态到算子施密特分解的变换序列。(a) 一个常规的 TFD 态。(b) 我们弯曲电路图的腿, 并将左侧 (L) 解释为右侧 (R) 的过去。(c) 我们对么正性进行施密特分解: V_α^A 将过去的子系统 (A_R) 演化到未来的子系统 (A_L)。键索引 α 负责 A 和其余部分之间的信息交换。

然而, 从几何上讲, HM 面继续存在并增长, 它只是不再是全局最小值。它的面积计算什么? 为了回答这个问题, 我们主要的概念步骤是将 L 和 R 解释为一个系统在两个不同时间点的状态, 而不是两个独立的系统。从代数上讲, 我们将图 2(a) 中的张量图的腿“弯曲”以达到图 2(b)。现在很明显, A_L 处于^c中 A_R 的过去。在此解释中, 纠缠熵 A 被定义为“时间中的纠缠”, 如 [41] 所定义的那样, 因为它是在一个区域中进行评估的, 该区域由过去部分 A_L 和未来部分 A_R 组成。直观上, 它对演化算子 (HM 面) 中的连接时类割敏感, 因此它包含了关于电路深度的信息。更具体地说, 我们将引入算子施密特秩的概念。

众所周知, 纠缠熵由密度矩阵秩的对数来界定。为了确定秩 (或近似秩), 我们需要截断算子 U 沿着时间方向 来查看它有多少个非零奇异值 - 图 2(c)。

$$|\text{TFD}(t)\rangle \approx \sum_{\alpha=1}^{\chi} |V_\alpha^{\bar{A}}\rangle |V_\alpha^A\rangle_{A_L \cup A_R}. \quad (5)$$

换句话说, 我们执行奇异值分解。数量 χ 被称为算子施密特秩。从这个表示中可以看出

$$S_{vN}(A_L \cup A_R) \leq \log(\chi). \quad (6)$$

这种关系非常普遍: 不等式的两部分都不依赖于门集或系统是否全息。这是一个重要

^c在凝聚态物理文献中, $S_{vN}(A_L \cup A_R)$ 被称为算子纠缠 [37–40]。我们将 U 作为演化算子 - 图 2(b), 但严格来说, U 不是么正的。在讨论部分, 我们讨论了如何轻松解决这个问题。此外, 在高温下, 它是近似么正的。

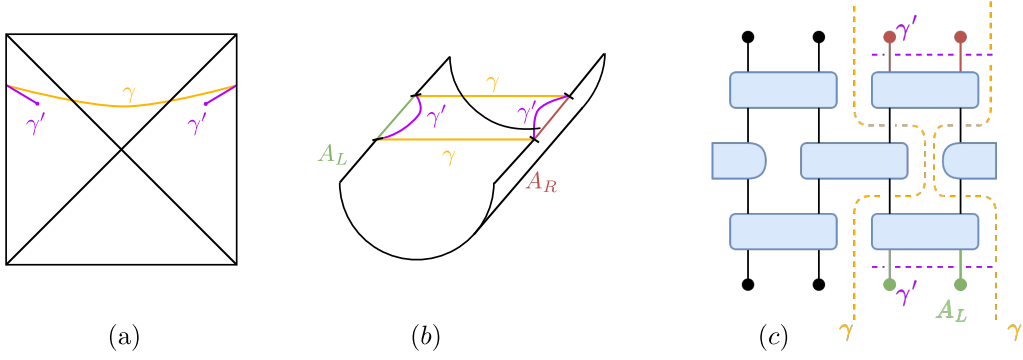


图 3: (a) AdS 黑洞的彭罗斯图。(b) 在 1+2 维体空间 $t = 0$ 情况下的直接时空示意图。半圆表示欧几里得状态制备。(c) 带有 $r = 2$ 的量子砖砌电路表示形式。注意周期性边界条件。在所有图形中, γ' (紫色) 是不相连的鞍点。本文的主要猜想是从 (a) 和 (b) 中的相连 HM 面 γ (黄色) 转化为 (c) 中的类时电路切割。

