Annals of Formalized Mathematics
Volume **1** (2025), 43–52
DOI: https://doi.org/10.46298/afm.15328

在 Lean 中形式化 zeta 和 L 函数

David Loeffler and Michael Stoll

Abstract. 黎曼 ζ 函数以及更广泛的 Dirichlet 特征的 L-函数是解析数论研究中的核心对象。我们报告了一个在 Lean 的 'Mathlib' 库中形式化这些对象理论的项目，包括关于算术级数中的素数定理的形式证明和黎曼假设的形式陈述。

MSC 2020: 11M06, 68V20
Keywords: 黎曼 ζ 函数，解析数论，证明的形式化

Contact information:
D. Loeffler: UniDistance Suisse. david.loeffler@unidistance.ch
M. Stoll: Mathematisches Institut, Universität Bayreuth. michael.stoll@uni-bayreuth.de
D.L. gratefully acknowledges the support of the European Research Council through the Horizon 2020 Excellent Science programme (Consolidator Grant "ShimBSD: Shimura varieties and the BSD conjecture", grant ID 101001051). M.S. thanks the Institute for Mathematical Research (FIM) at ETH Zürich for enabling him to spend a week at ETH.
Received: March 6, 2025
Final form: June 13, 2025
Accepted: June 23, 2025

1 介绍

1.1 数学背景

黎曼泽塔函数是唯一的全纯函数 $\zeta : \mathbb{C} - \{1\} \to \mathbb{C}$，其在 $\{s : \Re(s) > 1\}$ 上的限制与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 的和一致。

该函数有着悠久的历史，至少可以追溯到欧拉，他证明了关于此函数的两个重要结果：首先是一个令人惊叹的公式 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$（解决了所谓的“巴塞尔问题”）；其次是一个乘积公式

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{†}$$

，这表明 $\zeta(s)$ 和素数之间存在深刻的联系。

黎曼在其 1859 年的划时代论文 [Rie59] 中的贡献是将复分析方法应用于 ζ 函数——首先证明它在 $\{\Re(s) > 1\}$ 之外具有解析延拓，其次证明这个扩展函数的零点和极点的位置控制了素数的分布。利用该函数，黎曼勾勒了一条证明高斯猜想的道路，即当 $X \to \infty$ 时，素数的数量 $\leqslant X$ 渐近于 $\frac{X}{\log X}$。黎曼的计划由哈达玛和德拉瓦莱普桑在 1896 年成功完成，证明了现在被称为*素数定理*的渐近公式。

黎曼 zeta 函数可以被看作是更广泛的一类函数的一个例子：狄利克雷 L-函数 $L(\chi, s)$，与一个狄利克雷字符 χ 模 N 相关联，用于某个 $N \geqslant 1$（即一个群同态 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$）。这里 $L(\chi, s)$ 定义为在 $\{\Re(s) > 1\}$ 上由级数

$$\sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ \gcd(n,N)=1}} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

定义的函数的解析延拓。Dirichlet 引入这些函数是为了研究素数在模 N 的剩余类中的分布；它们在他证明对于任何 a 满足 $\gcd(a, N) = 1$，存在无限多个素数 p 使得 $p \equiv a \bmod N$ 中起到了核心作用。

1.2 本项目中形式化的结果

本文旨在报告一个项目，该项目在 Lean 定理证明器中形式化了 zeta 和 L-函数的定义及其关键属性，并且形式化了上述 Dirichlet 定理的证明，并将这些形式化内容贡献给 Lean 的数学库 Mathlib。

关于在该项目中添加到 Mathlib 的 zeta 函数的定义和定理包括 [1]：

- `riemannZeta`: 黎曼泽塔函数的定义。
- `riemannZeta_two`: 公式 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$。
- `riemannZeta_eulerProduct`: 欧拉乘积公式（†）。
- `riemannZeta_one_sub`: 将 $\zeta(s)$ 与 $\zeta(1-s)$ 相关联的函数方程。
- `riemannZeta_ne_zero_of_one_le_re`：证明对于闭半平面 $\Re(s) \geqslant 1$ 中的所有 s（包括边界 $\Re(s) = 1$ 上）均有 $\zeta(s) \neq 0$。
- `RiemannHypothesis`: “黎曼假设”的一个正式陈述，即除了负偶数处的平凡零点外，$\zeta(s)$ 的所有零点都有 $\Re(s) = \frac{1}{2}$。

