

超多重态的几何结构¹

Stefan Vandoren²

理论物理研究所
乌特勒支大学，荷兰乌特勒支 3508 TD

摘要

这是一篇关于超多重态与超引力耦合的几何及其在弦理论中出现情况的简短评述。众所周知，超多重态 σ 模型的目标空间是一个负标量曲率的四元凯勒（QK）流形。我们回顾了一些超多重态模空间的方面，同时也研究了与沼泽地相关的 QK 几何的一些方面，包括一些具体的沼泽地 QK 流形的例子。

¹应邀为图书《超引力的半个世纪》撰稿，编者：A. Ceresole 和 G. Dall'Agata。

²Email: s.j.g.vandoren@uu.nl

1 介绍和我个人的一些历史

我的博士学位导师是比利时鲁汶大学的 Antoine Van Proeyen，后来我在石溪大学与 Martin Roček 和 Peter van Nieuwenhuizen 一起做博士后。离开石溪大学后，我被乌得勒支大学的 Bernard de Wit 聘为初级教员。有点想说我是被超引力环境培养和教育出来的。虽然部分正确，但我最初是在第一次在斯旺西做博士后的期间，在刚性超对称的背景下开始研究双曲多重几何的。紧接 1994 年著名的 Seiberg-Witten 论文讨论了四维 $N = 2$ 超对称规范理论中的库仑分支后，Seiberg 和 Witten 研究了将其圆周化到三维 [1] 的情况。在三维中，矢量多重态可以被对偶化为双曲多重态，其标量（对于刚性超对称，在 $D = 4$ 中的 $N = 2$ 或在 $D = 3$ 中的 $N = 4$ ）参数化一个双全纯流形。我研究了超凯勒空间的几何结构，并与一些在超对称场论中的瞬子计算方面有专长的专家（Nick Dorey、Valentin Khoze 和 Michael Mattis）以及当时年轻且才华横溢的博士生 David Tong 一起，我们计算了一些确认 [2] Seiberg 和 Witten 预测的瞬子修正，即对于规范群 $SU(2)$ ，模空间应该是由 Atiyah 和 Hitchin 构造的超凯勒空间 [3]。差不多同时，我与 Bernard de Wit 等人一起研究了更一般的特殊几何——在 $N = 2, D = 4$ 中矢量多重态的几何结构是如何继承到三维紧化时的超凯勒几何中 [4, 5] 的一种更为普遍的构造称为刚性 c 映射，参见 [6] 的附录。

从我的超引力导师那里，我很快就学会了四维超引力和其物质耦合的基础知识，带有八个超荷。正如在 [7, 8] 中所发现的那样，向量多重态 [9] 的特殊几何性质，在弦理论中可以通过卡比埃-丘流形的模空间得到更几何化的描述和实现。然后可以使用周期积分来确定控制 $N = 2, D = 4$ 向量多重态几何结构的全纯预势量子修正，这是本书其他章节所讨论的内容。由于卡比埃-丘紧化还产生了超多重态，并受到早期论文 [10, 11] 的激励，我被触发并设定自己确定超多重态模空间量子修正的目标。那些量子修正受标量子控制，确定它们将变得相当具有挑战性，事实证明确实如此。在 2000 年至 2010 年间，在与一组人的富有成效且愉快的合作中，我们取得了很大进展，最值得一提的是谢尔盖·亚历山德罗夫、莉莉娅·安格洛娃、伯纳德·德维特、鲍里斯·皮奥利内、马丁·罗切克、弗兰克·佐埃雷西格以及当时的其他博士生和博士后。参见例如 [12–22] 获取部分参考文献。

超多重态几何的故事实际上始于 1983 年，Bagger 和 Witten 发表的论文 [23]。他们研究了目标空间中超多重态 sigma 模型中的 $N = 2, D = 4$ 局部超对称性所施加的约束，并发现超多重态中的标量必须参数化四元数-凯勒 (QK) 流形。这与刚性超对称的情况形成对比，在刚性超对称情况下，超多重态参数化的是超凯勒流形。QK 几何将在本章中扮演重要角色，因此我们将在下一节中回顾它们。Bagger 和 Witten 并不是第一个研究超多重态耦合到超引力的人。Zachos [24] 和 Breitenlohner 及 Sohnius [25] 的两篇较早论文考虑了使用非定域方法的一些超多重态耦合到超引力的特殊情况。对于矢量多重态和超多重态物质耦合，[9] 发展了一种超共形张量演算。关于超引力中物质耦合的历史更多内容，请参阅 Van Proeyen 对本书的贡献。

本章旨在概述超多重态的几何结构，更多地关注理念和背景，而不是技术和细

节。我试图在历史和原始参考文献方面保持一定的准确性，但参考文献列表远非完整。还有其他综述文章包含更多详细信息，供有兴趣的读者查阅。例如，我没有回顾瞬子对模空间修正的故事，因为这一内容已在 2011 年的 [26] 以及 2015 年的 [27] 中进行了论述。还有关于 $N = 2$ 物质-超引力耦合及其规范化的优秀综述，在本书的其他部分或参考文献 [28–30] 中可以找到。

2 超多重态和四元凯勒几何

如引言中所述，Bagger 和 Witten 发现超多重态中的标量场 ϕ^i 耦合到四维超引力时参数化了一个拟凯勒 (QK) 流形 [23]。遵循他们的约定，拉格朗日中的相关项为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2}e\mathcal{R} - g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j, \quad (2.1)$$

其中 $\mathcal{R}$ 是时空曲率， $\kappa^2 = 8\pi G_N$ 与牛顿常数有关， g 是 QK 流形上的度量。我们省略了拉格朗日中费米子以及超对称变换规则的书写，从中可以得出目标流形上受到的 QK 限制。读者可以在 [23] 找到详细内容。