的观点, 我们稍后会再次提及。

它与电路深度有何关系? 为了强调局部性质, 将算子 U 表示为砖砌电路几何结构是方便的——图 3(c)——我们可以通过提供通过该电路的任何切割来限定秩, 该电路将 $A_L \cup A_R$ 与其他系统分开:

$$\log(\chi) \leq \log D \times (\text{number of cut links}), \quad (7)$$

其中 D 是局部希尔伯特空间维数。可以建立全息中的主导表面与电路图中切割面之间的紧密类比——图 3(c):

- 连通割集 γ 穿过演化算子是 HM 表面穿过黑洞内部的直接类比。这导致了以下界限:

$$\log(\chi) \leq C \times (\text{circuit depth}), \quad C = \mathcal{A}_\partial r^2 \log D / 4, \quad (8)$$

其中 $\mathcal{A}_\partial$ 是边界 A_L 的面积, 而 r 反映了砖石几何结构的连通性: 下一层次中有多少个么正算符与当前层次中的给定一个相连。对于浅电路而言这个割集占主导地位。因此我们有

$$\frac{\mathcal{A}_{HM}}{4G_N} \underset{\text{early time}}{=} S_{vN}(A_L \cup A_R) \leq \log(\chi) \leq C \times (\text{circuit depth}). \quad (9)$$

- 不连通的割集 γ' 。在体中, 它对应于 A_L 和 A_R 的极值曲面的并集, 远离黑洞内部, 导致:

$$\log \chi \leq 2 \log(D) |A_L|. \quad (10)$$

对于深层电路，正是这个割集主导了纠缠熵：

$$\text{Late times: } \frac{\mathcal{A}_{HM}}{4G_N} \neq S_{vN}(A_L \cup A_R) \leq \log(\chi) \leq 2 \log D |A_L| \leq C \times (\text{circuit depth}). \quad (11)$$

然而，HM 表面/电路切割 γ 继续存在并增长。HM 表面的面积随时间线性增长，并且这种增长在系统尺寸呈指数级长的时间之前不会发生变化。原则上，可能会出现额外的岛屿鞍点 [42–45]，但它仍然是一个额外的鞍点，即使如此，HM 表面仍然存在。同样地，在呈指数级长的时间之前，电路深度也不期望表现出任何质的变化。这种预期基于这样一个事实，即对于平移不变系统，电路深度与门的数量（也就是复杂度）成正比。基于这一点，我们推测不等式 (9) 的一部分继续成立，即：

$$\frac{\mathcal{A}_{HM}}{4G_N} \leq C \times (\text{circuit depth}). \quad (12)$$

3 讨论

这篇简短的笔记致力于演化算子 $U = e^{(-it - \beta/2)H}$ 的复杂性度量。我们论证了对于全息系统，HM 面的面积（以 $4G_N$ 为单位）从下方界定了量子电路中的层数 - 公式 (12)。我们的论证基于严格建立以下早期时间的界限：

$$\frac{\mathcal{A}_{HM}}{4G_N} \leq \log \chi \leq C \times (\text{circuit depth}), \quad (13)$$

然后根据最左边的数量 ($\mathcal{A}_{HM}$) 和最右边的 (circuit depth) 以稳定的速度增长的事实，将这些结果外推到后期时间。与 $\log \chi$ 不同。本文中的论证可以改进：我们将全息共形场论视为有限维系统，并且我们只得到了复杂度的一个下界，而不是证明它等同于某个体内的量等于。我们也默认了平移不变性，否则不清楚如何定义电路深度以及 $\mathcal{A}_{HM}$ 取决于子系统的选择：目前我们的公式中确实有 $\mathcal{A}_\partial$ ，但它会与 $\mathcal{A}_{HM}$ 中的相同因子方便地抵消掉，因为 HM 表面在穿越其体区域时保持边界区域的形状不变 [31]。然而，我们的论点提供了微观证据，表明黑洞内部大小捕获了量子电路复杂性。让我们提供一些关于从这种关系中可能得到的教训的结束备注。

