arxiv:2412.19539v2 中译本

关于用偏微分方程系统近似空间卷积的研究

HIROSHI ISHII AND YOSHITARO TANAKA

摘要. 本文考虑使用给定的径向积分核来逼近空间卷积。先前的研究表明，利用偏微分方程（PDEs）系统近似空间卷积可以消除一维空间中由积分公式引起的分析难题。在本文中，我们建立了高维空间中的空间卷积的 PDE 系统近似。我们推导出一个适当的近似函数来表示给定的任意径向积分核，该函数是格林函数的线性组合。为了证明此方法的有效性，我们引入了一个适当的积分变换来展示由格林函数构建的基础的完备性。这一框架使得使用 PDE 解的线性组合来逼近具有任意径向积分核的非局部卷积型算子成为可能。最后，我们给出了数值示例以说明所提出方法的有效性。

1. 介绍

本文中，我们讨论了一个空间卷积的近似问题

$$(K * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(y)f(x-y)dy,$$

其中积分核 $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个径向函数，输入函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数。带有空间卷积的演化方程已在多个领域出现作为数学模型，如材料科学 [4]、神经科学 [2]、细胞生物学 [7, 11, 16, 20] 和生态学 [14, 19]。已经提出了许多分析处理方法来阐明具有空间卷积的演化方程解的数学结构（例如，[3, 5, 6, 8, 9, 10]）。数学分析面临的挑战在于，空间卷积对解的局部性质的理解有限，并且在数值模拟中计算成本高昂。为了克服这些困难，已经提出了一种方法，用于将空间卷积与偏微分方程 [1, 12, 13, 17, 18, 21, 22] 重写。特别是，通常使用由

$$d\Delta k(x) - k(x) + \delta(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Date: 2025 年 4 月 18 日. Corresponding author: Hiroshi Ishii.

Keywords. Green function, Modified Bessel function, Integral kernel, Nonlocal operator, Convolution, Completeness.

2020 MSC Primary 41A30, Secondary 35J08, 44A35.

的解给出的常数 $d>0$ 的格林函数 $k(x;d)$，其中 Δ 是拉普拉斯算子，$\delta(x)$ 是狄拉克 δ 函数。$k(x;d)$ 的显式形式在第 3节中给出。作为特殊情况，当我们将积分核设为

$$K_N(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j k_j(x), \quad k_j(x) := k(x;d_j)$$

带有 $N \in \mathbb{N}$，常数 $\{\alpha_j\}_{1\le j\le N}$，以及正常数 $\{d_j\}_{1\le j\le N}$，空间卷积表示为

$$\begin{aligned}(K_N * f)(x) &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j w_j(x),\\ d_j \Delta w_j(x) - w_j(x) + f(x) &= 0 \quad (j=1,2,\dots,N)\end{aligned}$$

通过设置 $w_j(x) := (k_j * f)(x)$ $(j=1,\dots,N)$。也就是说，空间卷积表示为 PDE 系统解的线性和。我们使用 PDE 系统近似空间卷积的目标是通过适当选择径向积分核 K 的 $(N,\{\alpha_j\}_{1\le j\le N},\{d_j\}_{1\le j\le N})$，用 $K_N * f$ 来近似给定输入函数 f 的 $K * f$。这个问题已经成为使用 PDE 系统近似涉及一般径向积分核的空间卷积的数学模型的基本问题，例如一维空间中的反应扩散模型 [21, 22] 和趋化性模型 [18]。作为误差估计，Young 不等式给出了

$$\|K * f - K_N * f\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \le \|K - K_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

对于 $p,q,t \in [1,+\infty]$ 在 $1/p + 1/q = 1/t + 1$ 的情况下。因此，我们能够通过识别使用适当范数下的 Green 函数的线性和来近似径向积分核的方式获得空间卷积的逼近。在具有周期边界条件的一维有界域 [21, 18] 下，L^∞ 范数下径向积分核的逼近已经有过报道。此外，在一维整个空间 [22] 下，建立了 L^2 范数下的径向积分核的逼近。为了将 PDE 逼近方法扩展到具有空间卷积的数学模型的更一般设置，适应更高维度的空间近似是非常重要的。此外，扩展该方法以处理导数是有益的。本文提出了一种用于高维情况下空间卷积的基于 PDE 的逼近方法。论文其余部分组织如下。在第 2 节中，我们介绍了关于径向积分核和空间卷积逼近的主要结果。主要结果的证明在第 3 节给出。我们在第 4 节展示了一个数值示例，并在第 5 节给出了总结。