据我所知，这是量子几何首次进入理论物理学的领域。在数学中，量子柯西流形有着更悠久的历史。它们通常通过全纯群来定义。根据定义，量子柯西流形的（简化）全纯群包含于 $Sp(n) \cdot Sp(1) = Sp(n) \times Sp(1)/\mathbb{Z}_2 \subset SO(4n)$ 群中，其中 $\mathbb{Z}_2$ 因子由 $(-\mathbb{I}, -1)$ 生成。至于超凯勒流形（其全纯群位于 $Sp(n)$ 中），量子柯西流形的实维度是四的倍数，设为 $4n$ 。由于每个超多重态包含四个实标量，需要 n 超多重态来描述一个维度为 $4n$ 的量子柯西空间。对于 $n = 1$ ，由于 $Sp(1) \cdot Sp(1) \propto SO(4)$ ，QK 流形的定义必须进行调整，通过要求流形具有（反）自对偶 Weyl 曲率的 Einstein 来定义它。或者，可以通过存在 $Sp(1)$ 三重态几乎复结构来定义 QK 的。有关 QK 几何的一些数学回顾，请参见例如 [31]。尽管它们的名字叫 QK 空间，但这些空间通常不是 Kähler 的，因为它们没有可积的复结构。四元数结构的概念在超引力中 useful，因为这三个几乎复结构与恒等变换一起生成超对称变换。

作为其全纯性的结果，QK 流形是爱因斯坦流形，因此它们具有常数量曲率，参见例如 [32]。如果数量曲率为零，则 QK 流形变为超凯勒流形。因此可以预期在超引力理论中，数量曲率与牛顿常数成正比。一个令人惊讶的事实是只有负的数量曲率的 QK 流形才能耦合到超引力。事实上，Bagger 和 Witten 计算出其值为

$$R(g) = -8\kappa^2(n^2 + 2n). \quad (2.2)$$

。请注意， R/κ^2 是无量纲的，并且以其四元数维 n 的形式进行量化。特别是这意味着数量曲率不能依赖于几何中的任何其他参数。

对称的 QK 空间 G/H 具有正曲率，被 Wolf 和 Alekseevskii [33, 34] 分类。如后者参考文献所示，所有紧致齐次 QK 空间必须是对称的，并且当标量曲率为正时，它们

由三个无限系列

$$\begin{aligned} \mathbb{HP}(n) &= \frac{Sp(n+1)}{Sp(n) \times Sp(1)}, & X(n) &= \frac{SU(n+2)}{S(U(n) \times U(2))}, \\ Y(n) &= \frac{SO(n+4)}{SO(n) \times SO(4)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

给出，其维度为 $4n$ ，以及五个例外情况

$$\begin{aligned} \frac{G_2}{SO(4)}, & \quad \frac{F_4}{Sp(3) \times Sp(1)}, & \quad \frac{E_6}{SU(6) \times Sp(1)}, \\ \frac{E_7}{Spin(12) \times Sp(1)}, & \quad \frac{E_8}{E_7 \times Sp(1)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

分别为 8、28、40、64 和 112 维。对于低维数，这些空间之间存在关系： $Y(1) \cong \mathbb{HP}(1)$ 和 $Y(2) \cong X(2)$ 。这些是唯一两个具有正标量曲率的四维 QK 空间，分别对应于四球面和 $\mathbb{CP}^2$ ：

$$S^4 = \frac{SO(5)}{SO(4)}, \quad \mathbb{CP}^2 = \frac{SU(3)}{S(U(2) \times U(1))}. \quad (2.5)$$

巧合的是， $\mathbb{CP}^2$ 也是一个 Kähler 流形，但这是一种例外。

如前所述，具有正曲率的 QK 空间不能耦合到超引力中，因此在具有八个超荷的弦理论紧化低能极限中不会出现。此外，具有正曲率的 QK 空间非常刚性，并且没有已知的非对称 QK 流形具有正标量曲率的例子。进一步表明，在每个维度上只有有限数量的空间，并且猜想所有具有正曲率的完整 QK 空间都是对称空间 [35]，即 Wolf 空间。

存在非紧致的 Wolf 空间，其标量曲率为负，因此对超引力应用而言是相关的。例如，系列

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{HP}}(n) &= \frac{Sp(n, 1)}{Sp(n) \times Sp(1)}, & \tilde{X}(n) &= \frac{SU(n, 2)}{S(U(n) \times U(2))}, \\ \tilde{Y}(n) &= \frac{SO(n, 4)}{SO(n) \times SO(4)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

类似地，基于例外群的 QK 空间也有非紧致版本，如 $G_{2(+2)}/SU(2) \times SU(2)$ 。对于与超引力相关的具有负标量曲率的 QK 空间分类并不存在。它们不是刚性的，并且可以相对容易地进行保持 QK 属性的变形 [36]。在弦理论中，这将通过我们稍后讨论的微扰和非微扰量子修正来实现。对于早期关于具有负曲率的均匀的 QK 空间分类的研究，请参阅 [37]，[38] 和 [39, 40]。由于 $Sp(1)$ -曲率不消失，因为非平凡的 $Sp(1)$ 完全区系因子，QK 空间相当难以处理。这使得从超弦紧致化的低能有效作用中研究超多重态与超引力的耦合变得复杂。

超多重态与 $D = 4, 5, 6$ 中八个超荷的超引力耦合总是导致相同的约束，即目标空间是一个负曲率的 QK。Bagger-Witten 分析可以很容易地适应五维和六维的情况。关于 $D = 6$ 情况的一些早期参考文献，请参阅 [41, 42]。从 $D = 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ 进行维度约化后，超多重态模空间上的超对称约束保持不变。请参见例如 [30] 关于具有八个超荷的 $D = 4, 5, 6$ 超引力的一些综述。

在三维时空维度中，情况不同，因为超重力对超多重态的约束要求目标空间为两个四元凯勒流形 [43] 的乘积（两个 QK 的乘积通常不是一个 QK）。正如我们将要看到的那样，这与将一个 $D = 4$ 理论中带有向量多重态和超多重态的空间圆周紧致化一致：从超多重态中得出的标量场几何在三维空间中简化为相同的 QK，但向量多重态在将矢量对偶成标量后产生第二个 QK 流形。有趣的是，并且与此形成对比，在带有六个超荷（记作 $N = 3$ ）的 $D = 3$ 超重力中，标量场的目标空间再次是一个（单个）QK 空间。

3 来自弦理论的 QKs

从弦理论中有多种设置可以得到 $N = 2$ （八个超荷）带有超多重态的超引力。其中许多涉及在 Calabi-Yau 三维流形 (CY_3) 上的 II 型超弦紧致化，Hodge 数 $h_{1,1}$ 和 $h_{1,2}$ 分别决定 Kähler 结构和复结构的变形。我们从这些开始，也提到与异弦理论的关系，但也会在本节末尾讨论一些基于非对称轨道的其他较新构造。在我们这样做之前，我们要提到，在与矢量多重态和超多重态耦合的超引力中，由这两个多重态的标量场组成的总模空间因式分解为 [9]，

