

揭示具有悬垂和 T 形几何结构的微悬臂梁在扭转振动中的模态形状复杂性和敏感性

Le Tri Dat,^{1,2, a)} Vinh N.T. Pham,³ and Nguyen Duy Vy^{4,5, b)}

¹⁾*Engineering Research Group, Dong Nai Technology University, Bien Hoa City, Vietnam*

²⁾*Faculty of Engineering, Dong Nai Technology University, Bien Hoa City, Vietnam*

³⁾*Department of Physics & Postgraduate Studies Office, Ho Chi Minh City University of Education, Ho Chi Minh City, Vietnam*

⁴⁾*Laboratory of Applied Physics, Science and Technology Advanced Institute, Van Lang University, Ho Chi Minh City, Vietnam*

⁵⁾*Faculty of Applied Technology, School of Technology, Van Lang University, Ho Chi Minh City, Vietnam*

(10Dated: 2025 年 4 月 13 日)

原子力显微镜 (AFM) 悬臂梁的扭转振动对于高灵敏度测量至关重要,但现有的宽度可变悬臂梁模型通常依赖于会导致与实验数据显著差异的近似值。与先前的研究不同,本工作引入了一个改进的分析框架,以精确计算外伸式和 T 形微悬臂梁的共振频率和模态形状——包括高阶模式,并通过有针对性的实验比较进行了验证。通过对外伸长度影响的系统分析,我们揭示了之前未报告的多峰模态形状,并展示了如何通过几何调节可控地改变谐振频率。此外,我们建立了模态灵敏度与悬臂梁-表面耦合强度之间的定量关系,为优化 AFM 悬臂性能提供了可操作的设计原则。我们的结果不仅调和了理论预测与实验观察之间的差异,还为调整悬臂几何形状以实现特定的频率响应在纳米机械成像和表面特性映射等应用中提供了实用指南。本工作通过弥合分析模型与实际操作需求之间的差距,推进了下一代 AFM 探针的设计。

^{a)} letridat@dentu.edu.vn

^{b)} Corresponding author: nguyenduyvy@vlu.edu.vn

I. 介绍

原子力显微镜（AFM）已经成为一种强大的高分辨率表面特性分析和单分子力谱工具，在各种环境中提供了卓越的灵敏度和多功能性（例如，空气、液体和真空）^{1,2,5}。通过监测悬臂梁偏转或共振频率变化，AFM 能够量化纳米尺度下的结构、热学和力学性质^{3,4}。悬臂动力学的最新进展进一步扩展了其应用范围，从生物分子相互作用图谱绘制到纳米力学性能成像⁶。

虽然弯曲振动模式主导了传统的 AFM 操作，扭转模式因其在特定场景中的独特优势而变得突出。例如，扭转振动对于刚性材料和横向刚度测量表现出更高的灵敏度^{7,9}，这使得诸如侧壁探针成像¹⁰等新技术成为可能。Sharos 等人证明了扭转模式比弯曲模式具有更高的质量敏感度¹¹，而 Turner 等人则强调了它们在高阶模式应用中的有效性⁹。尽管有这些优点，现有的宽度变化悬臂（例如，悬伸或 T 形几何结构）扭转动力学模型仍然受限于近似值，导致理论与实验之间的差异。这种差距对于下一代 AFM 探针尤为重要，在这些探针中，几何调整可以解锁定制的频率响应和增强灵敏度。

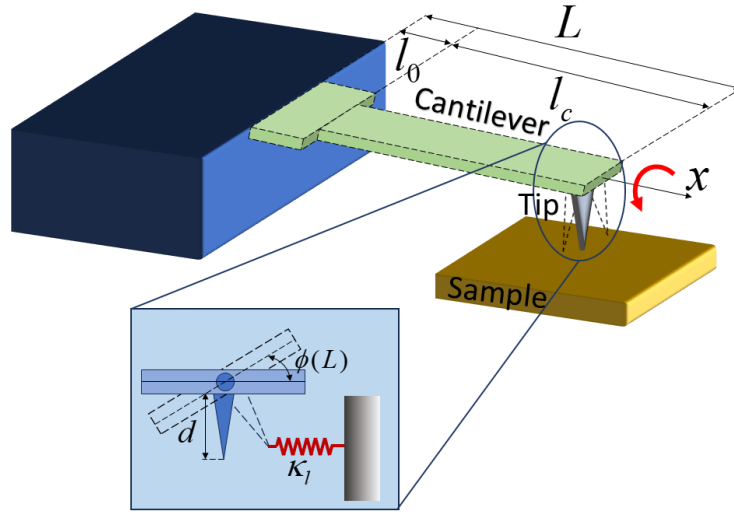


图 1. 一个包括长度为 l_0 和宽度为 w_0 的悬挑部分的悬臂梁结构在点 $x = 0$ 处固定于基座（黑色区域）。对于 $w_0 < w$ ，我们有一个 T 形悬臂。通过有效相互作用刚度 κ_t （图中插图），检查了扭转载荷下的模态与样本之间的相互作用。

超越简单的矩形梁，倒 T 形或 V 形悬臂^{12,13} 由于其增强的性能引起了显著的兴趣。然而，准确确定它们的共振频率和模态形状仍然具有挑战性，因为宽度和厚度分布不均匀。张等人。¹⁴ 使用多项式逼近研究了变宽悬臂梁以规避求解欧拉-伯努利方程时遇到的分析难题。尽管他们的方法揭示了共振频率的几何依赖性，但解决方案计算繁琐且对多项式假设敏感。普拉萨等人。¹² 证明微悬臂阵列可以减轻初始挠度，但仍需依赖实验校准来精确确定频率。这些限制强调了需要一个稳健的分析框架来预测非均匀悬臂梁的振动特性——这是本研究旨在解决的问题。

悬挑区域，特别是，在悬臂动力学中起着关键作用，影响着单个性能和耦合阵列行为。最近的研究表明，阵列中悬臂之间的耦合强度与悬挑长度成线性关系，并与悬挑宽度的三次方成反比¹⁵。这种几何灵敏度强调了准确建模的重要性，特别是在需要高分辨率表面形貌或同步阵列测量的应用中¹⁶⁻¹⁸。