2. 逼近定理

我们首先陈述关于积分核逼近的主要结果。

定理 2.1. *令 m 为一个非负整数，$\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为一个具有正聚点的不同正常数组成的序列。假设 $K \in H^m(\mathbb{R}^n)$ 是一个径向函数。然后，对于任意的 $\epsilon>0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 大于 $(2m+n-1)/4$ 以及常数 $\{\alpha_j\}_{1\le j\le N}$ 使得*

$$K_N \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

和

$$\|K - K_N\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$$

成立。

该定理表明任何属于 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 的径向积分核都可以用格林函数的线性和在 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 内进行逼近。根据格林函数的定义，只有当 $n \leq 3$ 成立时，$k(\cdot; d) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 才成立。这一性质源自格林函数原点处的奇异性。然而，通过考虑格林函数的线性和，我们可以解决这个奇异性，这使得我们能够对属于 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 的函数进行逼近。定理的声明指出，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq N}$ 来保证所需的近似精度。我们注意到 α_j 不仅依赖于 K，还依赖于 N 对于任意的 $j = 1, 2, \ldots, N$。从潜在应用的角度来看，评估近似精度如何随着 N 的增加而提高是有趣的。然而，ϵ 与 N 之间的关系尚不清楚，这仍然是一个开放问题。证明的方法是基于正交基理论展示格林函数线性张量的完备性。在考虑完备性时，我们使用了解析函数的身份定理，因此包括了关于 $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 聚集点的一个假设。证明给出在子章节 3.4中。除了主结果中使用的范数外，我们还讨论了其他范数下的逼近。对于非负整数 l 满足 $m > n/2 + l$，已知

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset C^l(\mathbb{R}^n)$$

来自 Morrey 不等式。因此，当 $m > n/2 + l$ 和 $K \in H^m(\mathbb{R}^n)$ 时，我们找到了一个 C^l 近似。此外，对于任意的 $s \in \mathbb{R}$，我们得到属于 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 的核的一个 H^s 近似值，带有 $m > s$。特别地，对于 $p > 2$，我们通过 Sobolev 嵌入理论获得一个 L^p 近似值。情况 $p \in [1, 2)$ 尚未由这一结果解决，其中一部分仍然是开放问题。对于使用 PDE 系统来逼近空间卷积，我们有以下推论。

推论 2.2. *令 $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是一个具有正聚点的不同正常数序列。令 $s \in [0, n/2)$ 和 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 $m \geq s$。当 $K \in H^m(\mathbb{R}^n)$ 是径向积分核时，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 和常数 $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq N}$，使得*

$$K_N * f \in L^t(\mathbb{R}^n)$$

和

$$\|K * f - K_N * f\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

对于 $q, t \in [1, +\infty]$ 成立，其中 $1/q = 1/t + 1/2 + s/n$ 和 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$。

此结果使我们能够获得使用 PDE 系统在 L^t-范数意义上的空间卷积的逼近可能性。在此结果中，总是要求 $q < t$，这意味着输入函数类必须在一个不同于用于逼近空间卷积的范数下考虑。证明依赖于 Young 不等式，该不等式在子章节 3.5中给出。

3. 格林函数线性张量的完备性

在本节中, 我们给出主要结果的证明。通过本节, 我们将 $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 设为不同的正常数。

3.1. **格林函数的性质.** 我们介绍格林函数的一些性质。已知 $k(x;d)$ 表示为

$$\begin{aligned} k(x;d) &:= \left(\frac{1}{d}\right)^{n/2} G\left(\frac{|x|}{\sqrt{d}}\right), \\ G(|x|) &:= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{n/2-1} M_{n/2-1}\left(|x|\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $M_\nu(r)$ 是阶数为 ν 的第二类修正贝塞尔函数，定义为

$$M_\nu(r) := \int_0^{+\infty} e^{-r\cosh s}\cosh(\nu s)ds.$$

$G(|x|)$ 的傅里叶变换由 (3.1) 定义，计算如下：

$$\begin{aligned} \hat{G}(\xi) = \mathcal{F}_n[G](\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} G(|x|)dx \\ &= (2\pi)^{n/2}\left(\frac{1}{|\xi|}\right)^{n/2-1}\int_0^{+\infty} J_{n/2-1}(|\xi|r)G(r)r^{n/2}dr \\ &= \left(\frac{1}{|\xi|}\right)^{n/2-1}\int_0^{+\infty} rJ_{n/2-1}(|\xi|r)M_{n/2-1}\left(r\right)dr \end{aligned}$$

对于 $|\xi|>0$，其中 $J_{n/2-1}(r)$ 是阶数为 $n/2-1$ 的贝塞尔函数。如从 [24, §13.45] 所示，

$$\int_0^{+\infty} rJ_{n/2-1}(|\xi|r)M_{n/2-1}\left(r\right)dr = |\xi|^{n/2-1}{}_2F_1\left(\frac{n}{2},1;\frac{n}{2};-|\xi|^2\right) = \frac{|\xi|^{n/2-1}}{1+|\xi|^2},$$

