

接力同步与具有单向层间耦合的多层网络中动力学的控制

Aiwin T Vadakkan^{a,*}, G. Ambika^{b,**}

^aIndian Institute of Science Education and Research Tirupati Tirupati-517 619 India

^bIndian Institute of Science Education and Research Thiruvananthapuram Thiruvananthapuram-695 551 India

Abstract

多层网络为理解具有不同类型相互作用的复杂系统动力学提供了适当的框架。本研究考虑了一个由非线性振荡器组成的多层网络中可能存在的不同动态状态，其中包含一个驱动层和两个相同的响应层，并且层间的相互作用是单向的。我们报告了耦合的方向性如何通过中间驱动层的反馈在两个响应层中导致具有放大的继电器同步。响应层同步振荡的幅度可以通过调整层间耦合强度来控制。此外，我们发现出现在响应层中的同步模式取决于层间耦合的性质（是反馈还是扩散）以及驱动层和响应层之间的时间尺度或参数不匹配。因此，该研究表明通过调整层间耦合强度或调节驱动层的动力学时间尺度，有可能远程控制和优化响应层的动力学。

Keywords: 多层网络, 继电器同步, 单向耦合, 时间尺度不匹配

1. 介绍

几个真实世界复杂系统的涌现动态，可以通过复杂网络的框架有效建模。当子系统在动态或交互性质上不相同，我们可以使用多层网络来模拟它们，以便不同的层可以处理这些差异 [1]。多路复用网络是多层网络的一种特殊情况，其中所有层具有相同数量的节点，并且每层的 i^{th} 节点仅与其他层的 i^{th} 节点相连 [2]。该框架对于研究不同类型涌现动力学 [3, 4, 5, 6, 7, 6, 8] 的研究是有益的，例如在神经系统不同组织层次 [9]、具有不同交互的社会互动网络 [10] 以及连接负载不同的电力网格网络 [11] 等。此外，这可以为系统增加一层额外的可控性，使得我们可以通过调整其他层的参数来实现某一层的目标状态 [12]。

在复杂系统中可能的动力学状态里，同步是最相关且研究最充分的集体现象之一，因其具有理论、生物和科技上的重要意义。因此，在单层网络和多层网络中，通过多种方式实现了同步 [13, 14, 15, 16]，并报告了各种同步行为，如频率、同相和反相 [17]、完全、聚类 [18, 19]、爆炸性 [20, 21, 22, 23, 24]、层内 [25, 26] 和层间同步 [27, 28, 29]。此外，最近的研究已经超越了成

对的相互作用，关注多层网络中的高阶相互作用，这些相互作用可以有效地处理现实世界的情境，例如社交网络或神经元网络，在这些情境中，互动发生在三个或更多系统之间的群体内同时发生。在此背景下，少数研究探讨了高阶相互作用对多层网络中同步的影响 [30, 31]。

除了这些，最近报道的一种现象是多层网络中的中继同步概念，在这种情况下，两个不直接相连的远端网络可以通过一个作为中继的中间网络实现彼此之间的同步 [32, 33, 34, 35]。在这一背景下的一个具体应用是人脑网络，其中丘脑通过丘脑皮质通路在远端皮质区域之间充当中继 [36, 37, 38, 39, 40, 41]。最近的研究人员已经研究了网络拓扑 [42]、边权重 [43]、层内耦合 [44] 甚至排斥性耦合 [45] 在实现中继同步中的影响。此外，还出现了混合体的中继同步现象，在这种情况下，第一层的相干域与第三层的相应域实现了同步 [46]。在一个特定的背景下，当远端层具有正耦合而中继层具有排斥耦合时，中继同步会得到改善 [45]。

大多数关于中继同步的研究报道都集中在层内和层间双向耦合上。因此，层间链接的方向性在中继同步中的影响研究得较少。事实上，有许多复杂的现实系统，如大脑，其组成部分网络具有单向连接并能正常工作。我们注意到，在具有单向层间连接的两层神经网络中出现了非平稳和不完美 chimera 状态等有趣模式 [47]。

我们还注意到，大多数现实世界的复杂系统都包含

*Currently at University of Naples Federico II, Naples, Italy

**Corresponding Author

Email address: g.ambika@iisertvm.ac.in

在非相同时间尺度下演化的组成部分 [48]。在这种情况下，多层网络的框架将是一种有效的建模方法，其中相互作用的单元根据它们的时间尺度被分离成多个层次。一些具有多种时间尺度的真实世界场景包括时态神经动力学 [49, 50]、化学反应 [51]、激素调节 [52] 和种群动态 [53]。最近的研究表明，各层之间的时间尺度不匹配可以产生诸如振幅死亡 [54]、聚类同步 [55] 和频率同步 [56] 以及同步振荡的恢复 [12] 等动力学状态。

在本研究中，我们探讨了单向耦合在实现三层多层网络中的继电器同步中的作用。在这个框架下，中间层 (L2) 作为驱动层与另外两层 L1 和 L3 之间存在单向的层间耦合。使用节点上具有周期极限环动力学的 Stuart Landau 振荡器，我们研究了系统中继电器同步的发生。当层间耦合为反馈类型时，我们发现驱动层 L2 在 L1 和 L3 中诱导出放大振荡和与驱动层同相的继电器同步。我们展示了如何通过调整层间耦合强度或调节驱动层和响应层之间的动力学时间尺度失配来控制响应层中的振荡幅度。当层间耦合为扩散类型时，驱动层 L2 在该网络的所有三层中诱导出完全同步。各层之间的时间尺度失配也可以被调制以控制响应层上的动态特性，从而产生诸如准周期状态之类的有趣模式。