我们的工作通过提供悬臂梁类型的精确解析解，缩小了理论与实验之间的差距，减少了频率预测中的不一致。对梁几何形状的修改，如悬挑长度和宽度，可以显著改变动态行为，包括更高谐波模式⁴ 的出现。虽然先前的研究已经探讨了各种几何结构——例如 Payam 等人。研究流体中的弯曲弹簧常数

^{19,20} 和 Plaza 等人。优化 T 形结构 ¹²——但没有一项系统地解决了悬挑设计特有的扭转振动问题。本研究填补了这一空白，为单探针和阵列应用的悬臂性能优化提供了一种统一的方法。

在这项工作中，我们全面分析了悬臂梁的几何修改如何改变其扭转模态形状、共振频率以及——关键的是——测量灵敏度。与以往仅关注频率调节的研究不同，我们系统地量化了悬挑部分和 T 形截面尺寸对动态响应和模态灵敏度的影响，填补了 AFM 悬臂设计中的一个重要空白。

在第 II 节中，我们推导了 T 形悬臂梁（不包括外部相互作用）的精确频率方程，并建立了悬挑长度、宽度和 T 形连接几何形状的变化如何重塑模态形状和谐波谱。

第 III 节展示了验证结果，突出了两项关键进展：(i) 高阶模式的几何控制：我们展示了如何通过调整悬挑来选择性地增强或抑制特定谐波，从而实现定制化的频率响应。(ii) 灵敏度-刚度耦合：在第 III C 节中，我们引入了一种模态灵敏度的广义模型，该模型通过有效刚度参数纳入样本间的相互作用，解决了理论和实验灵敏度趋势之间的先前差异。

我们的研究结果为设计下一代 AFM 探针提供了可操作的指南，特别是在需要高横向分辨率（例如纳米级摩擦映射）或同步阵列测量的应用中。第 IV 节中的结论总结了这些见解并概述了未来实验验证的路径。

II. 材料与方法

悬臂梁假设由氮化硅 ⁸ 制成，这与传统的 AFM 实验一致，其长度为 $L = 200\text{--}500\mu\text{米}$ ，宽度 $w = 35\mu\text{米}$ ，厚度 $t = 1.5\mu\text{米}$ 。基于非均匀悬臂梁弯曲振动的分析框架 ^{15,21}，我们扩展这种方法以建模溢出结构和 T 形结构中的扭转振动 [见图 1]。我们的分析系统地研究了悬挑部分和 T 形截面尺寸的变化如何影响悬臂梁的共振频率和模态形状。因此，需要对悬臂梁的多模态行为进行详细分析。我们发现：(i) 多模态扭转行为：观察到高阶扭转模式在振动动力学中起着重要作用，需要对其贡献进行详细分析。(ii) 几何敏感性：悬挑部分和 T 形部分的尺寸对频率谱和模态形状分布有关键影响，突显了精确几何控制对于最佳性能的重要性。基于梁的欧拉-伯努利理论 ^{22,23}，扭转振动模式的动力方程如下：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right] - \rho I_p(x) \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

其中 $\phi(x, t)$ 是位置 x 和时间 t 处的偏转角。 G 是剪切模量， ρ 是梁的密度。 $J(x)$ 并且 $I_p(x)$ 分别是梁截面和极惯性矩的几何函数。这里，梁的截面为矩形，因此， $J(x) = w(x)t^3/3$ 和 $I_p(x) = w^3(x)t/12$ 。表明梁的宽度依赖于 x 。因此，方程 (1) 的通解是 $\phi(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}$ 。将其重新输入到公式 (1) 中，即可得到模态形状（与 x 相关）和频率的方程。模态形状方程为，

$$\frac{d}{dx} \left[GJ(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \right] + \rho I_p(x) \omega^2 \phi(x) = 0. \quad (2)$$

对于当前梁的横截面，假设悬臂部分和外悬臂部分的厚度相同，而宽度呈阶跃状，用 x 表示，

$$w(x) = \begin{cases} w_0, & \text{if } 0 < x \leq l_0, \\ w, & \text{if } l_0 < x \leq L. \end{cases} \quad (3)$$

基于公式 (3)，将公式 (2) 分为两个方程。第一个方程描述了悬臂部分，

$$\phi_0^{(2)}(x) + \gamma_0^2 \phi_0(x) = 0, \quad (4)$$

第二个方程是用于悬挑部分，

$$\phi_c^{(2)}(x) + \gamma_c^2 \phi_c(x) = 0. \quad (5)$$

这里， $\gamma_{0,c} = \omega \sqrt{\frac{\rho I_{p,0,c}}{G J_{0,c}}}$ 是特征频率。现在，频率比是

$$\frac{\gamma_c}{\gamma_0} = \frac{w}{w_0} = \frac{1}{\kappa}, \quad (6)$$

或者，可以使用 $\gamma = \gamma_c = \frac{1}{\kappa} \gamma_0$ 来简化表达。解 方程 (4) 和 (5) 可以写成如下形式，

$$\phi_0(x) = A \sin(\kappa \gamma x) + B \cos(\kappa \gamma x), \quad (7)$$

和

$$\phi_c(x) = C \sin(\gamma x) + D \cos(\gamma x). \quad (8)$$

边界条件是

$$\phi_0(0) = \left. \frac{d\phi_c(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (9)$$

在 l_0 处写出的连续条件是

$$\phi_0(l_0) = \phi_c(l_0), \quad (10)$$

和

$$G J_0 \left. \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right|_{x=l_0} = G J_c \left. \frac{d\phi_c(x)}{dx} \right|_{x=l_0}. \quad (11)$$

从这些条件中，得到了如下矩阵方程，

$$K \cdot X = 0, \quad (12)$$

其中 K 写作

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \kappa \eta \gamma & \cos \kappa \eta \gamma & -\sin \eta \gamma & -\cos \eta \gamma \\ \kappa^2 \cos \kappa \eta \gamma & -\kappa^2 \sin \kappa \eta \gamma & -\cos \eta \gamma & \sin \eta \gamma \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中， $\gamma = \gamma L$ ， $\eta = l_0/L$ 和 $X = [A \ B \ C \ D]^T$ 。可以证明，如果存在特征值和特征向量，则矩阵 K 将产生悬臂频率和模态形状的解。因此，从 $\det K = 0$ 中，我们得到一个频率方程，

$$\kappa^2 \cos(\gamma - \gamma \eta) \cos(\gamma \eta \kappa) - \sin(\gamma - \gamma \eta) \sin(\gamma \eta \kappa) = 0, \quad (14)$$