我们有 $\hat{G}(\xi) = 1/(1+|\xi|^2)$。这里，${}_2F_1(a,b;c;z)$ 是超几何函数。很容易看出 $G(|x|)$ 对于 $|x|>0$ 是正的。使用积分公式

$$\int_0^{+\infty} r^{\mu-1}M_\nu(r)dr = 2^{\mu-2}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)$$

与 $|\mathrm{Re}(\nu)|<\mathrm{Re}(\mu)$ 从 [24, §13.21]，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} G(|x|)dx &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} r^{n-1}G(r)dr \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} r^{n/2}M_{n/2-1}(r)dr = 1. \end{aligned}$$

此外，从 [23, §7.10] 和 Legendre 复制公式，当 $n \leq 3$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} G(|x|)^2 dx &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} r^{n-1} G(r)^2 dr \\ &= \frac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} r M_{n/2-1}(r)^2 dr \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\pi^{(n-1)/2}\Gamma(3/2)} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

从这些 $G(|x|)$ 的性质中，我们得到以下 k_j 的性质。

引理 3.1. *对于 $j \in \mathbb{N}$，我们有*

(i) $k_j \in C(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *和*

$$\mathcal{F}_n[k_j](s) = \frac{1}{1 + d_j|\xi|^2};$$

(ii) $k_j(x) > 0$ $(x \neq 0)$ *和* $\|k_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$*;*

(iii) $k_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *和*

$$\|k_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = d_j^{-n/2} \|G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

当 $n \leq 3$。

3.2. **格林函数的线性张量.** 为了仅考虑径向函数，我们将 $K(x)$ 识别为 $K(|x|)$。我们用 $H^m_r(\mathbb{R}^n)$ 表示 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 中所有径向函数的集合。这里，我们将范数设定为

$$\|K\|^2_{H^m_r(\mathbb{R}^n)} := \int_0^{+\infty} s^{n-1}(1+s^2)^m |\hat{K}(s)|^2 ds,$$

其中 $\hat{K}(s)$ 是 $K(|x|)$ 的傅里叶变换。在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的径向函数空间由 $L^2_r(\mathbb{R}^n) := H^0_r(\mathbb{R}^n)$ 定义。内积由 $H^m_r(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\langle\, K_1, K_2 \,\rangle_{H^m_r(\mathbb{R}^n)} := \int_0^{+\infty} s^{n-1}(1+s^2)^m \hat{K}_1(s)\hat{K}_2(s) ds \quad (K_1, K_2 \in H^m_r(\mathbb{R}^n)).$$

在本节中，我们采用符号 $r = |x|$ 和 $s = |\xi|$，而 $\hat{\cdot}$ 表示傅里叶变换。本小节构造由集合 $\{k_j\}_{j\in\mathbb{R}}$ 生成的 $H^m_r(\mathbb{R}^n)$ 的标准正交基。

引理 3.2. $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *是线性无关的。*

证明. 对于 $J \in \mathbb{N}$ 和 $\{\gamma_j\}_{1\leq j\leq J} \subset \mathbb{R}$，我们假设

$$\sum_{j=1}^{J} \gamma_j k_j(r) = 0$$

对所有 $r > 0$ 成立。通过取傅里叶变换并使用引理 3.1(i)，我们得到

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{\gamma_j}{1 + d_j s^2} = 0$$

对于所有 $s \geq 0$。乘以 $\dfrac{1}{1 + d_l s^2}$ $(1 \leq l \leq J)$ 并在 $[0, +\infty)$ 上积分导致了联立方程

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{\gamma_j}{\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l}} = 0 \quad (1 \leq l \leq J),$$

因为有

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{(1 + d_j s^2)(1 + d_l s^2)} = \frac{\pi}{2(\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l})} \quad (1 \leq j, l \leq J).$$

这里，矩阵 $\{1/(\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l})\}_{1 \leq j,l \leq J}$ 是一个柯西矩阵，因此行列式可以根据

$$\det\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l}}\right\}_{1 \leq j,l \leq J}\right) = \left(\prod_{j,l=1}^{J} (\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l})\right)^{-1} \left(\prod_{1 \leq j < l \leq J} (\sqrt{d_l} - \sqrt{d_j})^2\right) \neq 0.$$

来计算。也就是说，该矩阵是可逆的。因此，$\gamma_j = 0$ 对所有 $j = 1, \ldots, J$ 成立。 □

这使我们能够构造一个其基为 $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 的空间。然而，k_j 并不总是属于 $H_r^m(\mathbb{R}^n)$。因此，我们固定一个非负整数 J 满足

$$4J > 2m + n - 1 \tag{3.2}$$

并定义两个函数为

$$\hat{w}(s) := \prod_{l=1}^{J} \frac{1}{1 + d_l s^2}, \quad \hat{\phi_j}(s) := \hat{w}(s) \frac{1}{1 + d_{j+J} s^2}.$$