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_V \times \mathcal{M}_H, \quad (3.1)$$

其中 $\mathcal{M}_V$ 是一个由全纯预势确定的特殊 Kähler 几何，而 $\mathcal{M}_H$ 是一个 QK 空间。这意味着我们可以分别研究它们。

来自 CY 的 QK₃

十一维超引力或 M 理论紧化到一个卡拉比-丘三维流形 (CY_3) 下至五维给出了 $h_{1,2} + 1$ 个无质量超多重态和 $h_{1,1} - 1$ 个无质量向量多重态 [44]。在圆 S^1 上进一步减少到四维后，该理论与类型 IIA 弦理论紧化在同一 CY_3 中对偶，导致 $n_H = h_{1,2} + 1$ 个无质量超多重态和 $n_V = h_{1,1}$ 个无质量向量多重态。类型 IIA 超引力的紧化是在 [45] 中进行的，并且表明标量子位于一个超多重态中。对于刚性 CY_3 ，没有复结构形变，即 $h_{1,2} = 0$ 我们得到所谓的通用超多重态，在弦树级别上，它对应于 QK 流形

$$\tilde{X}(1) = \frac{SU(1, 2)}{U(2)}. \quad (3.2)$$

对于通用超多重态的 QK 度量的一个参数化是用四个实坐标表示的

$$ds^2 = d\phi^2 + e^{-\phi} \left((d\chi)^2 + (d\varphi)^2 \right) + e^{-2\phi} \left(d\sigma - \chi d\varphi \right)^2, \quad (3.3)$$

其中 ϕ 是扩张子, σ 是对偶标量 $D = 4$ Kalb-Ramond 二形式, χ 和 φ 是两个 Ramond-Ramond 标量, 所有这些都是从刚性 CY_3 上的 IIA 获得的。

类似地, IIB 弦理论在 CY_3 上的紧化产生 $n_V = h_{1,2}$ 个矢量多重态和 $n_H = h_{1,1} + 1$ 个超多重态, 在 $D = 4$ 中。十维 IIB 超引力在 CY_3 上的紧化在 [46, 47] 中进行了。我们可以总结 II 型理论在 (相同的) CY_3 上的多重态结构为

$$\begin{aligned} n_V^A &= h_{1,1}, & n_H^A &= h_{1,2} + 1, \\ n_V^B &= h_{1,2}, & n_H^B &= h_{1,1} + 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中上标指的是 IIA 或 IIB 类型。请注意, 从 IIA 切换到 IIB 相当于互换 Hodge 数字, 这是 Calabi-Yau 三维流形镜像对称性的表现, 表明 $IIA/CY_3 = IIB/\overline{CY}_3$, 其中波浪线表示镜像流形。但是正如 [6] 的工作中所展示的那样, IIA 和 IIB 之间的向量和超多重态模空间也存在其他关系, 这在 [6] 中被称为 c-map。在一个弦理论的语言中, 这只是 IIA 和 IIB 之间的 T-对偶性, 两者都紧致化在同一个 CY_3 上,

$$IIA/(CY_3 \times S^1_R) = IIB/(CY_3 \times S^1_{1/R}). \quad (3.5)$$

这意味着当我们进一步将四维理论缩小到一个圆上时, 我们应该从 IIA 理论获得 IIB 模空间, 反之亦然。特别是, IIB 中的 QK 模空间应该来自 IIA 中的矢量多重态模空间, 因为矢量多重态可以在从四维降到三维时对偶化为超多重态。这一点已经被 [6, 48] 理解并解决了, 他还展示了如何通过降维使得 (树级) QK 空间的性质遵循特殊的凯勒流形。因此, 在树级扩张子中, QK 空间由一个全纯函数 $F(X)$ 决定, 该函数是控制矢量多重态耦合的预势。经典的 (在 α' 中) 对 IIA 中的预势贡献由 CY_3 的三重相交数 d_{ABC} 决定, 形式为

$$F(X) = i \frac{d_{ABC}}{6} \frac{X^A X^B X^C}{X^0}, \quad A, B, C = 1, \dots, n_V = h_{1,1}. \quad (3.6)$$

预势是二次齐次的, 这是超对称所要求的。可以将微扰和世界面瞬子修正 (在 α' 中) 也添加到 F , 但我们为了简化展示而省略了它们。通过 c-映射, 完整的预势还定义了 IIB 中的一个 QK 模空间。一种形式为 (3.6) 的预势也具有 $D = 5$ 提升, 在那里它对应于实特异几何 [49]。给定一组在 (3.6) 中的 d_{ABC} 符号, 可以计算出相应的 QK 空间。这个程序是在 [39, 40] 中完成的, 并导致了 c-映射图像中同质 QK 空间的分类, 包括一些不在 Alekseevskii [37] 列表中的新示例。

示例中的 QK 空间在 c-映射的图像中具有 $D = 5$ 抬升 (因此使用 d 符号), 是正交 Wolf 空间 $\tilde{Y}(n)$, 带有 $n \geq 3$ 。此外, 四个例外的 Wolf 空间出现在来自 $D = 5$

四个魔幻超引力中，即基于 F_4, E_6, E_7 和 E_8 群 [50] 的那些。有趣的是，缺失的例外 QK 空间 $G_{2(+2)}/SU(2) \times SU(2)$ 可以从没有向量多重态的 $D = 5$ 超引力开始获得。这可以在 CY_3 上的 M-理论中实现，其中包含 $h_{1,1} = 1$ 。任何额外的超多重态在 $D = 5$ 中也会随之出现。进一步在一个圆上约化到 $D = 4$ 后，可以得到耦合到一个具有预势 $F = i(X^1)^3/X^0$ 的向量多重态的超引力，对此可以应用 c-映射。因此我们得到 $G_{2(+2)}/SU(2) \times SU(2)$ 作为 IIB 中 CY_3 上的模空间 $h_{1,1} = 1$ 。

对于类型为 (3.6) 的一般预势，当相应的 d 符号实现为 CY_3 的三重交集数时，则相应 QK 在字符串景观中；否则它们位于沼泽地。我们在下一节回到关于沼泽地的问题。

也可以基于不同的预势使用 c-映射。例如，对于二次多项式，

$$F = iX^I \eta_{IJ} X^J, \quad I = 0, 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