用于通过 γ 推导梁的频率，

$$\omega = \frac{\gamma}{L} \sqrt{\frac{G J_c}{\rho I_{p,c}}}. \quad (15)$$

获得四个系数 A 、 B 、 C 和 D 后，模态形状表示为，

$$\phi_0(x) = A \sin(\kappa \gamma x), \quad (16)$$

$$\phi_c(x) = A \cos[(1-x)\gamma] \sec[(1-\eta)\gamma] \sin(\kappa \eta \gamma) \quad (17)$$

在弯曲振动的情况下，更新的模态形状已被证明显著修改了均匀横截面悬臂梁的模态形状²¹。对于扭转模式，预期会有类似的行为。

III. 结果

典型微悬臂梁的尺寸范围如下：长度 (L) = 50–500 μ 米，宽度 (w) = 10–50 μ 米，厚度 (t) = 0.5–5 μ 米。这些范围与实验研究一致，例如由²⁴（硅悬臂梁： L = 100–500 μ 米， w = 20–50 μ 米， t = 0.3–2 μ 米）和²⁵（ $L \simeq 500\mu$ 米， W = 97.2 μ 米， t = 0.8 μ 米）的研究。在这项工作中，我们分析了氮化硅微悬臂梁（材料属性见表 I），重点关注其模态形状和共振频率如何随几何修改而演变。

表 I. 悬挑部分的参数。

Parameters	Symbol (Unit)	Value
Length	L (μm)	350
Width	w (μm)	35
Thickness	t (μm)	1.5
Young's modulus	E (GPa)	169
Density	ρ (kg/m^3)	2300

A. 模态形状的变化

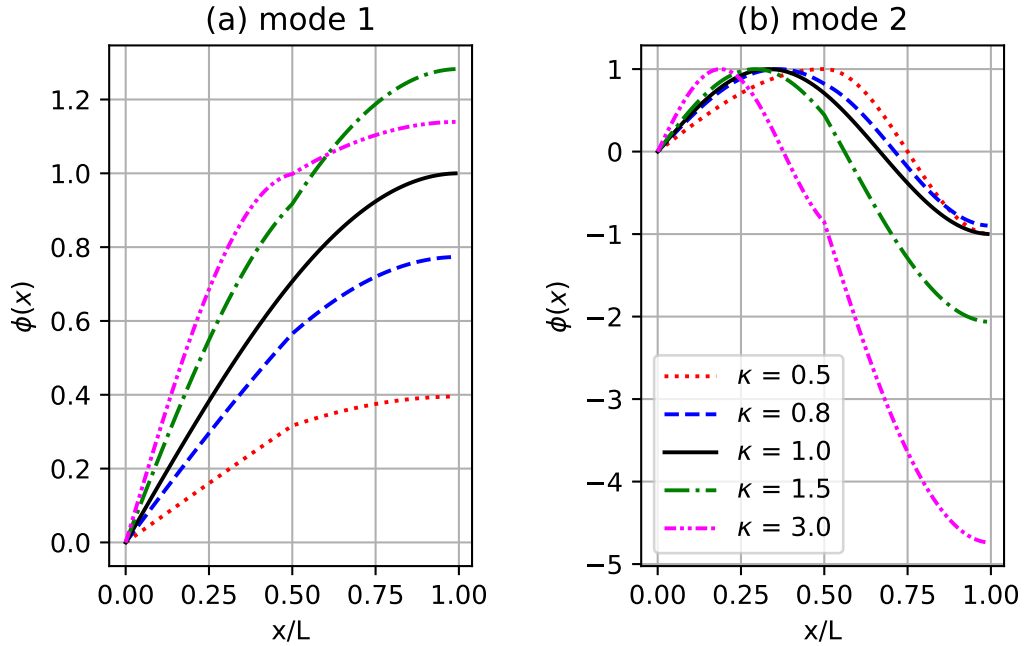


图 2. 悬臂梁前两种模态的振型，随着悬臂宽度通过 κ 增加。这里， $\eta=0.5$ 。 κ 的增加意味着悬臂更宽。

模态形状已在图 2 中表示，(a) 表示第一模态，(b) 表示第二模态。图 2(a) 和 2(b) 展示了 $\eta = l_0/L = 0.5$ 以及不同挑出宽度值的情况，挑出宽度为 $\kappa = w_0/w=1.0$ 时用黑色实线表示，0.5 时用红色点线表