从电路深度到复杂度。 与内部极值曲面的面积的关系似乎更倾向于“复杂性=体积”，而不是“复杂性=作用量”。对于平移不变系统，量子门复杂度等于深度乘以系统大小。同样地，如果我们对所有二维码表面求和（积分），我们将得到一个体积的度量（尽管它不一定与传统的体积相吻合），因此我们非常粗略地有：

$$(\text{volume}) \lesssim C \times (\text{gate complexity}). \quad (14)$$

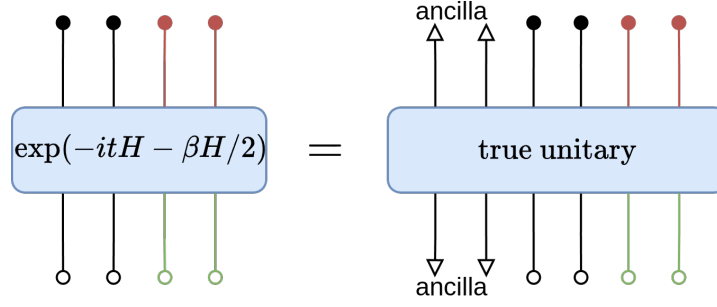


图 4: Sz.-Nagy 扩张的示例。

门集和最小性。 重要的是要强调， $\log \chi$ 是 U 的固有属性，它不依赖于门分解。而 $\log \chi$ 的上限可以从任何电路中获得。因此我们必然得出结论， $\mathcal{A}_{HM}/4G_N$ 从下方界定了任何电路的 $C \times (\text{circuit depth})$ ——我们可以自由选择任意门集、任意连接并全局搜索最小电路表示。

算子施密特秩的性质。 一般来说， $\log \chi$ 大于算子纠缠熵 $S_{vN}(A_L \cup A_R)$ 。然而，对于 Clifford 电路，纠缠谱实际上是平坦的，所以它们相等^d。

电路复杂性度量应满足两个简单属性：次可加性和换向 [11]。在附录 A 中我们论证了算子秩的对数也满足这些属性：

- 次可加性：

$$\log \chi(U_1 U_2) \leq \log \chi(U_1) + \log \chi(U_2). \quad (15)$$

- 换向：对于一个局部酉算子 W 和一个混编酉算子 U ，在足够长的时间内，以下关系成立：

$$\log \chi(U W U^\dagger) \leq 2 \log \chi(U) - 2\delta, \quad \delta < t_* \quad (16)$$

实际的换向效应预测上述关系实际上是等式，但我们将只能证明不等式。

关于非幺正性和紫外截止的评论。 到目前为止，我们只对 $U = e^{(-it - \beta/2)H}$ 使用了“算子”这个词，因为它不是酉的。因此，严格来说，我们不能对 U 使用电路深度这个词。幸运的是，我们可以将 U 表示为一个真正的酉算子，代价是引入辅助系统并将其投影到给定的状态上——图 4。这个陈述反映了这样一个数学事实：非酉矩阵可以

^d我们感谢 Zixia Wei 指出了这一点。

被嵌入到一个酉矩阵中作为一个块——有时被称为 Sz.-Nagy 扩张定理。对于简单的情况，这种嵌入可以显式地找到 [46]。

该投影的目的在于移除 UV 自由度。可以想象在电路中将非么正部分 $e^{-\beta H/2}$ 与么正部分 e^{-iHt} 分离。前者给电路深度带来一个常数开销，而后者随时间 $\sim t/\varepsilon$ 线性增长，其中 ε 是 UV 截止值。直观地讲，以 $\mathcal{A}_{HM}/4G_N$ 表示的电路深度界限变得非常宽松，因为在该区域内， ε 仅作为一个常数移位出现。然而，这个想法是 $e^{-\beta H/2}$ 从系统中去除了 UV-自由度，因此 e^{-iHt} 仅在低能子空间内作用，有效地将截止值降低到 β 。然后面积和深度变得可比较，两者都增长为 t/β 。