其中 η 是签名 $(+ - \dots -)$ ，c-映射给出西 Wolf 空间 $\tilde{X}(n+1); n \geq 1$ QK 空间 [6, 48]。二次预势作为对三次预势的量子修正出现，并且在接近类 conifold 奇异性或模空间中任何一圈后会获得单值群的点时相关。c-映射在弦耦合 g_s 的树级别上有效。对预位势的 α' 纠正可以通过 c-映射转移到 QK 空间的 α' 纠正上。应该强调的是， $\mathbb{H}P(n)$ 系列在 c-映射 [6, 39] 的像中是不。

来自 QK 的 $K3$

超多重态也可以从异弦理论中获得。可以从紧致化到六维的异弦理论开始，该理论是在 $K3$ 流形上进行紧致化的。在具有八个超荷的六维空间中，矢量多重态不包含任何标量。相反，可以存在张量多重态（每个都包含一个实数标量）和超多重态。Dilaton 位于一个张量多重态中，因此超多重态模空间在 g_s 中是精确的。总模空间再次分解，并且从超多重态中获得 QK，就像之前一样。由于异弦在 $K3$ 上与 F-理论在一个椭圆纤维 CY_3 [51] 上对偶，因此可以认为从 Calabi-Yau 三维流形中再次获得了 QK。但是这里的重点是，在六维弦理论中确实出现了 QK，这与之前四维和五维超引力的例子并列。

异质弦在 $K3$ 上的总超多重态模空间由于规范丛模的存在而变得复杂。参见例如。[52]。但在没有这些的情况下，仅考虑 $K3$ 的几何和 B -场模时，超多重态模空间是 QK 空间³

$$\mathcal{M}_{K3} = \frac{SO(4, 20)}{SO(4) \times SO(20)}, \quad (3.8)$$

它是 80 维的。为了更完整地描述超多重态模空间，可能需要转向 F 理论图景，在那里超曲面的数量由 $n_H = h_{1,2} + 1$ 给出，并且 $h_{1,2}$ 对应于椭圆纤维 CY_3 的复结构变形。

³这里，为了简单起见，我们省略了进一步除以离散对偶群的过程。

我们在这里不会进一步详细说明，但仍然提到可以从已知的弦对偶性研究异对方程双重模空间

$$Het/(K3 \times S^1) = M/CY_3, \quad Het/(K3 \times T^2) = IIA/CY_3, \quad (3.9)$$

其中假设 CY_3 是 $K3$ -纤维化的。这些对偶性的第一个是在五维中，第二个是在四维中。关于异对方程双重模空间的一些参考文献，请参见例如 [53–57]。

来自非对称轨道空间的 QK 结构

近年来，从四维和五维中的自由作用非对称轨道空间开始，获得了新的超多重模空间构造和示例，起始于 [58, 59] 和 [60, 61]。这些是非几何紧化的示例，它们具有一些非常特殊的特征，这与从 CY_3 上的 II 型或异圈上的 $K3$ 获得的 QK 不同。其中之一是 II 型轨道空间中的 dilaton（dilation 的单数形式，指膨胀子）位于矢量多重态中，并且在弦耦合 g_s 或 α' 中都没有超多重模空间的量子修正。因此，在 [59] 中研究的例子中可以确定精确的超多重模空间。这些模型通常只有很少的超多重态，其目标空间由 Wolf 空间的非紧版本给出，例如通用超多重态 $\tilde{X}(1)$ 和八维对称空间 $\tilde{Y}(2)$ 。第二个奇特特征是，在某些特殊情况下，可以构造完全没有超多重态的商空间 [58, 60]，另见 [62]。这与上述讨论的几何紧化非常不同。

4 四元凯勒几何与沼泽地理论

在沼泽地计划 [63] 的背景下，一个自然的问题是拟凯勒流形是否都可以在弦理论中实现。正如在 [64] 中已经注意到的那样，模空间的渐近区域被认为是一个负标量曲率的空间。对模空间的进一步要求是完备性和有限体积。对于耦合到超引力的拟凯勒空间，即使包含量子修正时，负曲率也是自动满足的。仍然有一个问题有待解决，即所有具有负曲率的拟凯勒流形是否出现在弦理论中。在本节中，我们考虑一些可能的沼泽地拟凯勒流形的例子，并在本节末尾做一些一般性评论。

示例 1：四元双曲空间 $\widetilde{\mathbb{H}\mathbb{P}}(n)$ 。

也许所有负曲率的 QK 中最简单的就是四元数射影空间的非紧版本，即我们用

$$\widetilde{\mathbb{H}\mathbb{P}}(n) = \frac{Sp(n, 1)}{Sp(n) \times Sp(1)}. \quad (4.1)$$

表示的四元数双曲空间。它们作为超多重态的目标空间的存在性已经在 1981 年的 [25] 中得到了展示。

如前所述， $\widetilde{\mathbb{H}\mathbb{P}}(n)$ 已知不在 c 映射的像中，因此这个候选的超多重态模空间不能通过 T 对偶从矢量多重态模获得。

因此，在弦理论中很难实现这种 QK 来自 CY_3 紧化。
最简单的四元数双曲空间是非紧版本的四维球

$$\frac{Sp(1, 1)}{Sp(1) \times Sp(1)} \simeq \frac{SO(1, 4)}{SO(4)}, \quad (4.2)$$

，它与正交 Wolf 空间 $\tilde{Y}(1)$ 同构。视为 $\tilde{Y}(1)$ ，在 [65] 中显示，这个 QK 可以通过异弦在 T^4 上的两步截断获得，首先截断到四个超多重态，其模空间为 $SO(4, 4)/SO(4) \times SO(4)$ ，然后进一步截断到单个超多重态，目标为 $SO(1, 4)/SO(4)$ 。虽然一致截断在超引力中是有效的，但仍需观察是否这样的截断有弦论实现，例如通过某种轨道面的实现。即使有可能实现，要实现具有 $n > 1$ 的四元双曲空间似乎是一个开放问题，并且很可能它们属于沼泽地。

示例 2：齐次非对称 QK 的

c-映射产生一个具有负标量曲率的 QK 流形，源自一种特殊的凯勒几何。后者是向量多重态模空间中标量的目标空间在 $D = 4$ 中的一个基底，在这个基底下它由一个二次齐次预位势 $F(X)$ 控制。当 F 属于弦理论景观时，根据 c-映射（在弦理论语言中这不过是 T 对偶的结果），相应的 QK 也属于弦理论景观。