容易看出 ϕ_j 表示为

$$\phi_j(r) = \gamma_0 k_{j+J}(r) + \sum_{l=1}^{J} \gamma_l k_l(r), \tag{3.3}$$

其中 γ_l $(0 \leq l \leq J)$ 是由

$$\gamma_0 = \prod_{l=1}^{J} \left(1 - \frac{d_l}{d_{j+J}}\right)^{-1}, \quad \gamma_l = \left(1 - \frac{d_{j+J}}{d_l}\right)^{-1} \prod_{1 \leq l^* \leq J,\ l^* \neq l}^{J} \left(1 - \frac{d_{l^*}}{d_l}\right)^{-1}.$$

给定的非零常数。然后我们看到 ϕ_j 比 k_j 具有更好的正则性，并作为以下引理中建立的基础。

引理 3.3. $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是线性无关的。此外，$\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 成立。

证明. $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的线性独立性来自于 $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的线性独立性。固定 $j \in \mathbb{R}$。令 $d_j^* := \min\{d_1, \dots, d_J, d_{j+J}\}$。由于我们有

$$0 \le \hat{\phi}_j(s) \le \left(\frac{1}{1+d_j^* s^2}\right)^{J+1}$$

对于任意的 $s \ge 0$，我们得到

$$\|\phi_j\|_{H_r^m(\mathbb{R}^n)}^2 \le \int_0^{+\infty} s^{n-1}(1+s^2)^m (1+d_j^* s^2)^{-2(J+1)} ds < +\infty$$

来自 (3.2)。 □

由于 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 是线性无关的，我们可以构造一个正交基底 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 $H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 上以满足

$$\operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_j\} = \operatorname{span}\{\psi_1, \dots, \psi_j\} \tag{3.4}$$

对于任意的 $j \in \mathbb{N}$ 采用格拉姆-施密特正交化方法。对于任意的 $j^* \in \mathbb{N}$，ψ_{j^*} 可以写成 $\{\phi_j\}_{1\le j\le j^*}$ 的线性组合。此外，ϕ_j 写成 $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的线性组合形式为 (3.3)。因此，建立 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的完备性确保了由 $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 进行的近似。我们使用以下特征来证明完备性。

引理 3.4. 假设 $K = 0$ 成立，如果 $K \in H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 满足所有 $j \in \mathbb{N}$ 的 $\langle K, \psi_j \rangle_{H_r^m(\mathbb{R}^n)} = 0$。然后正交基底 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 在 $H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 中是完备的。

3.3. **正交基的完备性.** 令 m 为一个非负整数，$\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为一个具有正聚点的不同正常数组成的序列。假设 $K \in H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 满足对于所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $\langle K, \psi_j \rangle_{H_r^m(\mathbb{R}^n)} = 0$。从 (3.4)，可得出 $\langle K, \phi_j \rangle_{H_r^m(\mathbb{R}^n)} = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 成立。定义两个函数为

$$\hat{K}_w(s) := s^{n-1}(1+s^2)^m \hat{w}(s)\hat{K}(s), \quad \mathcal{K}(z) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+zs^2}\hat{K}_w(s)ds \quad (z \in \mathbb{C}).$$

然后，尽管 K_w 也依赖于 m 和 n，我们有

$$\int_0^{+\infty} |\hat{K}_w(s)|^2 ds \le \left(\sup_{s\ge 0} s^{n-1}(1+s^2)^m |\hat{w}(s)|^2\right) \|K\|_{H_r^m(\mathbb{R}^n)}^2 < +\infty$$

来自 (3.2)。我们看到

$$0 = \langle K, \phi_j \rangle_{H_r^m(\mathbb{R}^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+d_{j+J}s^2}\hat{K}_w(s)ds = \mathcal{K}(d_{j+J}).$$

此外，$\mathcal{K}$ 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 上是良好定义的，因为我们发现

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(z)| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{|1+zs^2|} |\hat{K}_w(s)| ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{Re}(z)s^2} |\hat{K}_w(s)| ds \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\mathrm{Re}(z)}} \left(\int_0^{+\infty} |\hat{K}_w(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

根据恒等定理，我们得到以下等式。

引理 3.5. 假设 $\langle K, \phi_j \rangle_{H_r^m(\mathbb{R}^n)} = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立。我们然后有 $\mathcal{K}(z) \equiv 0$ 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 上。

证明. 对于 $z_1, z_2 \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 与 $z_1 \neq z_2$，我们推导出