致谢

我们感谢 Pawel Caputa, Thomas Hartman, Juan Maldacena, John Preskill, Zixia Wei, Ying Zhao 的评论。

AM 感谢西蒙斯基金会、美国能源部 QuantISED 计划 (DE-SC0018407) 和美国空军科学研究办公室 (FA9550-19-1-0360) 提供的资金支持。量子信息与物质研究所是国家科学基金会物理学前沿中心。AM 还获得了西蒙斯基金会 376205 奖项的支持。

A 算子秩的性质

次可加性： 这反映了一个简单的事实，即酉矩阵 U_1, U_2 可能会相互部分抵消。假设 U_1 和 U_2 的精确算子秩均为 $\chi_{1,2}$ （相对于分解为 A 和 $\bar{A}$ ），则 $U_1 U_2$ 的算子秩小于这些秩的乘积。

在近似设置中，这一陈述不太明显，分析它会很有趣。我们可以定义 χ_ε 为矩阵 U_ε 的算子秩，该矩阵以精度 ε 逼近 U ： $\|U - U_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ 。然后矩阵 $U_{1,\varepsilon} U_{2,\varepsilon}$ 的秩小于 $\chi_{1,\varepsilon} \chi_{2,\varepsilon}$ ，但不幸的是它到 $U_1 U_2$ 的距离仅由 2ε 限制：

$$\begin{aligned} \|U_{1,\varepsilon} U_{2,\varepsilon} - U_1 U_2\| &= \|U_{1,\varepsilon} U_{2,\varepsilon} - U_{1,\varepsilon} U_2 + U_{1,\varepsilon} U_2 - U_1 U_2\| \leq \|U_{1,\varepsilon} U_{2,\varepsilon} - U_{1,\varepsilon} U_2\| + \\ &\quad + \|U_{1,\varepsilon} U_2 - U_1 U_2\| \leq \|U_{1,\varepsilon}\| \|U_{2,\varepsilon} - U_2\| + \|U_{1,\varepsilon} - U_1\| \|U_2\| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

这里 $\|\cdot\|$ 是任意一个酉不变的算子范数：

$$\|UMV\| = \|M\|, \text{ for unitary } U, V, \tag{18}$$

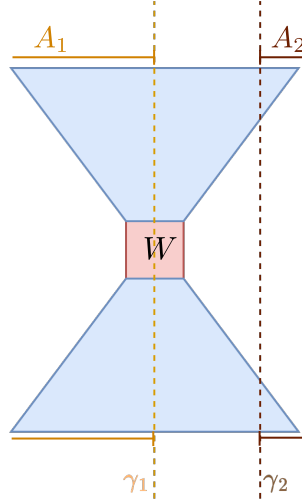


图 5: 开关效果的说明。蓝色表示构成 U 和 $U^\dagger$ 的么正集合。沙漏形状说明了围绕 W 的抵消。

并且是次可加的。例如，任意 Schatten p -范数。不幸的是，对于算子纠缠而言，次可加性（作为给定双分割的么正函数）并不成立，可以很容易构造出数值反例来反驳 $S_{vN}(A|U_1U_2) \leq S_{vN}(A|U_1) + S_{vN}(A|U_2)$ 和 $|S_{vN}(A|U_1) - S_{vN}(A|U_2)| \leq S_{vN}(A|U_1U_2)$ 。