2. 三层多路网络中具有单向层间耦合的继电器同步

我们从一个三层的斯图尔特-兰道 (SL) 振荡器多层网络开始，该网络具有环形拓扑结构，其中每一层都有双向的层内扩散耦合。第一层 (L1) 和第三层 (L3) 中的 N 振荡器通过反馈型的层间耦合与第二层 (L2) 中对应的振荡器连接起来，从而形成一个多层网络。层间耦合是单向的，表明 L1 和 L3 从 L2 通过 x 和 y 变量接收反馈，而没有任何输入反馈给 L2，如图 1 所示。

如下所示的是这样一个三层多层网络的动力学方

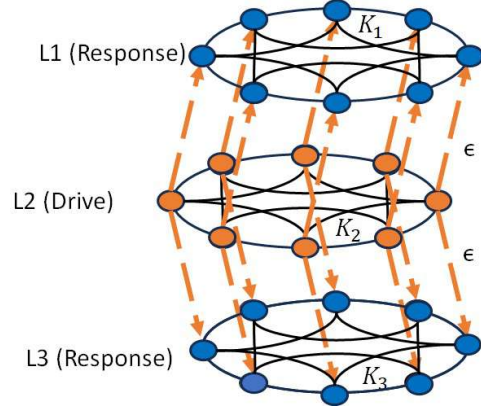


图 1: 一个具有从 L2 (驱动层) 到 L1 和 L3 (响应层) 单向耦合的三层多层网络示意图。 ϵ 是驱动层与响应层之间单向层间耦合的强度。 K_1 、 K_2 和 K_3 分别是 L1、L2 和 L3 的层内耦合强度。

程。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i1} &= (1 - x_{i1}^2 - y_{i1}^2)x_{i1} - \omega y_{i1} + \frac{K_1}{2P_1} \sum_{j=i-P_1}^{i+P_1} (x_{j1} - x_{i1}) + \epsilon x_{i2} \\
 \dot{y}_{i1} &= (1 - x_{i1}^2 - y_{i1}^2)y_{i1} + \omega x_{i1} + \epsilon y_{i2} \\
 \dot{x}_{i2} &= \tau \left[(1 - x_{i2}^2 - y_{i2}^2)x_{i2} - \omega y_{i2} + \frac{K_2}{2P_2} \sum_{j=i-P_2}^{i+P_2} (x_{j2} - x_{i2}) \right] \\
 \dot{y}_{i2} &= \tau \left[(1 - x_{i2}^2 - y_{i2}^2)y_{i2} + \omega x_{i2} \right] \\
 \dot{x}_{i3} &= (1 - x_{i3}^2 - y_{i3}^2)x_{i3} - \omega y_{i3} + \frac{K_3}{2P_3} \sum_{j=i-P_3}^{i+P_3} (x_{j3} - x_{i3}) + \epsilon x_{i2} \\
 \dot{y}_{i3} &= (1 - x_{i3}^2 - y_{i3}^2)y_{i3} + \omega x_{i3} + \epsilon y_{i2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中变量 x_i 和 y_i 定义了所有三层中 SL 振荡器的动力学， $i = 1, 2, \dots, N$ ，并且 ω 是它们极限环振荡的固有频率。层内耦合强度 K_1 (K_3) 和耦合范围 P_1 (P_3) 控制响应层 L1 (L3) 中的 SL 振荡器之间的相互作用，而 K_2 和 P_2 控制驱动层 (L2) 中的相互作用。在此场景中， P 表示每个方向上耦合的范围，其中 $P \in \{1, \frac{N}{2}\}$ ， $P = 1$ 为局部连接， $P = \frac{N}{2}$ 为全局耦合，而非局部耦合时 P 是 $1 < P < \frac{N}{2}$ 。

驱动到响应的单向反馈耦合控制着层间相互作用，

不失一般性，我们取它们的强度等于 ϵ 。我们也引入了一个参数 τ ，它可以决定驱动层和响应层之间的动力学时间尺度不匹配，这样通过选择一个 $\tau > 1$ 的值可以使响应层 L1 和 L3 在比驱动层 L2 更慢的时间尺度上演化。

最初，我们保留 $\tau = 1$ ，使得三层在相同的时间尺度下演化。固有动力学对于每层都有 $\omega = 2$ 和 $N = 100$ 系统。我们考虑所有三层中非局部耦合的一个典型情况，即 $P1 = P2 = P3 = 25$ 。我们将驱动网络的层内耦合强度设置为 $K2 = 5$ ，使其达到完全同步。首先，我们尝试 $K1 = K3 = 0$ 的情况，使得响应层 L1 和 L3 在没有来自 L2 的驱动时不存在层内同步对于 $\epsilon = 0$ 。方程系统在 Eq. (1) 中对于 $(-1, 1)$ 区间内的随机初始条件进行了 10^5 次迭代，在去除暂态后，集成输出用于检查三层网络上的同步性和涌现动力学的性质。

当我们增加驱动层和响应层之间的层间耦合强度 (ϵ) 时，响应层实现了层内和层间的同步，相对于驱动信号有所放大。为了检测层内同步的开始，我们将每个层中所有节点对应的同步误差定义为

$$S_{intra} = \left\langle \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_{ij} - \bar{x}_j)^2]} \right\rangle \quad (2)$$

其中， $\langle \cdot \rangle$ 表示时间上的平均值， x_{ij} 表示 j^{th} 层中 i^{th} 节点的 x 变量，而 $\bar{x}_j$ 是 j^{th} 层中 x_i 的平均值。层间同步误差定义为不同层中的节点之间的误差。

$$S_{inter} = \left\langle \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_{ij} - x_{ik})^2]} \right\rangle \quad (3)$$