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{K}(z_1) - \mathcal{K}(z_2)}{z_1 - z_2} &= \frac{1}{z_1 - z_2} \int_0^{+\infty} \hat{K}_w(s) \left[\frac{1}{1+z_1 s^2} - \frac{1}{1+z_2 s^2} \right] ds \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{s^2 \hat{K}_w(s)}{(1+z_1 s^2)(1+z_2 s^2)} ds. \end{aligned}$$

因此，对于任意的 $\mathrm{Re}(z) > 0$，我们得到

$$\frac{d\mathcal{K}}{dz}(z) = -\int_0^{+\infty} \frac{s^2 \hat{K}_w(s)}{(1+zs^2)^2} ds.$$

因此，$\mathcal{K}$ 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 上是解析的。由于 $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 具有正的聚点，$\mathcal{K}(z) \equiv 0$ 可以从恒等定理得出。 □

$\mathcal{K}$ 可以表示为适当的变量变换后的 Mellin 卷积。因此我们应用 Mellin 变换意义下的卷积定理，并得到以下结果。

引理 3.6. 如果在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 上 $\mathcal{K}(z) \equiv 0$ 成立，则 $K = 0$ 成立。

证明. 为了简单起见，证明基于傅里叶变换。令 $\tilde{K}(q) := e^{-q/2} \hat{K}_w(e^{-q})$。然后我们推导出

$$\|\tilde{K}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{K}(q)|^2 dq = \int_0^{+\infty} |\hat{K}_w(s)|^2 ds < +\infty. \tag{3.5}$$

因此，$\tilde{K} \in L^2(\mathbb{R})$ 成立。设

$$h(\lambda) := e^{\lambda}/(1+e^{2\lambda}).$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有

$$0 = \mathcal{K}(e^{2\lambda}) e^{\lambda/2} = \int_0^{+\infty} \frac{\hat{K}_w(s) e^{\lambda/2}}{1+e^{2\lambda}s^2} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\lambda-q)/2} \tilde{K}(q)}{1+e^{2(\lambda-q)}} dq = (h * \tilde{K})(\lambda).$$

由 $h \in L^1(\mathbb{R})$ 可得

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (h * \tilde{K})(\lambda) e^{-i\eta\lambda} d\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}} h(\lambda) e^{-i\eta\lambda} d\lambda \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{K}(\lambda) e^{-i\eta\lambda} d\lambda \right)$$

对于几乎所有 $\eta \in \mathbb{R}$。此外，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{K}(\lambda) e^{-i\eta\lambda} d\lambda = 0$$

对于几乎所有。$\eta \in \mathbb{R}$ 因为我们知道

$$\int_{\mathbb{R}} h(\lambda) e^{-i\eta q} d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{s^{-1/2-i\eta}}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}(1-2i\eta)\right)} \neq 0.$$

从帕塞瓦尔恒等式，我们有 $\|\tilde{K}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$，因此对于几乎所有 $s \geq 0$ 都有 $\hat{K}(s) = 0$ 来自 (3.5)。因此，我们得出结论 $K = 0$。 □

3.4. **径向积分核的近似.** 从上述准备，我们给出定理 2.1的证明。

定理的证明 *2.1.* 令 m 为非负整数，$\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为具有正聚点的不同正常数序列。由于从引理 3.4，3.5和 3.6中可知 $\{\psi_j\}$ 是 $H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 的一个完备正交基，对于任意的 $K \in H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left\| K - \sum_{j=1}^{N_0} \theta_j \psi_j \right\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} < \epsilon,$$

其中 $\theta_j := \langle\, K, \psi_j \,\rangle_{H_r^m(\mathbb{R}^n)}$。从 (3.4)，我们找到满足

$$\sum_{j=1}^{N_0} \theta_j \psi_j(r) = \sum_{j=1}^{N_0} \zeta_j \phi_j(r)$$

对于所有 $r > 0$ 的常数 $\{\zeta_j\}_{1\leq j\leq N_0}$。此外，使用 (3.3)，我们构造了满足

$$\sum_{j=1}^{N_0} \zeta_j \phi_j = \sum_{j=1}^{J+N_0} \alpha_j k_j = K_{J+N_0}.$$