往返行驶： 这种效应反映了这样一个事实： U 和 $U^\dagger$ 只在 W 附近部分抵消彼此。这一点通过图 5 来说明。到目前为止，我们可以忽略 χ 取决于子系统 A 的选择这一事实，因为我们能够专注于平移不变的情况。对应于回旋效应的么正变换明显破坏了这种不变性。例如，对于子系统 A_1 ，我们期望 $\log \chi(UWU^\dagger) \approx 2\log \chi(U)$ （没有回溯），而对于 A_2 ，我们可以使用切割 γ_2 来确定地说 $\log \chi(UWU^\dagger) \leq 2\log \chi(U) - 2\delta$ ，其中 δ 取决于 A_2 的确切位置。然而， δ 不能大于 t_* ，其中时间 t_* 需要用来扰乱操作符 W - 因为超过时间 t_* 后电路不再有消去。

对于形式为 $UWU^\dagger$ 的么正算子，其算符纠缠有时被称为局域算符纠缠 [47, 48]。

References

- [1] Stefano Baiguera et al. “Quantum complexity in gravity, quantum field theory, and quantum information science”. In: (Mar. 2025). arXiv: 2503.10753 [hep-th].

- [2] Leonard Susskind. “Computational Complexity and Black Hole Horizons”. In: Fortsch. Phys. 64 (2016), pp. 24–43. DOI: 10.1002/prop.201500092. arXiv: 1403.5695 [hep-th].
- [3] Leonard Susskind. “Addendum to Computational Complexity and Black Hole Horizons”. In: (2014). arXiv: 1403.5695 [hep-th].
- [4] Adam R. Brown et al. “Complexity Equals Action”. In: (2015). arXiv: 1509.07876 [hep-th].
- [5] Adam Brown et al. “Complexity, Action, and Black Holes”. In: (2015). arXiv: 1512.04993 [hep-th].
- [6] Josiah Couch, Willy Fischler, and Phuc H. Nguyen. “Noether charge, black hole volume, and complexity”. In: JHEP 03 (2017), p. 119. DOI: 10.1007/JHEP03(2017)119. arXiv: 1610.02038 [hep-th].
- [7] Josiah Couch et al. “Holographic Complexity and Volume”. In: JHEP 11 (2018), p. 044. DOI: 10.1007/JHEP11(2018)044. arXiv: 1807.02186 [hep-th].
- [8] Kanato Goto et al. “Holographic Complexity Equals Which Action?” In: JHEP 02 (2019), p. 160. DOI: 10.1007/JHEP02(2019)160. arXiv: 1901.00014 [hep-th].
- [9] Alexandre Belin et al. “Does Complexity Equal Anything?” In: Phys. Rev. Lett. 128.8 (2022), p. 081602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.081602. arXiv: 2111.02429 [hep-th].
- [10] Alexandre Belin et al. “Complexity equals anything II”. In: JHEP 01 (2023), p. 154. DOI: 10.1007/JHEP01(2023)154. arXiv: 2210.09647 [hep-th].
- [11] Douglas Stanford and Leonard Susskind. “Complexity and Shock Wave Geometries”. In: Phys. Rev. D90.12 (2014), p. 126007. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.126007. arXiv: 1406.2678 [hep-th].
- [12] Luca V. Iliesiu, Márk Mezei, and Gábor Sárosi. “The volume of the black hole interior at late times”. In: JHEP 07 (2022), p. 073. DOI: 10.1007/JHEP07(2022)073. arXiv: 2107.06286 [hep-th].
- [13] Jonas Haferkamp et al. “Linear growth of quantum circuit complexity”. In: Nature Phys. 18.5 (2022), pp. 528–532. DOI: 10.1038/s41567-022-01539-6. arXiv: 2106.05305 [quant-ph].