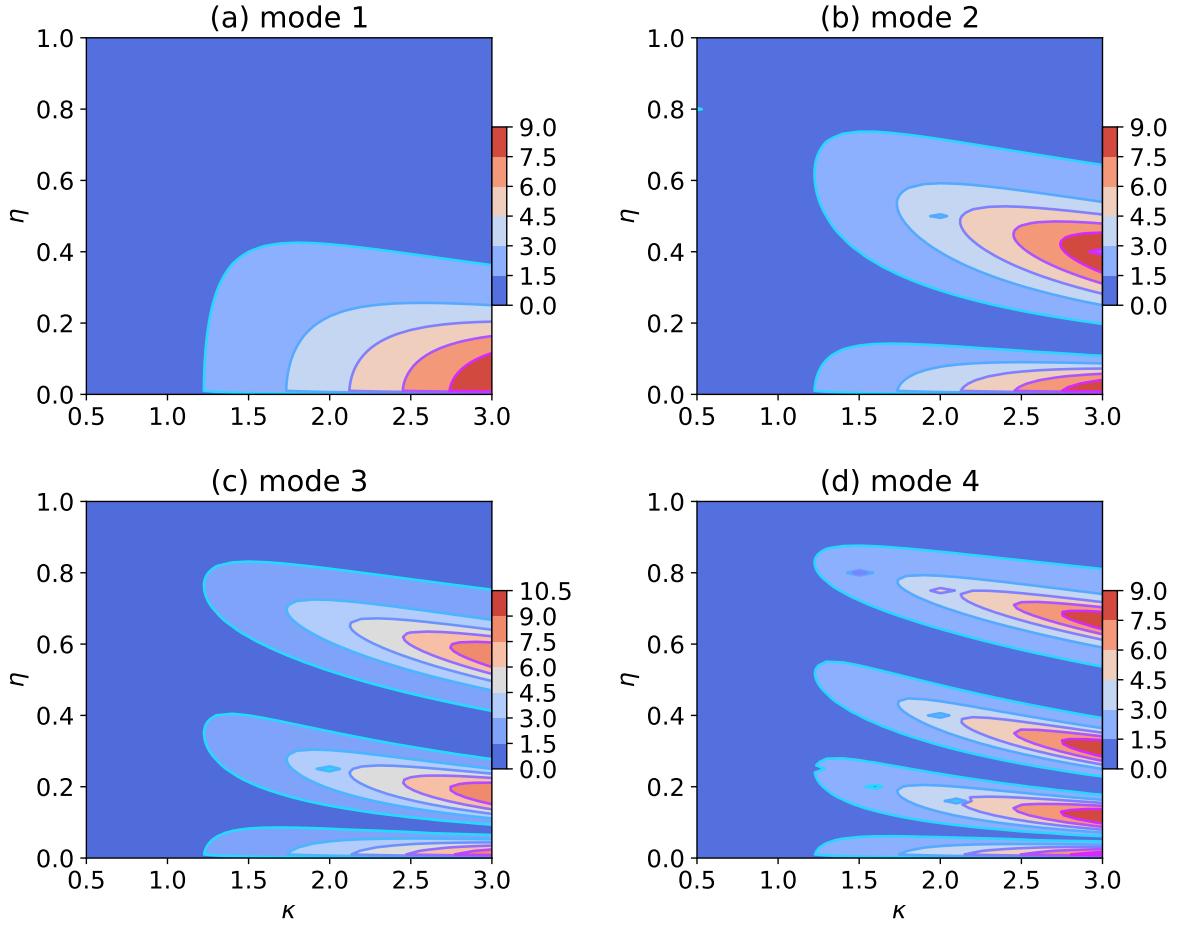


图 3. 在 $L, x(L)/x(l_0)$ 处的前四种模式的偏转角具有若干极大值。极大值的数量与模式数成正比，并且存在于 $\kappa > 1$ 。

示，0.8 时用蓝色虚线表示，1.5 时用绿色点划线表示，3.0 时用粉色长短线表示。在 L 处的偏转角度 $x(L)/x(l_0)$ 已被显示随着悬臂宽度的增加而倾向于增大。

特别地，对于第二种模式，模态形状的 $\kappa = 0.5-0.8$ 偏离了 $\kappa = 1$ 在 $0 < x < L$ 处的最大值然后减少并接近在 $x = L$ 处的值 -1，而那些 $\kappa > 1$ 则大幅减少（绿色虚线和粉色虚线）。

图 3 总结了前四种扭转模式的行为，说明了悬臂如何影响梁自由端的偏转角度。颜色强度表示偏转幅度，揭示了每种模式的不同最大值分布：

- 模式 1：单峰最大值（未明确指出但可在颜色梯度中观察到）
- 模式 2：在 $l_0/L \simeq 0.05$ 和 0.4（红色区域）有两个极大值
- 模式 3：在 $l_0/L \simeq 0.025, 0.2$ 和 0.6 处有三个极大值
- 模式 4：在 $l_0/L \simeq 0.01, 0.15, 0.3$ 和 0.65 处有四个极大值。

最大值的数量始终等于模式数量，证明了模态顺序与空间振荡模式之间的明确相关性。这种系统行为证实了悬臂几何形状对扭转振动特性可预测的影响。

B. 频率的变化

检查悬臂频率 $f = \omega/2\pi$ 的变化，我们观察到 f 对于悬挑长度 η 的依赖关系中存在一种有趣的非单调行为。第一模态的频率最初增加 [图 4(a)]，在 $\eta \simeq 0.2$ 达到最大值，然后随着 η 继续增加而迅速下降。在接近最大值的区域（从橙色到红色），频率随 κ 增加，即悬臂梁的伸出部分更大时，意味着刚度更高。