其中 x_{ik} 表示第 k^{th} 层中 i^{th} 节点的 x 变量，其中 k 的取值为 1, 2 或 3，不包括 j 。

对于完全的层内同步， $S_{intra} = 0$ ，而对于完全的层间同步， $S_{inter} = 0$ 。我们在图 2(a1) 中绘制了随着 ϵ 变化的测量值 S_{intra} 。对于所选的参数值，驱动层 L2 具有完全的层内振荡（蓝色）。很明显，当 ϵ 增加时，响应层（L1 为红色，L3 为绿色）的层内同步误差降至零，这表明它们开始同步。

为了检查层间同步，我们保持 $K1 = K3 = 5$ ，使得响应层最初具有层内同步。图 2(a2) 展示了随着 ϵ 增加的层间同步误差的变化。这里，L1 和 L2 之间的同步误差用红色表示，L2 和 L3 之间用绿色表示，L3 和 L1 之间用蓝色表示。很明显，随着 ϵ 的增加，两个响应层彼

此实现同步，达到了如图 2(a2) 所示的继电器同步。此外，驱动和响应之间的同步误差首先减小然后随着 ϵ 逐渐增加，这是由于定向耦合引起的放大效应所致。

现在我们研究定向耦合在放大响应层中的振荡中的作用。我们定义一个平均振幅度量（相对于驱动而言）为 $A(\epsilon) = \frac{a(\epsilon)}{a(0)}$ 其中

$$a(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\langle x_{i,max} \rangle_t - \langle x_{i,min} \rangle_t] \quad (4)$$

并且 $a(0)$ 是驱动层的度量。图 3(a1) 展示了每层中随着 ϵ 增加的 $A(\epsilon)$ 的计算值。我们注意到，随着层间耦合强度 (ϵ) 增加，响应层（绿色）中的振荡幅度增大，而驱动层（蓝色）的幅度保持不变。我们还计算了在不同 ϵ 值下驱动层和响应层之间振荡的平均相位差 $\Delta\theta$ 。如图 3 (a2) 所示，当 ϵ 增加时， $\Delta\theta$ 减少到零，表明驱动层和响应层之间开始出现相位同步。

我们对层间耦合为扩散型的情况重复上述分析。在这种情况下，在方程 1 中，我们将反馈耦合项 $\epsilon(x_{i2})$ 分别替换为 $\epsilon(x_{i2} - x_{ik})$ 和 $\epsilon(y_{i2})$ 替换为 $\epsilon(y_{i2} - y_{ik})$ 对应于 x 和 y 变量，其中 $k = 1 \& 3$ 。在这种情况下，通过调整 ϵ ，两个响应层都与驱动同步，从而在整个多层网络中实现完全同步。

3. 调整各层之间动力学时间尺度的影响

在本节中，我们展示了驱动层和响应层之间动力学时间尺度不匹配的影响。为此，我们在方程 1 中增加参数 τ 的值，在各层之间引入了时间尺度差异，并研究这种变化对响应层动力学的影响。我们观察到，通过增大 τ 的值可以控制响应层中的振荡幅度，甚至可以使它与驱动层相同。随着 τ 值的进一步增加，响应层的动力学会发生变化，出现准周期振荡，并且只有频率同步存在于响应层之间。我们在图 4 中用选定的 ϵ 和 τ 值说明了这一情况。

对于 $\epsilon = 3$ 和 $\tau = 1$ ，在图 4(a1) 中，我们看到响应层彼此完美同步，表明了继电器同步，并且与驱动层相位同步。图 4(b1) 中的三层相图清楚地显示了响应层振荡的放大。当驱动层在更快的时间尺度上演化时，使用 $\tau = 2.5$ ，我们观察到响应层和驱动层的振幅相等，但频率同步且之间存在恒定的相位差，如图 4(a2) 所示。这从图 4(b2) 中三个层次的相图重叠可以清楚看出。随着 τ 的进一步增加，在响应层观察到多个频率，振荡本质

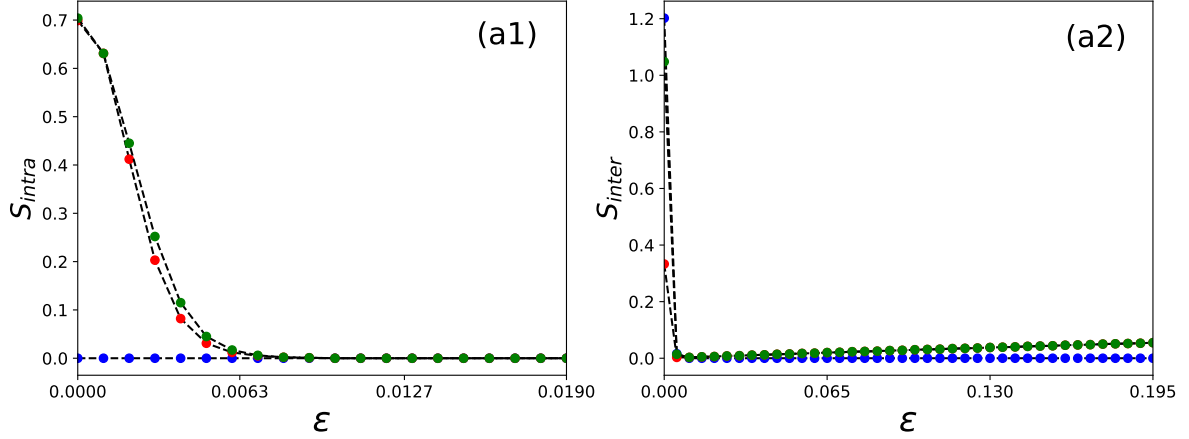


图 2: 层内和层间同步误差与三层多路网络中 100 个 SL 振子的层间耦合强度 ϵ 的关系, 其中层间耦合是单向的。(a1): 对于选定的参数值 $K1 = K3 = 0, K2 = 5, P1 = P2 = P3 = 25, \omega = 2, \tau = 1$, 驱动层具有 $S_{intra} = 0$, 表明其处于层内同步状态 (蓝色), 而响应层则不与 $S_{intra} \neq 0$ 层内同步 (红色和绿色) 对于 $\epsilon = 0$ 。随着层间耦合的增加 (ϵ), 当响应层达到层内同步时, S_{intra} 趋于零。(a2): 对于参数值 $K1 = K2 = K3 = 5, P1 = P2 = P3 = 25, \omega = 2$ 和 $\tau = 1$, 所有三层都达到了层内同步, 但对于 $\epsilon = 0$ 没有达到层间同步。随着 ϵ 的增加, 响应层 (蓝色) 之间的 S_{inter} 趋于零, 表明继电器同步的开始。然而, 驱动层和响应层 (红色和绿色) 之间的 S_{inter} 首先减少然后随 ϵ 增加。这是由于驱动层单向反馈耦合导致响应层振荡放大所致。