- [14] Subir Sachdev and Jinwu Ye. “Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet”. In: Phys. Rev. Lett. 70 (1993), p. 3339. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.3339. arXiv: cond-mat/9212030 [cond-mat].
- [15] Alexei Kitaev. <http://online.kitp.ucsb.edu/online/joint98/kitaev/>. KITP seminar, Feb. 12, 2015.
- [16] Juan Maldacena and Douglas Stanford. “Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model”. In: Phys. Rev. D 94.10 (2016), p. 106002. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.106002. arXiv: 1604.07818 [hep-th].
- [17] Joseph Polchinski and Vladimir Rosenhaus. “The Spectrum in the Sachdev-Ye-Kitaev Model”. In: JHEP 04 (2016), p. 001. DOI: 10.1007/JHEP04(2016)001. arXiv: 1601.06768 [hep-th].
- [18] E. Rabinovici et al. “A bulk manifestation of Krylov complexity”. In: JHEP 08 (2023), p. 213. DOI: 10.1007/JHEP08(2023)213. arXiv: 2305.04355 [hep-th].
- [19] Takanori Anegawa and Ryota Watanabe. “Krylov complexity of fermion chain in double-scaled SYK and power spectrum perspective”. In: JHEP 11 (2024), p. 026. DOI: 10.1007/JHEP11(2024)026. arXiv: 2407.13293 [hep-th].
- [20] Jiuci Xu. “On Chord Dynamics and Complexity Growth in Double-Scaled SYK”. In: (Nov. 2024). arXiv: 2411.04251 [hep-th].
- [21] Micha Berkooz, Prithvi Narayan, and Joan Simón. “Chord diagrams, exact correlators in spin glasses and black hole bulk reconstruction”. In: Journal of High Energy Physics 2018.8 (2018), p. 192.
- [22] Henry W. Lin. “The bulk Hilbert space of double scaled SYK”. In: JHEP 11 (2022), p. 060. DOI: 10.1007/JHEP11(2022)060. arXiv: 2208.07032 [hep-th].
- [23] Daniel E. Parker et al. “A Universal Operator Growth Hypothesis”. In: Phys. Rev. X 9.4 (2019), p. 041017. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.041017. arXiv: 1812.08657 [cond-mat.stat-mech].
- [24] Anatoly Dymarsky and Michael Smolkin. “Krylov complexity in conformal field theory”. In: Phys. Rev. D 104.8 (2021), p. L081702. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.L081702. arXiv: 2104.09514 [hep-th].

- [25] Pawel Caputa, Javier M. Magan, and Dimitrios Patramanis. “Geometry of Krylov complexity”. In: Phys. Rev. Res. 4.1 (2022), p. 013041. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.4.013041. arXiv: 2109.03824 [hep-th].
- [26] Budhaditya Bhattacharjee, Pratik Nandy, and Tanay Pathak. “Krylov complexity in large q and double-scaled SYK model”. In: JHEP 08 (2023), p. 099. DOI: 10.1007/JHEP08(2023)099. arXiv: 2210.02474 [hep-th].
- [27] Vijay Balasubramanian et al. “Quantum chaos and the complexity of spread of states”. In: Phys. Rev. D 106.4 (2022), p. 046007. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.046007. arXiv: 2202.06957 [hep-th].
- [28] Pawel Caputa et al. “Krylov complexity of modular Hamiltonian evolution”. In: Phys. Rev. D 109.8 (2024), p. 086004. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.086004. arXiv: 2306.14732 [hep-th].
- [29] Chang Liu, Haifeng Tang, and Hui Zhai. “Krylov complexity in open quantum systems”. In: Phys. Rev. Res. 5.3 (2023), p. 033085. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.033085. arXiv: 2207.13603 [cond-mat.str-el].
- [30] Chenwei Lv, Ren Zhang, and Qi Zhou. “Building Krylov complexity from circuit complexity”. In: Phys. Rev. Res. 6.4 (2024), p. L042001. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.L042001. arXiv: 2303.07343 [quant-ph].
- [31] Thomas Hartman and Juan Maldacena. “Time Evolution of Entanglement Entropy from Black Hole Interiors”. In: JHEP 05 (2013), p. 014. DOI: 10.1007/JHEP05(2013)014. arXiv: 1303.1080 [hep-th].
- [32] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT”. In: Phys. Rev. Lett. 96 (2006), p. 181602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.181602. arXiv: hep-th/0603001 [hep-th].
- [33] Veronika E. Hubeny, Mukund Rangamani, and Tadashi Takayanagi. “A Covariant holographic entanglement entropy proposal”. In: JHEP 07 (2007), p. 062. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/07/062. arXiv: 0705.0016 [hep-th].
- [34] Michael A. Nielsen. “A geometric approach to quantum circuit lower bounds”. In: Quant. Inf. Comput. 6.3 (2006), pp. 213–262. DOI: 10.26421/QIC6.3-2. arXiv: quant-ph/0502070.