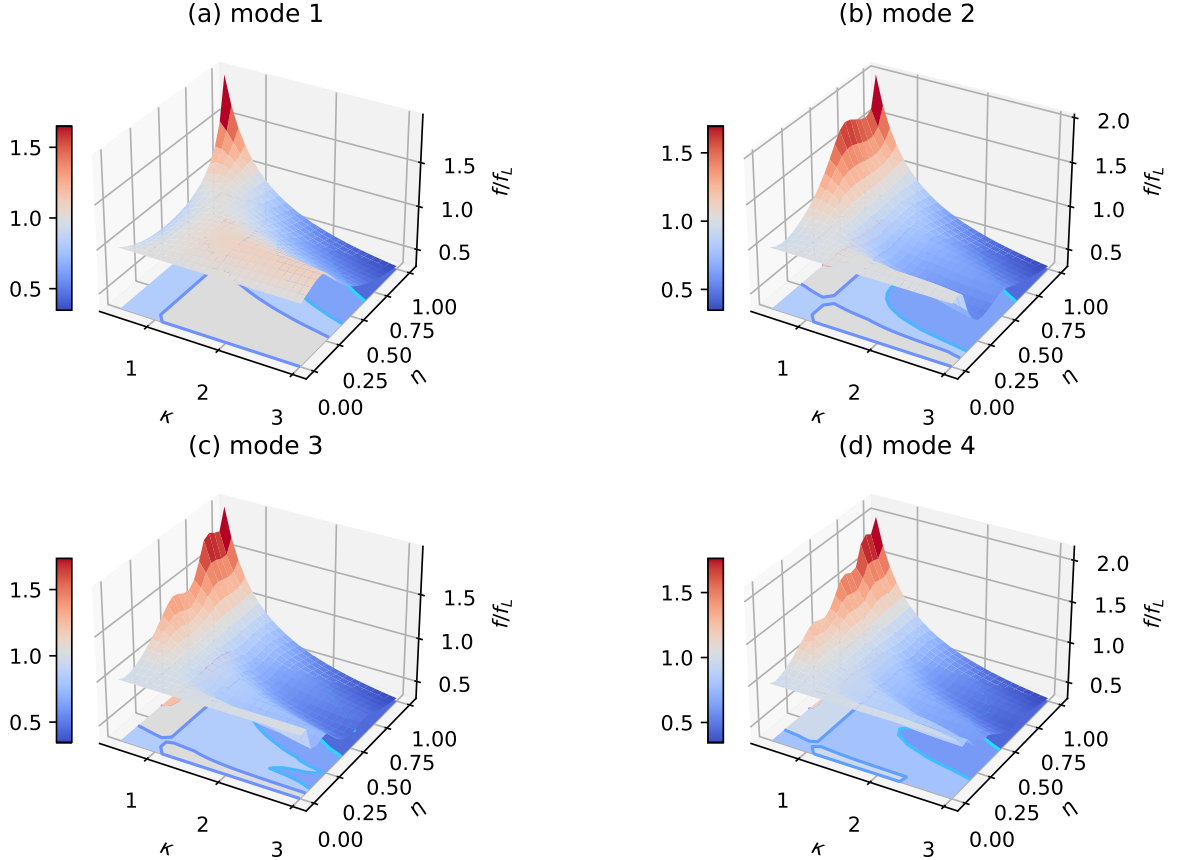


图 4. 前四种模式的频率。(a) 悬臂形 ($\kappa > 1$) 的第一模态在 $0 \leq \eta \leq 0.25$ 时呈现最大频率，而 T 形 ($\kappa < 1$) 悬臂则有最小值。(b)–(d) 高阶模态倾向于随着 η 减少频率，并且出现了一些小的极值。

另一方面，第 2 到第 4 模式不再明显表现出最大值。所有频率随着 η 的增加而迅速下降。例如，在范围 $\eta = 0-0.5$ 内，第二模式 f_2 [图 4(b)] 从 1.0 显著降低到 $\simeq 0.5$ (1000 至 500 千赫)。第 3 和第 4 模式 [图 4(c) 和 (d)] 在下降到更低频率之前显示出一个小峰值。

这些发现值得注意有几个原因。首先，频率响应中有一个几乎平坦的平台，随后是快速下降。这一特征可能有利于通过调整悬臂过梁部分的长度来控制 and 调节悬臂频率，从而增强高谐波频率^{4,26}。其次，由结构几何形状决定的高阶模式的有效调制可能使在测量中使用多个模式成为可能，改善模态间的耦合，甚至支持高次谐波的出现（因为高阶模式频率可以是低阶频率的整数倍）。因此，适当调节过梁参数可以促进对更高阶模式的控制。

我们的方法也与之之前关于悬臂梁频率的研究有很好的 consistency。例如，Sadewasser 等人研究了带有伸出部分的悬臂梁的动力学特性³⁰。与 Sadewasser 的结果相比，在相同的几何条件下，我们方法中扭

转 (f_T) 和弯曲 (f_F) 频率之间的比率表现出极好的一致性, 如图所示 5。

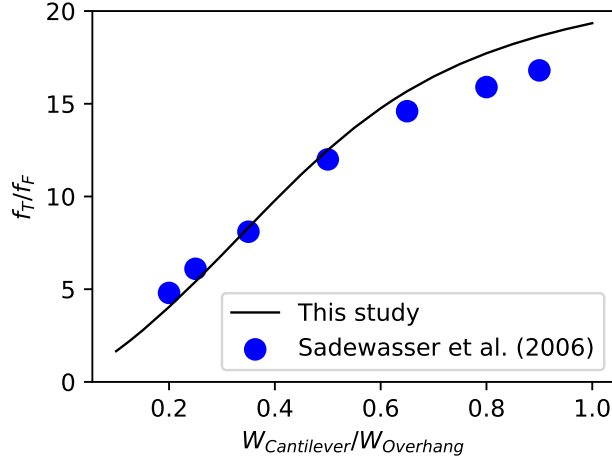


图 5. 悬挑梁（过悬式）的扭转频率与弯曲频率之比来自 Sadewasser 等人（实心蓝圈，³⁰）和本研究（实黑线）。

C. 扭转载敏感性

弯曲模态在悬伸梁和 T 形悬臂梁中的敏感性最近已被研究²⁰, 表明悬臂部分的尺寸可以显著影响悬臂梁的频率。对于扭转模态, Abbasi 等人。²⁷ 进行了几项调查, 重点关注矩形几何形状中带有侧壁探针的悬臂梁。然而, 悬伸或 T 形悬臂梁的扭转振动尚未被探索。

在这项工作中, 我们分析了一个悬臂梁的扭转模态敏感性, 假设尖端-样本相互作用被建模为一个横向线性弹簧, 其刚度为 κ_l 。这种相互作用施加在悬臂梁的末端位置 $x = L$ 处。边界条件在 $x = L$ 处表示为 $\phi'(L) = -(\kappa_l d^2 / (GJ))\phi(L) = -\beta_l \phi(L)$, 其中 $\beta_l = (\kappa_l d^2 / (GJ))$ 。这导致矩阵 K 中出现附加项, 在公式 (13) 中。修改后的矩阵 K 表示如下 [式.(18)],

$$K_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \cos \gamma + \beta_l \sin \gamma & -\gamma \sin \gamma + \beta_l \cos \gamma \\ \sin \kappa \eta \gamma & \cos \kappa \eta \gamma & -\sin \eta \gamma & -\cos \eta \gamma \\ \kappa^2 \cos \kappa \eta \gamma & -\kappa^2 \sin \kappa \eta \gamma & -\cos \eta \gamma & \sin \eta \gamma \end{bmatrix}. \quad (18)$$

类似地, 使用更新后的矩阵 K_l , 通过计算矩阵的行列式 C 得到了特征方程。最终, 得到了频率的特征方程,

$$C = C_0(\kappa, \eta, \gamma) + C_{int}(\kappa, \eta, \beta_l, \gamma), \quad (19)$$

其中

$$C_0 = \gamma \{ \kappa^2 \cos [\gamma(1 - \eta)] \cos(\gamma \eta \kappa) - \sin [\gamma(1 - \eta)] \sin(\gamma \eta \kappa) \}, \quad (20)$$

$$C_{int} = \beta_l \{ \kappa^2 \sin [\gamma(1 - \eta)] \cos(\gamma \eta \kappa) + \cos(\gamma(1 - \eta)) \sin(\gamma \eta \kappa) \}. \quad (21)$$

C_0 和 C_{int} 分别代表非接触和接触贡献。频率随 η 和耦合刚度 β 的变化如图 6 所示, 分别为第一模态和第二模态。观察到对于 $\kappa < 1$, 频率 f 先减小后增大随 η 变化, 而对于 $\kappa > 1$, 趋势则相反。值得注意