最近，在 [66] 中，提出了一个问题：哪些特殊的 Kähler 几何属于荒地。该分析显示了特殊几何景观的稀疏性，并且大多数特殊的 Kähler 流形实际上都属于荒地。很自然可以猜想，从一个属于荒地的预势出发，经过 c 映射后对应的 QK 也属于荒地。在 [66] 中讨论了一些属于荒地的具体三次预势 F 的例子。当 F 完全是三次时，特殊的 Kähler 模空间要么是局部对称的以使它具有有限体积⁴，或者否则接受量子修正。否则它属于荒地。例如，有两个无限族的齐次但非对称空间，用整数 (p, q) 标记，并在 [38]⁵ 中表示为 $K(p, q)$ 和 $H(p, q)$ 。预势的确切形式以及 K 和 H 空间的其他性质在 [38] 中进行了讨论。相应的 QK 空间在 c-映射的像是齐次的，并且已经出现在 Alekseevskii 的列表 [37] 中，它们分别用 $W(p, q)$ 和 $V(p, q)$ 表示 K 和 H 。QK 空间 W 的维度是 $4(4+p+q)$ 。参见例如。[39] 有关这些及其他同质非对称 QK 空间的更多信息。

示例 3：万有超多重态的变形

我们从公式 (3.3) 给出的通用超多重态度量开始。它来源于 IIA 弦在刚性 CY_3 上紧致化的弦理论。微扰量子修正的研究见于 [11]，也参见 [15, 17, 67]，并且在 [17] 中论证了超多重态模空间仅存在一环圈修正。应用于普适超流体，一环修正可以写成度

⁴这里，重要的是将模空间商以离散的等距群。

⁵特殊情况 $K(0, q), H(1, 1), H(1, 2), H(1, 4)$ 和 $H(1, 8)$ 确实对应于对称情况，它们的对偶四元数空间分别是 QK Wolf 空间 $\tilde{Y}(q+4)$ 对应于 $K(0, q)$ ，以及基于四个例外对称空间的那些。

量 (3.3) 的形变, 在附录中使用的坐标系 [17] (其中使用了 $x^0 = e^{-\phi}$, 并对其他场进行了简单的重新缩放) 下, 它具有以下形式

$$ds^2 = \frac{1 + 2ce^{-\phi}}{1 + ce^{-\phi}} d\phi^2 + (1 + 2ce^{-\phi})e^{-\phi} \left((d\chi)^2 + (d\varphi)^2 \right) + \frac{1 + ce^{-\phi}}{1 + 2ce^{-\phi}} e^{-2\phi} (d\sigma - \chi d\varphi)^2. \quad (4.3)$$

这里, 常数 c 由 CY_3 的欧拉数决定

$$c = -\frac{1}{6\pi}(h_{1,1} - h_{1,2}) = -\frac{1}{6\pi}h_{1,1} < 0, \quad (4.4)$$

其中在最后一个方程中我们利用了 CY_3 是刚性的, 因此系数为 $c < 0$ 。对于 $c = 0$, 恢复了经典的结论 (3.3)。如 [68, 69] 所示, 在 $e^\phi = -2c$ 处存在曲率奇点, 位置在 $e^\phi = c$ 的是一个坐标奇点。度量的行列式由

$$\sqrt{g} = e^{-2\phi}(1 + 2ce^{-\phi}), \quad (4.5)$$

给出, 它在 $\phi \rightarrow \infty$ 处有良好的渐近条件, 但它表明对于 $c < 0$, 度量在 $e^\phi = -2c$ 处变得退化。度量在 $e^\phi > -2c$ 时是正定的, 但如 [70] 所示, 它是不完备的。在弦理论中通过包含 D-膜和 NS 五膜瞬子修正来最终解决 $e^\phi = -2c$ 处的奇异性, 并期望这些非微扰修正使流形再次具有有限体积且完备。关于瞬子修正的超多重模空间的回顾, 请参见 [27], 以及更近期的文章 [71–78]。

现在考虑一个任意常数正的 c 的情况, 并注意到度量处处是正定的。第一个事实是, 这个度量仍然定义了一个 (非齐次) QK 流形, 这很容易从 QK 的超凯勒锥描述中得出 [15, 17], 也可以参见 [70] 获取更数学化的处理方式 [12, 13, 79, 80]。但是与情况 $c < 0$ 不同的是, 对于 $c > 0$ 没有曲率奇点。事实上, 在 [70] 的附录中显示, $c > 0$ 的度量是完备的。

示例中的 $c > 0$ 是一个真正的完全且负曲率的 QK 流形。然而, 它似乎属于沼泽地带, 因为基于刚性 CY_3 的弦理论具有正欧拉数, 因此给出 $c < 0$ 。很可能不存在商以离散等距群使得体积有限, 因此模空间沼泽猜想之一 [64] 被违反。或许存在其他弦论构造, 在这些构造中可能出现这种几何形状, 可能伴随额外的量子修正, 但据我所知, 唯一另一个 QK 空间 $SU(2, 1)/U(2)$ 在弦理论中出现的例子是在 [59] 的轨道构造中。但在那种情况下, 经典的超多重模空间是精确的, 并且没有量子修正因为 Dilaton 位于矢量多重态中。

一些一般性备注

我们在此部分的末尾提出一些关于沼泽地的一般性备注。存在相当多的数学文献可能有助于理解 QK 景观。除了负曲率 (超多重自发满足) 之外, 两个主要性质是完备性和有限体积。

- **完备性**

关于 QK 流形的完备性，在 [81, 82] 中表明，完备性在 c -映射下得以保持。因此，每当向量多重模空间是完备时， c -映射后的超多重模空间也是完备的。对于所谓的 r -映射也有类似的陈述，该映射将 $D = 5$ 实特殊几何通过降维映射到 $D = 4$ 特殊凯勒几何。以这种方式获得的齐次 QK 空间自动是完备的，但通常它们会在膨胀子中接受量子校正，这破坏了完备性。例外的是在 [59] 中构造的超多重模空间，这些空间经典上是精确的，并且作为自由作用的轨道具有更高的 $N > 2$ 超对称起源。

一个有趣的完备性构造示例是由预势控制的完全但非均匀特殊 Kähler 空间，该预势是 STU 模型的一种变形，并且源自 $CY_3 \times S^1$ 上的 M 理论或对偶异圆模型：

$$F = i \left(\frac{X^1 X^2 X^3}{X^0} + \frac{1}{3} \frac{(X^3)^3}{X^0} \right). \quad (4.6)$$