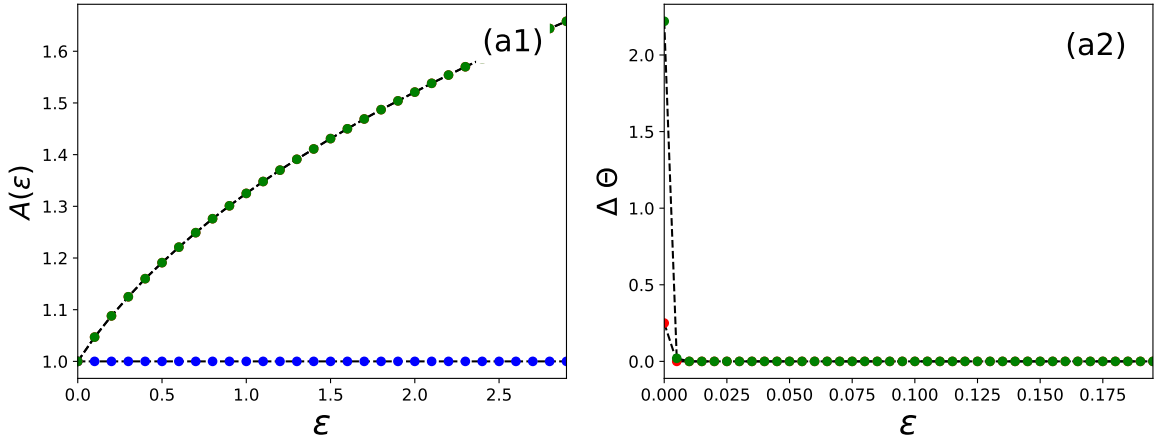


图 3: (a1): 平均幅度测量, $A(\epsilon)$ 与多层网络中单向耦合的 SL 振荡器三层之间的层间耦合强度 ϵ 的关系。我们注意到响应层 L1 和 L3 (绿色) 的幅度相等, 并随 ϵ 值的增加而增大, 而驱动层 L2 (蓝色) 的幅度保持不变。这表明可以通过调节 ϵ 来实现带有放大的继电器同步。(a2): 当 ϵ 增加时, 各层 L1 和 L2 之间的平均相位差 (红色) 以及 L2 和 L3 之间的平均相位差 (绿色)。相位差减小至零, 表明即使响应中有放大, 驱动层与响应层之间也实现了相位同步。其他参数值保持为 $K1 = K2 = K3 = 5, P1 = P2 = P3 = 25, \omega = 2, \tau = 1$ 和 $N = 100$ 。

上是拟周期的, 如图 4(a3, b3) 所示对于 $\tau = 4$ 。然后, 响应之间的继电器同步丢失, 并且它们彼此频率同步。

我们在参数平面 τ 与 ϵ 中通过图 5 表明了响应层中可能产生的动力学状态。我们将其他参数值保持为 $K1 = K2 = K3 = 5, P1 = P2 = P3 = 25, \omega = 2$ 和 $N = 100$, 并通过计算平均振幅来研究在改变 τ 和 ϵ 时动力学的性质。标记为 (i) 的区域表示相对于驱动, 响应层中存在放大的参数值。对于位于区域 (ii) 内的一系列参数值, 驱动和响应层中的振荡平均振幅相等。在区

域 (iii) 中, 响应的平均振幅小于驱动的平均振幅, 在区域 (iv) 中, 观察到响应层中的准周期状态。

L1 和 L3 的相对平均振幅 $A(\epsilon)$ 随 τ 的变化在图 6 中显示, 包括层间的反馈耦合和扩散耦合。对于方向性反馈耦合下的 $\epsilon = 3$ 情况, 当驱动层和响应层具有相同的时间尺度时, 响应的平均振幅大于驱动。引入响应层与驱动层之间的时间尺度差异 (即 $\tau > 1$ 和 $\tau < 1$) 后, 响应的平均振幅减小, 在 $\tau = 2.5$ 处变得相等。在扩散互层耦合的情况下, 当驱动层被加速 ($\tau > 1$) 或减速

($\tau < 1$) 时, 响应层显示出继电器同步以及频率同步, 并且平均振幅比驱动层低, 如图 6 (黑色) 所示。因此, 在这种情况下, 引入驱动和响应之间的动态时间尺度差异可以使系统从完全同步转变为继电器同步, 但响应层的振荡幅度较低。

除了层间的时间尺度不匹配之外, 我们还考虑了层间 SL 振荡器固有动力学参数 ω 的不匹配情况。因此, 将 $\omega_{drive} = 2$ 、 $\omega_{response} = 1.5$ 和其他参数保持为 $K1 = K2 = K3 = 5$ 、 $P1 = P2 = P3 = 25$ 、 $\tau = 1$ 、 $N = 100$ 和 $\epsilon = 3$, 对于反馈类型的层间耦合, 我们观察到响应层的放大继电器同步, 但它们仅与驱动部分具有频率同步, 不同于之前观察到相位同步的情况。当固定 $\epsilon = 3$ 时, 变化 τ , 类似于上述观察结果, 可以调节响应相对于驱动的振幅。然后, 在更高的 τ 值下会出现拟周期行为。在这种情况下, 如果层间耦合是扩散型的, 我们会观察到由于参数不匹配以及与驱动频率同步而导致的响应层的继电器同步, 而不是完全同步, 并且可以通过调节 τ 来控制响应层的振幅。