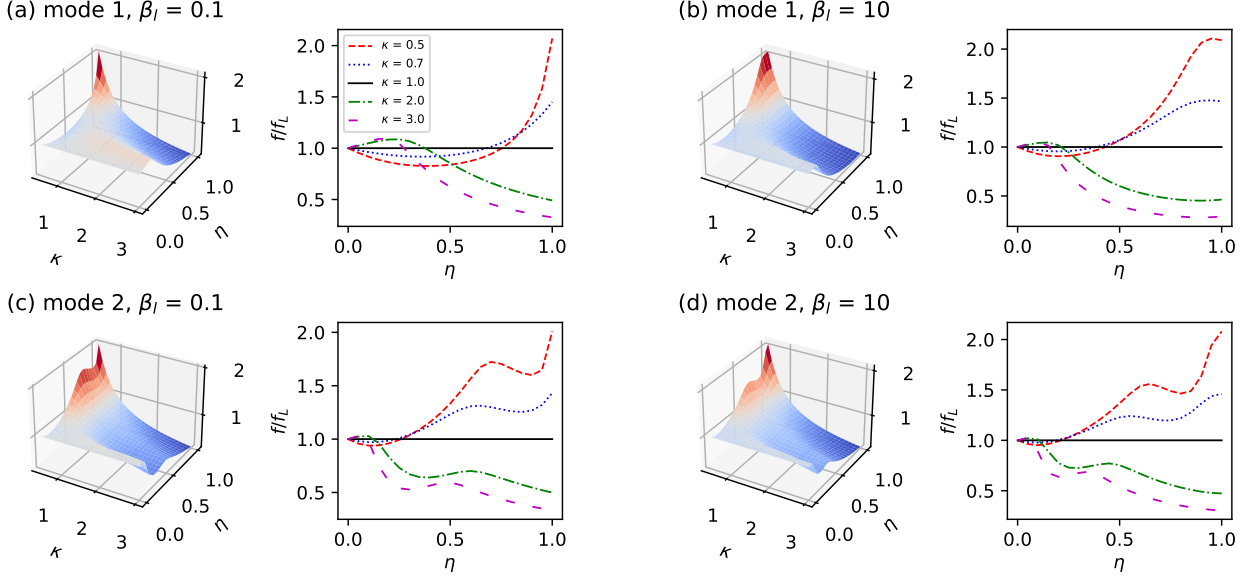


图 6. 第 1 模式 [(a) 和 (b)] 和第 2 模式 [(c) 和 (d)] 考虑了针尖-样品的相互作用。在某些值的 κ 处进行了截取，并展示了 T 形和悬臂形的不同趋势。具有 $\kappa < 1$ 的 T 形悬臂的频率随 η 显著增加（红色区域和红色虚线），而悬臂形 ($\kappa > 1$) 的频率则随着 η 减少（紫色长虚线和绿色点划线）。

的是，在 $f/f_L = 1$ 处存在一个平衡点，对于 κ 的每一个值都是如此。这特别有趣是因为人们可以选择悬臂或 T 形悬臂的长度和宽度，使其扭转频率与矩形悬臂相同。换句话说，这些点可以作为设计变宽悬臂的参考。

增加耦合刚度 β 会导致频率变化得更快。例如，在第一模式 [见图 6(b)] 中，曲线较早地与 $f/f_L = 1$ 线相交，然后要么增加（对于 $\kappa < 1$ ）达到最大值（如红色虚线和蓝色点线所示），或者减少（对于 $\kappa > 1$ ）以达到最小值（紫色长虚线和绿色点划线）。对于更高模式，可能会出现额外的极值，趋势类似于图 4 中所示的情况。

灵敏度定义为频率随相互作用强度⁹的变化。

$$S = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_l} = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \beta_l} = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \left(-\frac{\partial C / \partial \beta_l}{\partial C / \partial \gamma} \right). \quad (22)$$

这里，通过

$$\omega = \gamma \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}}. \quad (23)$$

计算光束的频率。然后，得到归一化的扭转灵敏度。

$$\sigma_T = \frac{\kappa^2 \sin[\gamma(1-\eta)] \cos(\gamma\eta\kappa) + \cos[\gamma(1-\eta)] \sin(\gamma\eta\kappa)}{D}, \quad (24)$$

其中

$$D = \cos[\gamma(1-\eta)] \{ \kappa [-\beta_l \eta + (-1 + \beta_l(-1 + \eta))\kappa] \cos(\gamma\eta\kappa) + \gamma [1 + \eta(-1 + \kappa^3)] \sin(\gamma\eta\kappa) \} + \\ + \sin[\gamma(1-\eta)] \{ \gamma\kappa [\eta + \kappa - \eta\kappa] \cos(\gamma\eta\kappa) + [1 + \beta_l + \beta_l\eta(-1 + \kappa^3)] \sin(\gamma\eta\kappa) \}. \quad (25)$$