这个预势仍然是形式为 (3.6) 的三次式，但由于第二项的存在，几何是非均匀的。如 [81] 所示，它导致了一个维度为 16 的完全且非均匀 QK 流形，这是正交 Wolf 空间 $\tilde{Y}(4)$ 的一种变形。

关于四元凯勒空间的完备性定理的更多结果，包括一般 c -映射空间的变形，请参见 [83, 84]。

- **有限体积**

一个同样重要的沼泽地约束是模空间体积的有限性。事实上，基于 (4.6) 的特殊卡勒流形是完备的，但由于它不是赫尔米特对称空间，不存在可以商以这样的离散子群使得所得流形具有有限体积 [66]。这意味着 (4.6) 属于沼泽地，因此其在 c -映射图像中的 QK 伙伴也是如此。事实上，有一个直接针对 QK 流形证明的定理，指出齐次 QK 仅当它是对称时才允许具有有限体积的商 [85]。

这些空间属于弦理论背景的一种途径是存在量子修正。这些可以是对预势的世界面瞬子修正（我们知道在椭圆纤维 CY_3 的 IIA 型中就是这样），或者是如前所述的 QK 度量的微扰和非微扰修正。

非常近期，出现了一篇有趣的论文 [86]，讨论了在 IIB [18, 69, 87] 上紧化 CY_3 时， $D(-1)$ - $D1$ 瞬子校正超多重模空间体积的有限性。这个模空间具有精确的 $SL(2, \mathbb{Z})$ 对称性，当商掉这个对称性后，可以证明其具有有限体积 [86]。然而，得到的 QK-空间并不如预期那样完整，因为它不包含所有的瞬子校正，例如来自绕过 CY_3 的欧几里得 NS 五膜的那些校正。显然，所有这些方面都需要进一步研究。

致谢

我感谢多年来在这个主题上工作的所有合作者，其中许多人在引言中被提及。此外，我还感谢 Sergei Alexandrov、Boris Pioline 和 Antoine Van Proeyen 对这份手稿的评论和反馈。我也感谢编辑 A. Ceresole 和 G. Dall’Agata 邀请我撰写这一章。

参考文献

- [1] N. Seiberg and E. Witten, *Gauge dynamics and compactification to three-dimensions*, in *Conference on the Mathematical Beauty of Physics (In Memory of C. Itzykson)*, pp. 333–366, 6, 1996. [hep-th/9607163](#).
- [2] N. Dorey, V. V. Khoze, M. P. Mattis, D. Tong and S. Vandoren, *Instantons, three-dimensional gauge theory, and the Atiyah-Hitchin manifold*, *Nucl. Phys. B* **502** (1997) 59–93 [[hep-th/9703228](#)].
- [3] M. F. Atiyah and N. J. Hitchin, *THE GEOMETRY AND DYNAMICS OF MAGNETIC MONOPOLES. M.B. PORTER LECTURES*. 1988.
- [4] J. De Jaegher, B. de Wit, B. Kleijn and S. Vandoren, *Special geometry in hypermultiplets*, *Nucl. Phys. B* **514** (1998) 553–582 [[hep-th/9707262](#)].
- [5] B. de Wit, B. Kleijn and S. Vandoren, *Special geometry and compactification on a circle*, *Fortsch. Phys.* **47** (1999) 317–323 [[hep-th/9801039](#)].
- [6] S. Cecotti, S. Ferrara and L. Girardello, *Geometry of Type II Superstrings and the Moduli of Superconformal Field Theories*, *Int. J. Mod. Phys. A* **4** (1989) 2475.
- [7] A. Strominger, *SPECIAL GEOMETRY*, *Commun. Math. Phys.* **133** (1990) 163–180.
- [8] L. Castellani, R. D’Auria and S. Ferrara, *Special geometry without special coordinates*, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 1767–1790.
- [9] B. de Wit, P. G. Lauwers and A. Van Proeyen, *Lagrangians of N=2 Supergravity - Matter Systems*, *Nucl. Phys. B* **255** (1985) 569–608.
- [10] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, *Five-branes, membranes and nonperturbative string theory*, *Nucl. Phys. B* **456** (1995) 130–152 [[hep-th/9507158](#)].
- [11] I. Antoniadis, R. Minasian, S. Theisen and P. Vanhove, *String loop corrections to the universal hypermultiplet*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 5079–5102 [[hep-th/0307268](#)].
- [12] B. de Wit, B. Kleijn and S. Vandoren, *Superconformal hypermultiplets*, *Nucl. Phys. B* **568** (2000) 475–502 [[hep-th/9909228](#)].
- [13] B. de Wit, M. Rocek and S. Vandoren, *Hypermultiplets, hyperKahler cones and quaternion Kahler geometry*, *JHEP* **02** (2001) 039 [[hep-th/0101161](#)].