的 $\{\alpha_j\}_{1\leq j\leq J+N_0}$ 因此，我们得到了 $K_{J+N_0} \in H_r^m(\mathbb{R}^n)$ 和

$$\|K - K_{J+N_0}\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

从而证明完成。 □

3.5. **空间卷积的近似.** 最后，我们给出推论 2.2的证明。

推论的证明 *2.2.* 令 $s \in [0, n/2)$ 和 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 $m \geq s$。此外，设 $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个具有正聚集点的不同正常数组成的序列。固定 $K \in H^m(\mathbb{R}^n)$。那么存在 $C = C(s, n) > 0$，使得

$$\|K\|_{L^{2n/(n-2s)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$$

成立，这是由 Sobolev 嵌入理论得出的。根据定理 2.1，存在 $N \in \mathbb{N}$ 和常数 $\{\alpha_j\}_{1\leq j\leq N}$ 使得

$$K_N \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

和

$$\|K - K_N\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{C}$$

成立。我们给出 $q, t \in [1, +\infty]$，其中包含 $1/q = 1/t + 1/2 + s/n$ 和 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$，是任意的。然后我们得到

$$\|K_N * f\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \leq \|K_N\|_{L^{2n/(n-2s)}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

因此我们有 $K_N * f \in L^t(\mathbb{R}^n)$。类似地，我们有

$$\|K * f - K_N * f\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \leq \|K - K_N\|_{L^{2n/(n-2s)}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

因此，证明完成。 □

4. 积分核近似的数值示例

在本节中，我们介绍一个近似的数值示例。ϵ 和 N 之间的关系尚不清楚，因此我们将在这里展示如何找到使给定径向积分核的误差最小化的格林函数的线性组合。一般情况下的讨论基本上相同，因此这里呈现了对于 $n = 1, 2, 3$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 情况的结果。设 $K \in L^2_r(\mathbb{R}^n)$，$N \in \mathbb{N}$ 和 $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是不同的正常数。我们定义

$$E(\beta_1, \ldots, \beta_N) := \left\| K - \sum_{j=1}^{N} \beta_j k_j \right\|^2_{L^2_r(\mathbb{R}^n)}$$

对于 $(\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$。如我们发现

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_l}(\beta_1, \ldots, \beta_N) \quad = \quad -2\left(\langle\, K, k_l \,\rangle_{L^2_r(\mathbb{R}^n)} - \sum_{j=1}^{N} \beta_j \langle\, k_j, k_l \,\rangle_{L^2_r(\mathbb{R}^n)} \right)$$

对于 $l = 1, 2, \ldots, N$，关键点是 E 的解是一个联立方程组

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j \langle\, k_j, k_l \,\rangle_{L^2_r(\mathbb{R}^n)} = \langle\, K, k_l \,\rangle_{L^2_r(\mathbb{R}^n)} \quad (1 \le l \le N). \tag{4.1}$$

为了分析该联立方程，我们将矩阵 $A = \{a_{j,l}\}_{1 \le j,l \le N}$ 定义为

$$a_{j,l} := \langle\, k_j, k_l \,\rangle_{L^2_r(\mathbb{R}^n)}$$

对于 $j, l \in \mathbb{N}$。

引理 4.1. 对称矩阵 A 是正定的。

证明. 对于 $(c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{R}^N$，我们有

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_j c_l a_{j,l} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \langle\, c_j k_j, c_l k_l \,\rangle_{L^2_r(\mathbb{R}^n)} = \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j k_j \right\|^2_{L^2_r(\mathbb{R}^n)} \ge 0.$$

此外，当且仅当所有 $j = 1, \ldots, N$ 满足 $c_j = 0$ 时，它等于 0，根据引理 3.2。因此，A 是正定的。 □

因此，E 具有唯一的临界点 $\{\alpha_j\}_{j=1,\ldots,N}$。此外，它满足

$$E(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = \min_{(\beta_1,\ldots,\beta_N) \in \mathbb{R}^N} E(\beta_1, \ldots, \beta_N),$$

因为 E 的黑塞矩阵等于 $2A$ 对于任何 $(\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{R}^n$。为了求解 (4.1)，我们具体计算 A。

引理 4.2. 对于 $j, l \in \mathbb{N}$，其成立如下：

(i) 当 $n = 1$ 时，我们得到

$$a_{j,l} = \frac{\pi}{2(\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l})};$$

(ii) 当 $n = 2$ 时，我们得到

$$a_{j,l} = \begin{cases} \dfrac{1}{2d_j} & j = l, \\ \dfrac{1}{2(d_j - d_l)} \log \dfrac{d_j}{d_l} & j \ne l; \end{cases}$$