4. 结论

尽管继电器同步是复杂网络背景下一个活跃的研究领域, 迄今为止大多数已报道的研究都考虑了多层框架中的双向耦合。在本研究中, 我们探讨了一个三层多路复用网络中单向层间耦合的影响, 中间层 L2 作为驱动层, 远程层 L1 和 L3 作为响应层。我们分析了不同的耦合策略如何导致响应网络上继电器同步的发展。

多层网络中层间的相互作用使系统能够达到不同的动态状态。特定类型的层间耦合 (反馈或扩散) 决定了层之间的同步, 而时间尺度或参数不匹配的存在显著影响集体行为。这使得可以通过调整驱动层的参数来控制响应层的动力学。

当所有层次在相同的时间尺度和相同的系统中演化时, 驱动的单向反馈会导致响应层中的振荡放大以及与驱动同相的继电器同步。我们展示了可以通过调整层间耦合强度来控制这种放大。

通过使用不匹配参数 τ 在各层之间引入适当的时间尺度差异, 我们可以控制响应层中的振幅, 并且可以使它们在相位差的情况下与驱动的振幅相等。随着 τ 的进一步增加, 响应的振幅变得小于驱动, 最终导致响应层出现准周期行为。然而, 当准周期行为出现时, 继电器同步丧失, 仅在响应层之间保持频率同步。

在相同层之间存在单向扩散耦合的情况下, 我们获得了驱动与响应之间的同步, 从而导致整个网络的完全同步。当引入时间尺度失配时, 响应层的振荡幅度减小, 并与驱动层产生频率同步。

我们还研究了响应网络在响应与驱动层参数不匹配时的动力学。在这种情况下, 对于反馈和扩散层间耦合, 响应层彼此完全同步。在此背景下, 我们注意到已有少量研究报告了复杂网络的广义同步 [57, 58, 59]。本研究中使用多层网络框架可以用作辅助系统方法来探索不同层次之间复杂网络的广义同步, 其中一个网络驱动两个相似的网络并使其同步。

该研究可以进一步扩展到具有不同动力学和拓扑结构的多响应层, 这些层能够诱导出不同程度的同步动态和时空模式。未来研究的一些有前景的方向包括由多样化的动力单元组成的网络、不同的耦合机制 (包括高阶耦合)、耦合中的延迟、变化的网络拓扑结构, 以及在网络中引入自适应机制以提供关于网络如何自我调节以维持同步的见解。此类对当前研究的扩展可能需要更为复杂建模和分析技术。然而, 用来自真实世界系统 (如神经网络和智能电网) 的经验数据来验证这些研究的结果将是增值但具有挑战性的。

本研究提供了对具有单向层间相互作用的多层网络中集体行为的发生和控制的理理解。这可能导致通过调整驱动强度和驱动网络的参数来远程控制复杂网络上动力学达到期望状态的可能机制。这将在智能电网中的网络层次控制以及神经网络中远程同步建模方面有应用。

5. 数据可用性和软件包

研究中使用的所有数据都是通过整合多层网络动态方程系统生成的。计算是使用适应于上下文的 Python 代码完成的, 这些代码使用了如 matplotlib.pyplot、scipy.integrate 和 networkx 等公开可用的包。

References

- [1] M. Kivela, A. Arenas, M. Barthelemy, J. P. Gleeson, Y. Moreno, M. A. Porter, Multilayer networks, J. Complex. Netw. 2 (2014) 203–271.
- [2] Y. Wang, O. Zhao, L. Zhang, Multiplex networks in resilience modeling of critical infrastructure sys-