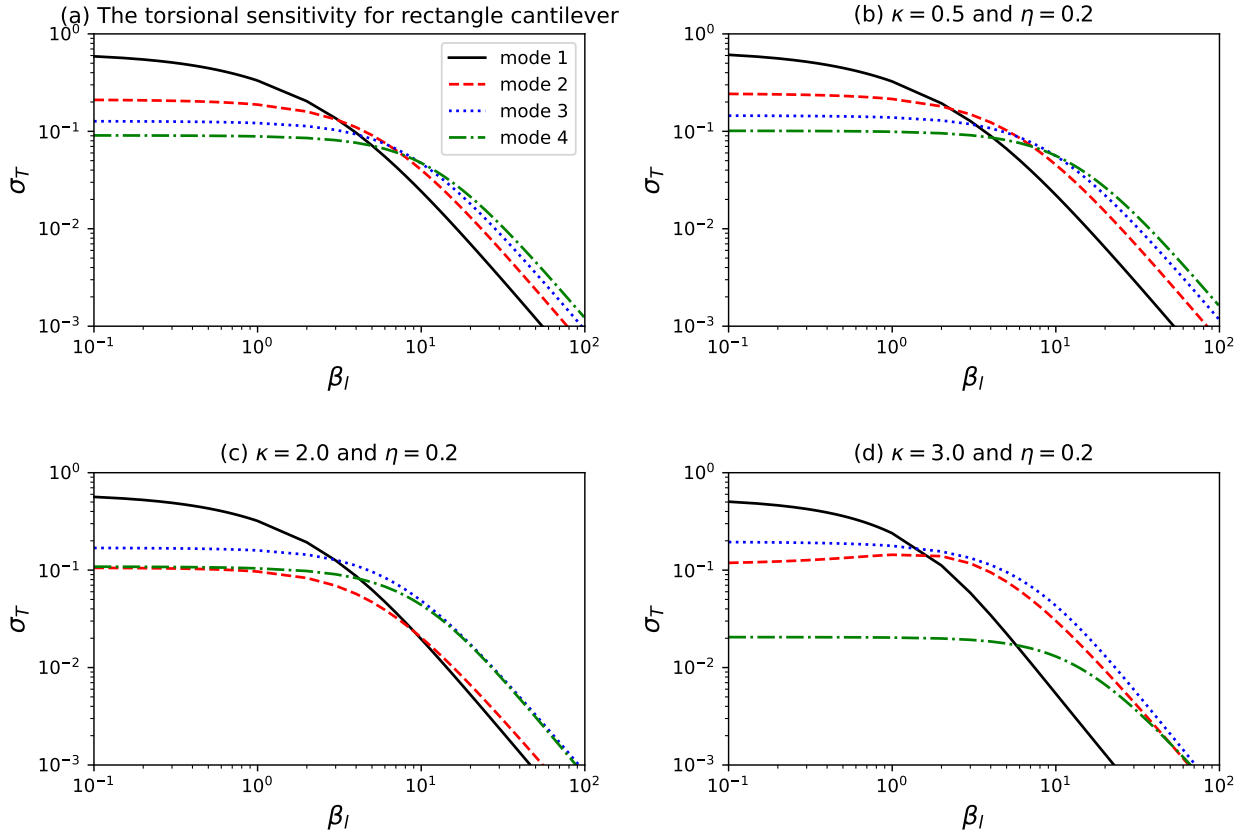


图 7. 灵敏度 σ_T 的前四种扭转模式对于各种值的 κ 。(a) $\kappa=1$ (矩形悬臂)。(b) $\kappa=0.5$ (T 型悬臂)。(c) 和 (d) $\kappa>1$ (伸出式悬臂)。对于悬挑形状的悬臂, σ_T 随着 β_l 更快地减小, 当悬挑宽度 κ 较宽时。这里使用了 $\eta=0.2$ 。

归一化的扭转模式灵敏度如图 7 所示: (a) 长方形的 $\kappa=1$, (b) T 形的 $\kappa=0.5$, (c) 悬臂形的 $\kappa=2.0$, 以及 (d) 较宽悬臂形的 $\kappa=3$ 。这里使用了 $\eta=0.2$ 。已知, 当几何比设置为 $\kappa=1$ 或 $\eta=0$ 时, 矩形悬臂的灵敏度公式已被得出, 并且 Turner 的等。解析计算得以实现⁹。首先, 在矩形悬臂梁的模式灵敏度 (σ_T) 方面, 如 Turner 等人。⁹ 所报道的行为在图 7(a) 中得到了重现, 需要注意的是, 这里的 σ_T 值略高是因为使用了长度为 $L=350\ \mu$ 米的悬臂梁 [Turner 使用了一根 200μ 米长的悬臂梁]。

对于 T 形悬臂梁 [图 7(b)], σ_T 略有修改, 而对于悬垂形悬臂梁 [图 7(c)-(d)], 它则发生了显著变化。第一模式 (黑色实线) 的 σ_T 下降速度比高阶模式更快, 而第四模式的 σ_T 在较宽范围的 β_l 内 (绿色点划线) 保持相对稳定。值得注意的是, 在低 β_l 条件下, 第三模式 (蓝色虚线) 显示出增加的敏感度, 超过了第二模式——这与矩形和 T 形悬臂中常见的敏感度顺序 $\sigma_T^{\text{mode } 1} > \sigma_T^{\text{mode } 2} > \sigma_T^{\text{mode } 3} > \sigma_T^{\text{mode } 4}$ 相反。

此外, 仅在范围 $\beta_l=1-10$ 内观察到灵敏度的增加。这与典型的趋势不同, 在典型情况下, 灵敏度会在更宽的范围内增加, 通常是从 $\beta_l=1-100$, 具体取决于模式数, 然后迅速降至零如 $\beta_l \rightarrow 10^3$, 如在扭转模式中的 Ref.⁹ 所示以及在弯曲模式中的 Refs.^{20,28} 所示。

为进一步提高扭转模式的动态响应和灵敏度, 可以采用配备有扩展侧壁探针的悬臂梁, 如参考文献²⁹ 所示。这些悬臂显示出有趣的依赖于扩展探针几何形状的行为¹⁰。我们打算在未来的研究中探索这个主题。

IV. 结论

在本研究中，我们分析推导了外伸式和 T 形悬臂扭转模式的频率特征方程和模态灵敏度。我们的结果揭示了模式形状和频率随外伸长度的变化有显著且有效的改变，为选择尺寸参数以实现特定性能特性提供了一个灵活的框架。值得注意的是，我们首次详细分析了这些悬臂的模态灵敏度。

通过将尖端-样品相互作用建模为线性横向弹簧，我们引入了一个可调耦合刚度参数 β_l ，它直接影响扭转响应。我们展示了增加 β_l 会导致模态频率发生非单调偏移，在关键平衡点处宽度变化的悬臂梁的扭转频率与矩形悬臂梁匹配——为悬臂设计提供了实用基准。发现 β_l 对模态灵敏度的影响强烈依赖于几何形状，特别是在悬挑形悬臂梁中出现了非常规的灵敏度排序。这种行为表明可以通过战略性地修改几何结构来增强或抑制特定模式的灵敏度。

我们的分析结果不仅与矩形悬臂梁⁹的先前研究一致，还将分析扩展到了之前未在扭转模式背景下探索的几何形状。这些见解为实验人员设计具有定制频率和灵敏度的悬臂结构提供了宝贵的指导，使高灵敏度测量能够在各种应用中实现。未来的工作可以考虑结合扩展侧探针，这种探针已在改善动态行为和灵敏度^{10,29}方面显示出有希望的结果。