- [14] B. de Wit, M. Rocek and S. Vandoren, *Gauging isometries on hyperKähler cones and quaternion Kähler manifolds*, *Phys. Lett. B* **511** (2001) 302–310 [[hep-th/0104215](#)].
- [15] L. Anguelova, M. Rocek and S. Vandoren, *Quantum corrections to the universal hypermultiplet and superspace*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 066001 [[hep-th/0402132](#)].
- [16] M. Rocek, C. Vafa and S. Vandoren, *Hypermultiplets and topological strings*, *JHEP* **02** (2006) 062 [[hep-th/0512206](#)].
- [17] D. Robles-Llana, F. Saueressig and S. Vandoren, *String loop corrected hypermultiplet moduli spaces*, *JHEP* **03** (2006) 081 [[hep-th/0602164](#)].
- [18] D. Robles-Llana, M. Rocek, F. Saueressig, U. Theis and S. Vandoren, *Nonperturbative corrections to 4D string theory effective actions from $SL(2, \mathbb{Z})$ duality and supersymmetry*, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 211602 [[hep-th/0612027](#)].
- [19] D. Robles-Llana, F. Saueressig, U. Theis and S. Vandoren, *Membrane instantons from mirror symmetry*, *Commun. Num. Theor. Phys.* **1** (2007) 681–711 [[0707.0838](#)].
- [20] S. Alexandrov, B. Pioline, F. Saueressig and S. Vandoren, *D-instantons and twistors*, *JHEP* **03** (2009) 044 [[0812.4219](#)].
- [21] S. Alexandrov, B. Pioline and S. Vandoren, *Self-dual Einstein Spaces, Heavenly Metrics and Twistors*, *J. Math. Phys.* **51** (2010) 073510 [[0912.3406](#)].
- [22] S. Alexandrov, B. Pioline, F. Saueressig and S. Vandoren, *Linear perturbations of quaternionic metrics*, *Commun. Math. Phys.* **296** (2010) 353–403 [[0810.1675](#)].
- [23] J. Bagger and E. Witten, *Matter Couplings in $N=2$ Supergravity*, *Nucl. Phys. B* **222** (1983) 1–10.
- [24] C. K. Zachos, *$N = 2$ Supergravity Theory With a Gauged Central Charge*, *Phys. Lett. B* **76** (1978) 329–332.
- [25] P. Breitenlohner and M. F. Sohnius, *Matter Coupling and Nonlinear σ Models in $N = 2$ Supergravity*, *Nucl. Phys. B* **187** (1981) 409–428.
- [26] S. Alexandrov, *Twistor Approach to String Compactifications: a Review*, *Phys. Rept.* **522** (2013) 1–57 [[1111.2892](#)].
- [27] S. Alexandrov, J. Manschot, D. Persson and B. Pioline, *Quantum hypermultiplet moduli spaces in $N=2$ string vacua: a review*, *Proc. Symp. Pure Math.* **90** (2015) 181–212 [[1304.0766](#)].
- [28] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D’Auria, S. Ferrara *et. al.*, *$N=2$ supergravity and $N=2$ superYang-Mills theory on general scalar manifolds: Symplectic covariance, gaugings and the momentum map*, *J. Geom. Phys.* **23** (1997) 111–189 [[hep-th/9605032](#)].
- [29] M. Trigiante, *Gauged Supergravities*, *Phys. Rept.* **680** (2017) 1–175 [[1609.09745](#)].

- [30] E. Lauria and A. Van Proeyen, *$\mathcal{N} = 2$ Supergravity in $D = 4, 5, 6$ Dimensions*, vol. 966. 3, 2020.
- [31] S. Salamon, *Quaternion-Kähler Geometry, Surveys in Differential Geometry* **6** (2001) 83–121.
- [32] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds, Invent Math* **67** (1982) 143–171.
- [33] A. Wolf, *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J. Math. Mech* **14** (1965) 1033.
- [34] D. Alekseevski, *Riemannian spaces with exceptional holonomy groups, Funct. Anal. Appl.* **2** (1968) 11.
- [35] C. LeBrun and S. Salamon, *Strong rigidity of positive quaternion kähler manifolds, Inventiones mathematicae* **118** (1994), no. 1 109–132.
- [36] C. LeBrun, *On complete quaternionic-kähler manifolds, Duke Mathematical Journal* **63** (3) (1991) 723–743.
- [37] D. V. Alekseevsky, *Classification of quaternionic spaces with a transitive solvable group of motions, Math. USSR-Izv* **9** (1975) 297–339.
- [38] S. Cecotti, *Homogeneous Kahler Manifolds and T Algebras in $N = 2$ Supergravity and Superstrings, Commun. Math. Phys.* **124** (1989) 23–55.
- [39] B. de Wit and A. Van Proeyen, *Special geometry, cubic polynomials and homogeneous quaternionic spaces, Commun. Math. Phys.* **149** (1992) 307–334 [[hep-th/9112027](#)].
- [40] B. de Wit, F. Vanderseypen and A. Van Proeyen, *Symmetry structure of special geometries, Nucl.Phys. B* **400** (1993) 463–524 [[hep-th/9210068](#)].
- [41] H. Nishino and E. Sezgin, *Matter and Gauge Couplings of $N=2$ Supergravity in Six-Dimensions, Phys. Lett. B* **144** (1984) 187–192.
- [42] H. Nishino and E. Sezgin, *The Complete $N = 2, d = 6$ Supergravity With Matter and Yang-Mills Couplings, Nucl. Phys. B* **278** (1986) 353–379.
- [43] B. de Wit, A. K. Tollsten and H. Nicolai, *Locally supersymmetric $D = 3$ nonlinear sigma models, Nucl. Phys. B* **392** (1993) 3–38 [[hep-th/9208074](#)].
- [44] C. Cadavid, A. Ceresole, R. D’Auria and S. Ferrara, *Eleven-dimensional supergravity compactified on Calabi-Yau threefolds, Phys.Lett. B* **357** (1995) 76–80 [[hep-th/9506144](#)].
- [45] M. Bodner, A. C. Cadavid and S. Ferrara, *(2,2) vacuum configurations for type IIA superstrings: $N=2$ supergravity Lagrangians and algebraic geometry, Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 789–808.
- [46] M. Bodner and A. C. Cadavid, *Dimensional Reduction of Type Iib Supergravity and Exceptional Quaternionic Manifolds, Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 829.