(iii) 当 $n = 3$ 时，我们得到

$$a_{j,l} = \frac{\pi}{2\sqrt{d_j d_l}(\sqrt{d_j} + \sqrt{d_l})}.$$

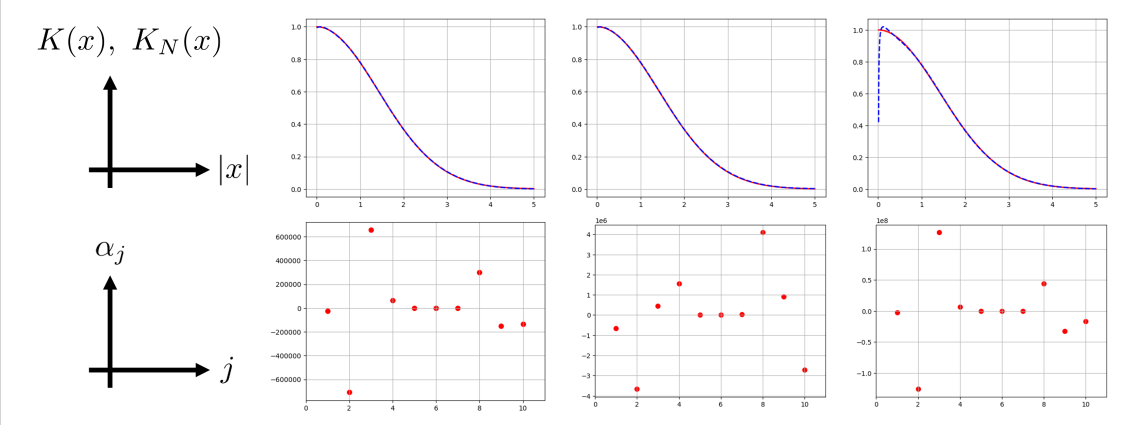

图 1. $K(x)$ 和 $K_N(x)$ 的图形与 $N = 10$（顶部面板）以及 $\{\alpha_j\}_{1\le j\le N+1}$ 的分布（底部面板）。$K(x)$ 和 $K_N(x)$ 的图表分别由红色曲线和蓝色虚线表示。数值示例分别展示为 $n = 1$（左）、$n = 2$（中）和 $n = 3$（右）。

为了展示数值示例，我们使用

$$K(r) = e^{-r^2/4}, \quad \hat{K}(s) = (\sqrt{4\pi})^n e^{-s^2}$$

和

$$d_j = 1.0 + \sin(j-1) \quad (j = 1, 2, \dots, 10).$$

图 1显示了 $K(x)$ 和 $K_N(x)$ 的图形。所有情况下图形大多相似，除了在情况 $n = 3$ 中 $x = 0$ 的邻近区域。这是因为格林函数在其原点处有一个奇点。至于系数，$\max_{1\le j\le N} |\alpha_j|$ 在所有情况下都很大，数量级为 10^5 或更高。即使在简单的例子中，系数也可能很大。此外，请注意在这种情况下，系数不一定为正，尽管我们使用的是一个正值且是正定函数的高斯函数。对于系数 $\{\alpha_j\}_{1\le j\le N}$ 具有恒定符号的 $K(x)$ 类别尚不清楚并且这是一个开放性问题。

备注 4.3. 其他情况下的 $\{\alpha_j\}_{1\le j\le N}$ 确定过程类似。值得注意的是，格林函数既不属于 $n \ge 4$ 情况下的 $L^2(\mathbb{R}^n)$，也不属于 $m \ge 2$ 和 $n \ge 1$ 时的 $H^m(\mathbb{R}^n)$。因此，通过用线性和 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 替换 $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，可以通过关系式 (3.3) 确定系数。

5. 结论与展望

本文开发了一种使用 PDE 系统近似空间卷积的方法，将其转化为适用于高维空间的形式。我们的结果的一个应用是用时间演化 PDE 系统来逼近具有空间卷积的演化方程的解，如在 [18, 21, 22] 中所提出的那样。一维情况下具有空间卷积的对流扩散方程的

近似方法主要是在 [18] 通过积分核导数的近似建立起来的。我们的结果有望将以前的一维发现扩展到更高维度的空间。最近，在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中获得了对于 $n = 1, 2, 3$ 的径向积分核的构造性逼近，如在 [15] 所述。这一结果通过格林函数的性质提供了特定系数和逼近精度，取决于维度 n。在一般情况下，尚不清楚是否可能实现 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中这样的近似。如果我们遵循本文提出的方法，一个潜在的方向是检查加权希尔伯特空间中格林函数的完备性，该空间可以嵌入到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中。然而，这种方法是否成功仍然是一个开放问题。

生成式 AI 及 AI 辅助技术在写作过程中的声明

在准备这项工作时，作者使用了 DeepL 和 Grammerly 来提高他们的英语写作水平。使用这些工具/服务后，作者审查并根据需要编辑了内容，并对出版物的内容负全部责任。

致谢

作者向京都大学的川越大辅表达了诚挚的感谢，感谢他富有成效的讨论，并感谢来自 Edanz（https://jp.edanz.com/ac）的 Glenn Pennycook, MSc 对本文草稿的编辑。作者部分得到了日本学术振兴会 (KAKENHI) 资助号 24H00188 的支持。HI 部分得到了日本学术振兴会 (KAKENHI) 资助号 23K13013 的支持。YT 部分得到了日本学术振兴会 (KAKENHI) 资助号 22K03444, 24K06848 的支持。

References

[1] T. Anderson, G. Faye, A. Scheel, D. Stauffer, *Pinning and Unpinning in Nonlocal Systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations, **28** (2016), 897-923.