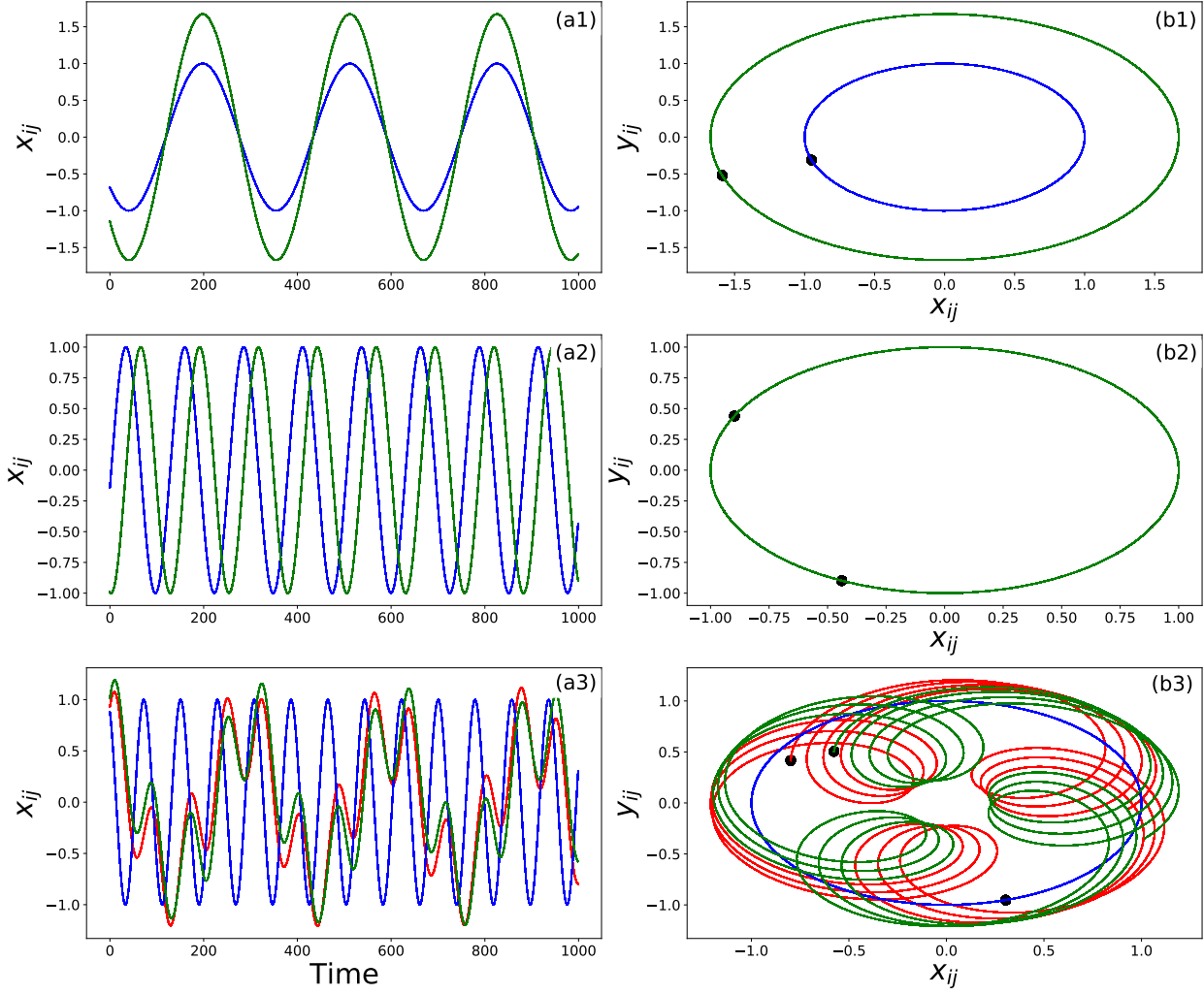


图 4: 变量 x_{ij} 的时间序列, 其索引为 $i \in [1, N]$ 和 $j \in [1, 2, 3]$, 以及三层多层网络中 SL 振荡器在单向层间耦合强度 $\epsilon = 3$ 下的相图, 在 x - y 平面内。轨迹上的黑点表示最后一个时间步的值。这些展示了响应层中诱导的不同动力学状态以及随着各层之间的时间尺度失配变化时层间的同步状态。(a1) 和 (b1): 响应层 (红色和绿色) 的中继同步并放大, 而与驱动层 (蓝色) 保持相位同步对于 $\tau = 1$, (a2) 和 (b2): 响应层与驱动层频率同步且振荡幅度相同, 并完全与其他响应层同步, 当 τ 增加到 2.5 时, (a3) 和 (b3): 对于 $\tau = 4$ 在响应层上诱导准周期行为, 在它们之间存在频率同步并与驱动层有功能关系。其他参数值为: $K1 = K2 = K3 = 5, P1 = P2 = P3 = 25, \omega = 2$ 和 $N = 100$ 。

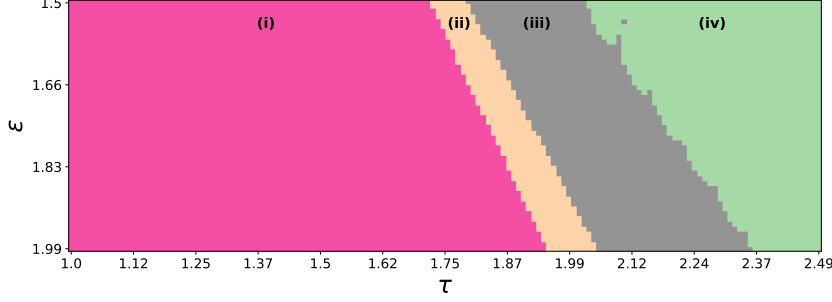


图 5: 参数平面为层间耦合强度 ϵ 与时间尺度失配 τ 的三重网络。不同动态行为区域如下所示: (i): 相对于驱动, 响应层上的振荡放大, (ii): 驱动和响应层中振幅相同的振荡, (iii): 相对于驱动, 在响应中的振幅较小的振荡, (iv): 响应层上的拟周期行为。其他参数值如图 4 所示。

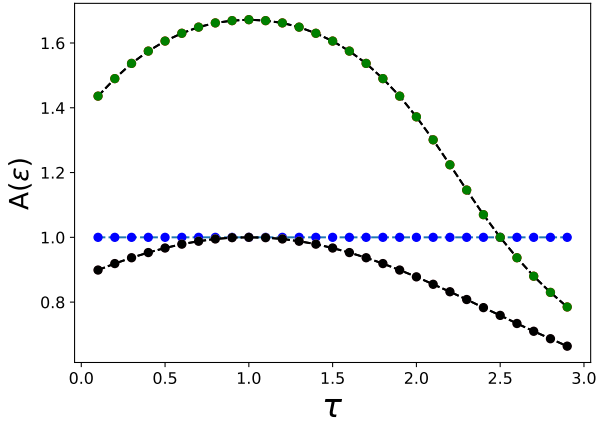


图 6: 平均幅度度量 $A(\epsilon)$ 随时间尺度失配 τ 的变化, 在固定 $\epsilon = 3$ 的三层次复网络中, 针对两种类型的层间耦合。此处, 蓝色曲线表示驱动层的平均幅度, 绿色 (黑色) 曲线则表示反馈 (扩散型) 单向耦合的同步响应层的平均幅度。其他参数值为: $K1 = K2 = K3 = 5$, $P1 = P2 = P3 = 25$, $\omega = 2$ 和 $N = 100$ 。对于反馈耦合, 可以实现放大, 而对于扩散型层间耦合, 振幅小于驱动的振幅, 除了 $\tau = 1$ 。在这两种情况下, 响应层中的振荡幅度可以通过调整 τ 来控制。

tems: A systematic review, Reliab. Eng. Syst. Saf. 250 (2024) 110300.