- [47] R. Bohm, H. Gunther, C. Herrmann and J. Louis, *Compactification of type IIB string theory on Calabi-Yau threefolds*, *Nucl. Phys. B* **569** (2000) 229–246 [[hep-th/9908007](#)].
- [48] S. Ferrara and S. Sabharwal, *Quaternionic Manifolds for Type II Superstring Vacua of Calabi-Yau Spaces*, *Nucl. Phys. B* **332** (1990) 317–332.
- [49] M. Gunaydin, G. Sierra and P. K. Townsend, *The Geometry of $N=2$ Maxwell-Einstein Supergravity and Jordan Algebras*, *Nucl. Phys. B* **242** (1984) 244–268.
- [50] M. Gunaydin, G. Sierra and P. K. Townsend, *Exceptional Supergravity Theories and the MAGIC Square*, *Phys. Lett. B* **133** (1983) 72–76.
- [51] D. R. Morrison and C. Vafa, *Compactifications of F theory on Calabi-Yau threefolds. 1*, *Nucl. Phys. B* **473** (1996) 74–92 [[hep-th/9602114](#)].
- [52] P. S. Aspinwall, *$K3$ surfaces and string duality*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96): Fields, Strings, and Duality*, pp. 421–540, 11, 1996. [hep-th/9611137](#).
- [53] P. S. Aspinwall, *Aspects of the hypermultiplet moduli space in string duality*, *JHEP* **04** (1998) 019 [[hep-th/9802194](#)].
- [54] N. Halmagyi, I. V. Melnikov and S. Sethi, *Instantons, hypermultiplets and the heterotic string*, *JHEP* **07** (2007) 086 [[0704.3308](#)].
- [55] J. Louis and R. Valandro, *Heterotic-Type II Duality in the Hypermultiplet Sector*, *JHEP* **05** (2012) 016 [[1112.3566](#)].
- [56] S. Alexandrov and B. Pioline, *Heterotic-type II duality in twistor space*, *JHEP* **03** (2013) 085 [[1210.3037](#)].
- [57] S. Alexandrov, J. Louis, B. Pioline and R. Valandro, *$\mathcal{N} = 2$ Heterotic-Type II duality and bundle moduli*, *JHEP* **08** (2014) 092 [[1405.4792](#)].
- [58] G. Gkountoumis, C. Hull, K. Stemerding and S. Vandoren, *Freely acting orbifolds of type IIB string theory on T^5* , *JHEP* **08** (2023) 089 [[2302.09112](#)].
- [59] G. Gkountoumis, C. Hull and S. Vandoren, *Exact moduli spaces for $\mathcal{N} = 2$, $D = 5$ freely acting orbifolds*, *JHEP* **07** (2024) 126 [[2403.05650](#)].
- [60] Z. K. Baykara, Y. Hamada, H.-C. Tarazi and C. Vafa, *On the String Landscape Without Hypermultiplets*, [2309.15152](#).
- [61] Z. K. Baykara, H.-C. Tarazi and C. Vafa, *The Quasicrystalline String Landscape*, [2406.00129](#).
- [62] Y. Dolivet, B. Julia and C. Kounnas, *Magic $N=2$ supergravities from hyper-free superstrings*, *JHEP* **02** (2008) 097 [[0712.2867](#)].
- [63] C. Vafa, *The String landscape and the swampland*, [hep-th/0509212](#).

- [64] H. Ooguri and C. Vafa, *On the Geometry of the String Landscape and the Swampland*, *Nucl. Phys. B* **766** (2007) 21–33 [[hep-th/0605264](#)].
- [65] H.-Y. Chang, E. Sezgin and Y. Tanii, *Higher derivative couplings of hypermultiplets*, *JHEP* **06** (2023) 172 [[2304.06073](#)].
- [66] S. Cecotti, *Special Geometry and the Swampland*, *JHEP* **09** (2020) 147 [[2004.06929](#)].
- [67] S. Alexandrov, *Quantum covariant c-map*, *JHEP* **05** (2007) 094 [[hep-th/0702203](#)].
- [68] M. Davidse, F. Saueressig, U. Theis and S. Vandoren, *Membrane instantons and de Sitter vacua*, *JHEP* **09** (2005) 065 [[hep-th/0506097](#)].
- [69] S. Alexandrov and F. Saueressig, *Quantum mirror symmetry and twistors*, *JHEP* **09** (2009) 108 [[0906.3743](#)].
- [70] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, M. Dyckmanns and T. Mohaupt, *Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds*, *J. Geom. Phys.* **92** (2015) 271–287 [[1305.3549](#)].
- [71] S. Alexandrov and S. Banerjee, *Fivebrane instantons in Calabi-Yau compactifications*, *Phys. Rev. D* **90** (2014), no. 4 041902 [[1403.1265](#)].
- [72] S. Alexandrov and S. Banerjee, *Dualities and fivebrane instantons*, *JHEP* **11** (2014) 040 [[1405.0291](#)].
- [73] S. Alexandrov and S. Banerjee, *Hypermultiplet metric and D-instantons*, *JHEP* **02** (2015) 176 [[1412.8182](#)].
- [74] S. Alexandrov, S. Banerjee, J. Manschot and B. Pioline, *Multiple D3-instantons and mock modular forms I*, *Commun. Math. Phys.* **353** (2017), no. 1 379–411 [[1605.05945](#)].
- [75] S. Alexandrov, S. Banerjee, J. Manschot and B. Pioline, *Multiple D3-instantons and mock modular forms II*, *Commun. Math. Phys.* **359** (2018), no. 1 297–346 [[1702.05497](#)].
- [76] S. Alexandrov, A. Sen and B. Stefański, *Euclidean D-branes in type IIB string theory on Calabi-Yau threefolds*, *JHEP* **12** (2021) 044 [[2110.06949](#)].
- [77] S. Alexandrov, A. Sen and B. Stefański, *D-instantons in Type IIA string theory on Calabi-Yau threefolds*, *JHEP* **11** (2021) 018 [[2108.04265](#)].
- [78] S. Alexandrov and K. Bendriss, *Hypermultiplet metric and NS5-instantons*, [2309.14440](#).
- [79] A. Swann, *Hyper kähler and quaternionic kähler geometry.*, *Mathematische Annalen* **289** (1991), no. 3 421–450.
- [80] K. Galicki, *Geometry of the scalar couplings in n=2 supergravity models*, *Classical and Quantum Gravity* **9** (jan, 1992) 27.

- [81] V. Cortes, T. Mohaupt and H. Xu, *Completeness in supergravity constructions*, *Commun. Math. Phys.* **311** (2012) 191–213 [[1101.5103](#)].
- [82] V. Cortes, M. Dyckmanns and D. Lindemann, *Classification of complete projective special real surfaces*, *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), no. 2 423–445 [[1302.4570](#)].
- [83] V. Cortés, M. Dyckmanns and S. Suhr, *Completeness of projective special Kähler and quaternionic Kähler manifolds*, [1607.07232](#).
- [84] V. Cortés, M. Dyckmanns, M. Jüngling and D. Lindemann, *A class of cubic hypersurfaces and quaternionic Kähler manifolds of co-homogeneity one*, *Asian J. Math.* **25** (2021), no. 1 1–30 [[1701.07882](#)].
- [85] D. Alekseevski and V. Cortes, *Isometry groups of homogeneous quaternionic Kähler manifolds*, *The Journal of Geometric Analysis* **9** (1999) 513.
- [86] V. Cortés and I. Tulli, *S-Duality and the Universal Isometries of Instanton Corrected q-Map Spaces*, *Commun. Math. Phys.* **405** (2024), no. 3 68 [[2306.01463](#)].
- [87] S. Alexandrov and B. Pioline, *S-duality in Twistor Space*, *JHEP* **08** (2012) 112 [[1206.1341](#)].