[2] S. Amari, *Dynamics of Pattern Formation in Lateral-Inhibition Type Neural Fields*, Biol. Cybernetics, **27** (1977), 77-87.

[3] F. Andreu-Vaillo, J. Mazón, J. D. Rossi, J. J. Toledo-Melero, *Nonlocal diffusion problems*, Math. Surveys Monogr. **165**, AMS, Providence, RI, 2010.

[4] P. Bates, *On some nonlocal evolution equations arising in materials science*, In: Nonlinear dynamics and evolution equations (Ed. by H. Brunner, X. Zhao and X. Zou), Fields Inst. Commun., AMS, Providence, **48** (2006), 13-52.

[5] P. W. Bates, X. Chen, A. Chmaj, *Heteroclinic solutions of a van der Waals model with indefinite nonlocal interactions*, Calc. Var., **24** (2005), 261-281.

[6] P. W. Bates, P. C. Fife, X. Ren, X. Wang, *Traveling waves in a convolution model for phase transitions*, Arch. Ration. Mech. Anal., **138** (1997), 105-136.

[7] J. A. Carrillo, H. Murakawa, M. Sato, H. Togashi, O. Trush, *A population dynamics model of cell-cell adhesion incorporating population pressure and density saturation*, J. Theor. Biology, **474** (2019), 14-24.

[8] X. Chen, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Differential Equations, **2(1)** (1997), 125-160.

[9] S.-I. Ei, J.-S. Guo, H. Ishii, C.-C. Wu, *Existence of traveling waves solutions to a nonlocal scalar equation with sign-changing kernel*, Jounal of Mathematical Analysis and Applications, **487(2)**, (2020), 124007.

[10] S.-I. Ei, H. Ishii, *The motion of weakly interacting localized patterns for reaction-diffusion systems with nonlocal effect*, Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B., **26(1)** (2021), 173-190.

[11] S.-I. Ei, H. Ishii, S. Kondo, T. Miura, Y. Tanaka, *Effective nonlocal kernels on reaction-diffusion networks*, Journal of Theoretical Biology, **509** (2021), 110496.

[12] G. Faye, *Existence and stability of traveling pulses of a neural field equation with synaptic depression*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **12** (2013), 2032-2067.

[13] G. Faye and M. Holzer, *Modulated traveling fronts for a nonlocal Fisher-KPP equation: a dynamical system approach*, J. of Differential Equations, **258**, (2015), 2257-2289.

[14] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikow, G.T. Vickers, *The evolution of dispersal*, J. Math. Biol. **47** (2003), 483-517.

[15] H. Ishii, Y. Tanaka, *Reaction-diffusion approximation of nonlocal interactions in high-dimensional Euclidean space*, preprint.

[16] S. Kondo, *An updated kernel-based Turing model for studying the mechanisms of biological pattern formation*, J. Theoretical Biology, **414** (2017), 120-127.

[17] C. Laing, W. Troy, *PDE Methods for Nonlocal Models*, SIAM J. Applied Dynamical Systems, **2** (2003), 487-516.

[18] H. Murakawa, Y. Tanaka, *Keller-Segel type approximation for nonlocal Fokker-Planck equations in one-dimensional bounded domain*, arXiv:2402.11511.

[19] D. Mistroa, L. Rodriguesa, A. Schmidb, *A mathematical model for dispersal of an annual plant population with a seed bank*, Ecological Modelling, **188** (2005), 52-61.

[20] J. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[21] H. Ninomiya, Y. Tanaka, H. Yamamoto, *Reaction, diffusion and non-local interaction*, J. Math. Biol. **75** (2017), 1203-1233.

[22] H. Ninomiya, Y. Tanaka, H. Yamamoto, *Reaction-diffusion approximation of nonlocal interactions using Jacobi polynomials*, Japan J. Indust. Appl. Math. **35** (2018), 613-651.

[23] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Second edition, Oxford at the Clarendon Press, 1948.

[24] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, London and New York, 1944.

Research Center of Mathematics for Social Creativity, Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University, Hokkaido, 060-0812, Japan

Email address: hiroshi.ishii@es.hokudai.ac.jp

Department of Complex and Intelligent Systems, School of Systems Information Science, Future University Hakodate, 116-2 Kamedanakano-cho, Hakodate, Hokkaido 041-8655, Japan

Email address: yoshitaro.tanaka@gmail.com