致谢

我们感谢阿米尔·F·佩亚姆（阿尔斯特大学）富有成效的讨论和鼓励。

REFERENCES

- ¹Neuman K C and Nagy A 2008 *Nat. Methods* **5** 491–505 URL <https://www.nature.com/articles/nmeth.1218>
- ²Sajjadi M, Pishkenari H N and Vossoughi G 2017 *Ultramicros.* **182** 99 – 111 ISSN 0304-3991 URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ultramic.2017.06.009>
- ³Rezapour B, Araghi M A F and Vázquez-Leal H 2021 *J. Vib. Control* **27** 802–814 URL <https://doi.org/10.1177/1077546320933478>
- ⁴Dat L T, Nguyen C C, Vy N D and Payam A F 2023 *Jpn. J. Appl. Phys.* **62** 107002 URL <https://dx.doi.org/10.35848/1347-4065/ad00a0>
- ⁵Karimpour M, Ghaderi R and Raeiszadeh F 2017 *Micron* **101** 213–220 ISSN 0968-4328 URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968432817301488>
- ⁶Vy N D and Iida T 2015 *Appl. Phys. Express* **8** 032801 URL <https://dx.doi.org/10.7567/APEX.8.032801>
- ⁷Heinze K, Arnould O, Delenne J Y, Lullien-Pellerin V, Ramonda M and George M 2018 *Ultramicros.* **194** 78–88 ISSN 0304-3991 URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439911730308X>
- ⁸Mohammadi S Z, Moghadam M and Pishkenari H N 2019 *Ultramicros.* **197** 83 – 94 ISSN 0304-3991 URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ultramic.2018.11.017>
- ⁹Turner J A and Wiehn J S 2001 *Nanotechnology* **12** 322 URL <https://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/12/3/321>

- ¹⁰Payam A F and Duy Vy N 2021 *Microsc. Res. Tech.* **84** 782–788 URL <https://analyticalsciencejournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jemt.23636>
- ¹¹Sharos L B, Raman A, Crittenden S and Reifenberger R 2004 *Applied Physics Letters* **84** 4638–4640 ISSN 0003-6951 (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/apl/article-pdf/84/23/4638/18589520/4638_1_online.pdf) URL <https://doi.org/10.1063/1.1759379>
- ¹²Plaza J A, Zinoviev K, Villanueva G, Álvarez M, Tamayo J, Domínguez C and Lechuga L M 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 094109 URL <https://doi.org/10.1063/1.2345234>
- ¹³Sader J E, Sanelli J A, Adamson B D, Monty J P, Wei X, Crawford S A, Friend J R, Marusic I, Mulvaney P and Bieske E J 2012 *Rev. Sci. Instrum.* **83** 103705 URL <https://doi.org/10.1063/1.4757398>
- ¹⁴Zhang G, Zhao L, Jiang Z, Yang S, Zhao Y, Huang E, Wang X and Liu Z 2011 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **44** 425402 URL <https://doi.org/10.1088/0022-3727/44/2F42/2F425402>
- ¹⁵Dat L T, Pham V N T, Vy N D and Payam A F 2022 *Microsc. Res. Tech.* **85** 3237–3244 URL <https://analyticalsciencejournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jemt.24180>
- ¹⁶Chen Q, Huang L and Lai Y C 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 241914 ISSN 0003-6951 (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/apl/article-pdf/doi/10.1063/1.2946494/14396120/241914_1_online.pdf) URL <https://doi.org/10.1063/1.2946494>
- ¹⁷Huber T M, Ofstad E T, Barthell S M, Raman A and Spletzer M 2008 *Int'l Design Eng. Tech. Conf. and Computers Infor. Eng. Conf.* **4: 20th Int'l Conf. Design Theory and Methodology; Second Int'l Conf. Micro- and Nanosys.** 737–741 (*Preprint* https://asmedigitalcollection.asme.org/IDETC-CIE/proceedings-pdf/IDETC-CIE2008/43284/737/4578299/737_1.pdf) URL <https://doi.org/10.1115/DETC2008-49555>
- ¹⁸Dick N and Krylov S 2023 *Actuators* **12** ISSN 2076-0825 URL <https://www.mdpi.com/2076-0825/12/10/386>
- ¹⁹Payam A F, Trewby W and Voitchovsky K 2018 *Appl. Phys. Lett.* **112** 083101 URL <https://doi.org/10.1063/1.5009071>
- ²⁰Vy N D, Morelli A, Pham V N, Finlay D and Payam A F 2022 *Int. J. Solids Struct.* **259** 112027 ISSN 0020-7683 URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768322004802>
- ²¹Dat L T, Lan V and Vy N D 2020 *Commun. in Phys.* **30** 301 URL <https://vjs.ac.vn/index.php/cip/article/view/15080>
- ²²Meirovitch L 1967 URL <https://books.google.com.vn/books?id=sf1QAAAAMAAJ>
- ²³Weaver Jr W, Timoshenko S P and Young D H 1991 *Vibration problems in engineering* (John Wiley & Sons) URL <https://www.wiley.com/en-us/Vibration+Problems+in+Engineering%2C+5th+Edition-p-9780471632283>
- ²⁴Etayash H and Thundat T 2014 *Microcantilever Chemical and Biological Sensors* (Dordrecht: Springer Netherlands) pp 1–9 ISBN 978-94-007-6178-0 URL https://doi.org/10.1007/978-94-007-6178-0_187-2
- ²⁵McFarland A W, Poggi M A, Bottomley L A and Colton J S 2005 *J. Micromecha. Microeng.* **15** 785 URL <https://dx.doi.org/10.1088/0960-1317/15/4/016>

- ²⁶Hoang C M, Vy N D, Dat L T and Iida T 2017 *Jpn. J. Appl. Phys.* **56** 06GK05 URL <https://dx.doi.org/10.7567/JJAP.56.06GK05>
- ²⁷Abbasi M and Karami Mohammadi A 2015 *Microsc. Res. Tech.* **78** 408–415 URL <https://doi.org/10.1002/jemt.22488>
- ²⁸Payam A F 2013 *Ultramicrosc.* **135** 84–88 ISSN 0304-3991 URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304399113001927>
- ²⁹Dai G, Wolff H, Weimann T, Xu M, Pohlenz F and Danzebrink H U 2007 *Measurement Science and Technology* **18** 334 URL <https://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/18/2/S03>
- ³⁰Sadewasser S, Villanueva G and Plaza J A 2006 *Rev. Sci. Instrum.* **77** 073703 ISSN 0034-6748 (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/rsi/article-pdf/doi/10.1063/1.2219738/13815552/073703_1_online.pdf) URL <https://doi.org/10.1063/1.2219738>