- [3] G. Saxena, A. Prasad, R. Ramaswamy, Amplitude death: The emergence of stationarity in coupled nonlinear systems, Phys. Rep. 521 (2012) 205–228.
- [4] S. Pranesh, S. Gupta, Explosive death transitions in complex networks of limit cycle and chaotic systems, Chaos Solit. Fractals. 168 (2023) 113112.
- [5] A. Koseska, E. Volkov, J. Kurths, Transition from amplitude to oscillation death via turing bifurcation, Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 024103.
- [6] A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll, Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks, Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 154101.
- [7] G. C. Sethia, A. Sen, Chimera states: The existence criteria revisited, Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 144101.
- [8] T. Banerjee, Mean-field-diffusion – induced

- chimera death state, *Europhys. Lett.* 110 (2015) 60003.
- [9] S. Y. Makovkin, I. V. Shkerin, S. Y. Gordleeva, M. V. Ivanchenko, Astrocyte-induced intermittent synchronization of neurons in a minimal network, *Chaos Solit. Fractals.* 138 (2020) 109951.
- [10] P. Deville, C. Song, N. Eagle, V. D. Blondel, A. L. Barabasi, D. Wang, Scaling identity connects human mobility and social interactions, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 113 (2016) 7047–7052.
- [11] G. A. Pagani, M. Aiello, The power grid as a complex network: A survey, *Physica A.* 392 (2013) 2688–2700.
- [12] A. T. Vadakkan, U. K. Verma, G. Ambika, Recovery of synchronized oscillations on multiplex networks by tuning dynamical time scales, *Phys. Lett. A.* 525 (2024) 129842.
- [13] P. Wang, G. Wen, X. Yu, W. Yu, T. Huang, Synchronization of multi-layer networks: From node-to-node synchronization to complete synchronization, *IEEE Trans. Circuits Syst. I Regul. Pap.* 66 (2019) 1141–1152.
- [14] I. Belykh, D. Carter, R. Jeter, Synchronization in multilayer networks: When good links go bad, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 18 (2019) 2267–2302.
- [15] S. Makovkin, T. Lapyeva, S. Jalan, M. Ivanchenko, Synchronization in multiplex models of neuron – glial systems: Small-world topology and inhibitory coupling, *Chaos.* 31 (2021) 113111.
- [16] M. S. Anwar, S. Rakshit, J. Kurths, D. Ghosh, Synchronization induced by layer mismatch in multiplex networks, *Entropy.* 25 (2023) 1083.
- [17] U. K. Verma, G. Ambika, Emergent dynamics and spatio temporal patterns on multiplex neuronal networks, *Front. Comput. Neurosci.* 15 (2021) 774969.
- [18] S. Jalan, A. Singh, Cluster synchronization in multiplex networks, *Europhys. Lett.* 113 (2016) 30002.
- [19] F. D. Rossa, L. Pecora, K. Blaha, A. Shirin, I. Klickstein, F. Sorrentino, Symmetries and cluster synchronization in multilayer networks, *Nat. Commun.* 11 (2020) 3179.
- [20] I. Leyva, I. Sendiña Nadal, J. A. Almendral, A. Navas, S. Olmi, S. Boccaletti, Explosive synchronization in weighted complex networks, *Phys. Rev. E.* 88 (2013) 042808.
- [21] A. Bayani, S. Jafari, H. Azarnoush, F. Nazarimehr, S. Boccaletti, M. Perc, Explosive synchronization dependence on initial conditions: The minimal kuramoto model, *Chaos Solit. Fractals.* 169 (2023) 113243.
- [22] X. Zhang, S. Boccaletti, S. Guan, Z. Liu, Explosive synchronization in adaptive and multilayer networks, *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015) 038701.
- [23] U. K. Verma, G. Ambika, Explosive synchronization in coupled nonlinear oscillators on multiplex network, *Phys. Lett. A.* 450 (2022) 128391.
- [24] A. Kumar, S. Jalan, A. D. Kachhvah, Interlayer adaptation-induced explosive synchronization in multiplex networks, *Phys. Rev. Res.* 2 (2020) 023259.
- [25] L. V. Gambuzza, M. Frasca, J. Gómez-Gardeñes, Intra-layer synchronization in multiplex networks, *Europhys. Lett.* 110 (2015) 20010.
- [26] S. Rakshit, B. K. Bera, E. M. Bollt, D. Ghosh, Intralayer synchronization in evolving multiplex hypernetworks: Analytical approach, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 19 (2020) 918–963.
- [27] R. Sevilla-Escoboza, I. Sendiña-Nadal, I. Leyva, R. Gutiérrez, J. M. Buldú, S. Boccaletti, Inter-layer synchronization in multiplex networks of identical layers, *Chaos.* 26 (2016) 065304.