- [35] J. Eisert. “Entangling Power and Quantum Circuit Complexity”. In: Phys. Rev. Lett. 127.2 (2021), p. 020501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.020501. arXiv: 2104.03332 [quant-ph].
- [36] Juan Martin Maldacena. “Eternal black holes in anti-de Sitter”. In: JHEP 04 (2003), p. 021. DOI: 10.1088/1126-6708/2003/04/021. arXiv: hep-th/0106112 [hep-th].
- [37] Xiaoguang Wang, Barry C. Sanders, and Dominic W. Berry. “Entangling power and operator entanglement in qudit systems”. In: Physical Review A 67.4 (Apr. 2003). ISSN: 1094-1622. DOI: 10.1103/physreva.67.042323. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.67.042323>.
- [38] Tianci Zhou and David J. Luitz. “Operator entanglement entropy of the time evolution operator in chaotic systems”. In: Physical Review B 95.9 (Mar. 2017). ISSN: 2469-9969. DOI: 10.1103/physrevb.95.094206. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.094206>.
- [39] Laimei Nie et al. “Signature of quantum chaos in operator entanglement in 2d CFTs”. In: J. Stat. Mech. 1909.9 (2019), p. 093107. DOI: 10.1088/1742-5468/ab3a29. arXiv: 1812.00013 [hep-th].
- [40] Kanato Goto et al. “Information scrambling versus quantum revival through the lens of operator entanglement”. In: JHEP 06 (2022), p. 100. DOI: 10.1007/JHEP06(2022)100. arXiv: 2112.00802 [hep-th].
- [41] Alexey Milekhin, Zofia Adamska, and John Preskill. “Observable and computable entanglement in time”. In: (Feb. 2025). arXiv: 2502.12240 [quant-ph].
- [42] Geoffrey Penington. “Entanglement Wedge Reconstruction and the Information Paradox”. In: (May 2019). arXiv: 1905.08255 [hep-th].
- [43] Ahmed Almheiri et al. “The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole”. In: JHEP 12 (2019), p. 063. DOI: 10.1007/JHEP12(2019)063. arXiv: 1905.08762 [hep-th].
- [44] Ahmed Almheiri et al. “Replica Wormholes and the Entropy of Hawking Radiation”. In: JHEP 05 (2020), p. 013. DOI: 10.1007/JHEP05(2020)013. arXiv: 1911.12333 [hep-th].

- [45] Geoff Penington et al. “Replica wormholes and the black hole interior”. In: (Nov. 2019). arXiv: 1911.11977 [hep-th].
- [46] Alexey Milekhin and Fedor K. Popov. “Measurement-induced phase transition in teleportation and wormholes”. In: SciPost Phys. 17.1 (2024), p. 020. DOI: 10.21468/SciPostPhys.17.1.020. arXiv: 2210.03083 [hep-th].
- [47] Bruno Bertini, Pavel Kos, and Tomaz Prosen. “Operator Entanglement in Local Quantum Circuits I: Chaotic Dual-Unitary Circuits”. In: SciPost Phys. 8.4 (2020), p. 067. DOI: 10.21468/SciPostPhys.8.4.067. arXiv: 1909.07407 [cond-mat.stat-mech].
- [48] Bruno Bertini, Pavel Kos, and Tomaz Prosen. “Operator entanglement in local quantum circuits II: solitons in chains of qubits”. In: SciPost Phys. 8.4 (2020), p. 068. DOI: 10.21468/SciPostPhys.8.4.068. arXiv: 1909.07410 [cond-mat.stat-mech].