- [28] I. Leyva, R. Sevilla-Escoboza, I. Sendiña-Nadal, R. Gutiérrez, J. Buldú, S. Boccaletti, Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks, *Sci. Rep.* 7 (2017) 45475.
- [29] E. Pitsik, V. Makarov, D. Kirsanov, N. Frolov, M. Goremyko, X. Li, Z. Wang, A. Hramov, S. Boccaletti, Inter-layer competition in adaptive multiplex network, *New J. Phys.* 20 (2018) 075004.
- [30] S. Majhi, S. Ghosh, P. K. Pal, S. Pal, T. K. Pal, D. Ghosh, J. Završnik, M. Perc, Patterns of neuronal synchrony in higher-order networks, *Phys. Life Rev.* 52 (2025) 144–170.
- [31] P. K. Pal, M. S. Anwar, M. c. v. Perc, D. Ghosh, Global synchronization in generalized multilayer higher-order networks, *Phys. Rev. Res.* 6 (2024) 033003.
- [32] P. V. Kuptsov, A. V. Kuptsova, Variety of regimes of starlike networks of hénon maps, *Phys. Rev. E.* 92 (2015) 042912.
- [33] A. Bergner, M. Frasca, G. Sciuto, A. Buscarino, E. J. Ngamga, L. Fortuna, J. Kurths, Remote synchronization in star networks, *Phys. Rev. E.* 85 (2012) 026208.
- [34] I. Fischer, R. Vicente, J. M. Buldú, M. Peil, C. R. Mirasso, M. C. Torrent, J. García-Ojalvo, Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 123902.
- [35] R. Banerjee, D. Ghosh, E. Padmanaban, R. Ramaswamy, L. M. Pecora, S. K. Dana, Enhancing synchrony in chaotic oscillators by dynamic relaying, *Phys. Rev. E.* 85 (2012) 027201.
- [36] M. Gosak, M. Milojević, M. Duh, K. Skok, M. Perc, Networks behind the morphology and structural design of living systems, *Phys. Life Rev.* 41 (2022) 1–21.
- [37] P. Ji, J. Ye, Y. Mu, W. Lin, Y. Tian, C. Hens, M. Perc, Y. Tang, J. Sun, J. Kurths, Signal propagation in complex networks, *Phys. Rep.* 1017 (2023) 1–96.
- [38] R. Guillery, S. Sherman, Thalamic relay functions and their role in corticocortical communication, *Neuron.* 33 (2002) 163–175.
- [39] S. M. Sherman, The thalamus is more than just a relay, *Curr. Opin. Neurobiol.* 17 (2007) 417–422.
- [40] A. S. Mitchell, S. M. Sherman, M. A. Sommer, R. G. Mair, R. P. Vertes, Y. Chudasama, Advances in understanding mechanisms of thalamic relays in cognition and behavior, *J. Neurosci.* 34 (2014) 15340–15346.
- [41] V. Vlasov, A. Bifone, Hub-driven remote synchronization in brain networks, *Sci. Rep.* 7 (2017) 10403.
- [42] F. Drauschke, J. Sawicki, R. Berner, I. Omelchenko, E. Schöll, Effect of topology upon relay synchronization in triplex neuronal networks, *Chaos.* 30 (2020) 051104.
- [43] M. S. Anwar, D. Ghosh, N. Frolov, Relay synchronization in a weighted triplex network, *Mathematics.* 9 (2021) 2135.
- [44] I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, R. Sevilla-Escoboza, V. P. Vera-Avila, P. Chholak, S. Boccaletti, Relay synchronization in multiplex networks, *Sci. Rep.* 8 (2018) 8629.
- [45] Z. Wei, G. Sriram, K. Rajagopal, S. Jafari, Enhancing relay synchronization in multiplex networks by repulsive relay layer, *Europhys. Lett.* 145 (2024) 21003.
- [46] J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks, *Phys. Rev. E.* 98 (2018) 062224.
- [47] X. Li, T. Xu, J. Li, Synchronization and chimera states in a multilayer neuronal network with unidirectional interlayer links, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 228 (2019) 2419–2427.

- [48] U. Feudel, Rate-induced tipping in ecosystems and climate: the role of unstable states, basin boundaries and transient dynamics, *Nonlinear Process. Geophys.* 30 (2023) 481–502.
- [49] W. Samek, D. A. Blythe, G. Curio, K.-R. Müller, B. Blankertz, V. V. Nikulin, Multiscale temporal neural dynamics predict performance in a complex sensorimotor task, *NeuroImage.* 141 (2016) 291–303.
- [50] E. S. Boyden, F. Zhang, E. Bamberg, G. Nagel, K. Deisseroth, Millisecond-timescale, genetically targeted optical control of neural activity, *Nat. Neurosci.* 8 (2005) 1263–1268.
- [51] D. Das, D. S. Ray, Multiple time scale based reduction scheme for nonlinear chemical dynamics, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 222 (2013) 785–798.
- [52] S. Radovick, M. Nations, Y. Du, L. A. Berg, B. D. Weintraub, F. E. Wondisford, A mutation in the pou-homeodomain of pit-1 responsible for combined pituitary hormone deficiency, *Science.* 257 (1992) 1115–1118.
- [53] I. Bena, M. Droz, J. Szwabiński, A. Pekalski, Complex population dynamics as a competition between multiple-time-scale phenomena, *Phys. Rev. E.* 76 (2007) 011908.
- [54] K. Gupta, G. Ambika, Role of time scales and topology on the dynamics of complex networks, *Chaos.* 29 (2019) 033119.
- [55] W. Yang, Y.-W. Wang, Y. Shen, L. Pan, Cluster synchronization of coupled delayed competitive neural networks with two time scales, *Nonlinear. Dyn.* 90 (2017) 2767–2782.
- [56] S. Kachhara, G. Ambika, Frequency chimera state induced by differing dynamical timescales, *Phys. Rev. E.* 104 (2021) 064214.
- [57] Y. Shang, M. Chen, J. Kurths, Generalized synchronization of complex networks, *Phys. Rev. E.* 80 (2009) 027201.
- [58] D. Ning, X. Wu, H. Feng, Y. Chen, J. Lu, Inter-layer generalized synchronization of two-layer impulsively-coupled networks, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* 79 (2019) 104947.
- [59] D. Ning, X. Wu, J.-a. Lu, J. Lü, Driving-based generalized synchronization in two-layer networks via pinning control, *Chaos.* 25 (2015) 113104.