[1] 每个声明的名称都是指向其在 Mathlib 参考手册中的条目的链接。注意，命名遵循 Lean 的约定，即术语（如函数或定理证明）的名称以小写字母开头，而类型（如猜想陈述）的名称则以大写字母开头。

对于 Dirichlet 特征也有类似的结果，包括在 $\{s : \Re(s) \geqslant 1\}$ 上不为零。由此我们推导出 `Nat.setOf_prime_and_eq_mo`
关于算术级数中的素数的 Dirichlet 定理。

1.3 相关工作

- 存在一个由 Erdős 和 Selberg 提供的"初等"证明（完全避免了复分析和 zeta 函数），以及另一个较短但不那么初等的解析证明，该证明归功于 Newman。这些已经在多个证明系统中形式化；请参阅 [Kon+] 的引言以获取参考文献。然而，这些论证没有给出误差项如此好的定量界，并且在很大程度上绕过了发展 zeta 函数和 L-函数的理论，而这本身是一个有趣的目標。
- Gomes 和 Kontorovich [GK20] 在 Lean 中形式化了一个关于黎曼假设的陈述 等价，该陈述使用了 Dirichlet η 函数

$$\eta(s) = 1 - \tfrac{1}{2^s} + \tfrac{1}{3^s} - \dots$$

  这个函数对于 $\Re(s) > 0$ 是（条件）收敛的，并且求和结果为 $(1-2^{1-s})\zeta(s)$。将 Gomes–Kontorovich 形式化的黎曼假设版本等价于我们的版本这一定理进行形式化会很有趣，但我们并未尝试这样做。
- Manuel Eberl 及其合作者在定理证明器"Isabelle"中形式化了 Riemann zeta 函数和 L-函数的大量理论 [Ebe19]。在此基础上，Song 和 Yao [SY24] 最近宣布了一个带经典误差项 $O(x\exp(-C\sqrt{\log x}))$ 的质数定理的 Isabelle 形式化。
  尽管这个基于 Isabelle 的项目的主结果与这里描述的 Lean 形式化结果相当（实际上还要更进一步），但在方法论上，特别是在函数方程证明方面存在重大差异。对于这一结果，Riemann 在 [Rie59] 中给出了两个证明。Isabelle 证明基于轮廓积分，而我们遵循 theta 函数证明。正如下面将要看到的，这涉及到一系列有趣结果的形式化，并且有许多自然推广，例如在模形式理论中。
- 基于本文描述的形式化工作，由 Alex Kontorovich 和 Terry Tao 领导的"PrimeNumberTheorem+"项目最近在 Lean 中形式化了素数定理（通过 Wiener–Ikehara 定理）的证明，希望不久能将其合并到 Mathlib 中。PNT+ 项目的未来目标包括对误差项的形式化显式界限，并将结果扩展到算术级数中的素数计数，通过对给定同余类中的素数数量给出渐近值来加强 Dirichlet 定理。[Kon+]$\leqslant X$

2 实现 L 系列于 Mathlib 中

黎曼 ζ 函数、狄利克雷 L-函数和其他众多 L-函数的数论意义与其展开为狄利克雷级数时系数序列及其性质（例如，通过欧拉积表达）有关。因此，实现狄利克雷级数（我们将在下面称为 L-级数）及其相关属性是应用如素数定理或狄利克雷定理的前提。

在该项目的初期，Mathlib 中已经存在了一个基本的 L 系列实现，该实现将一个函数 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 关联到一个"算术函数"f 上；算术函数被实现为具有 $f(0) = 0$ 的函数 $f : \mathbb{N} \to R$（这里 R 是某个半环，在我们的上下文中需要能够转换为 $\mathbb{C}$）。这使得可以写出与算术函数 ζ 相关的狄利克雷级数 L 级数 ζ 或 L 级数 μ（在零以外取值 1）或莫比乌斯函数 μ；但是，例如，带有狄利克雷特征 χ 的 L 级数 χ 或与冯 · 曼戈尔特函数 Λ 相关的 L 级数 Λ 并没有通过类型检查，因为不存在从狄利克雷特征 $\mathbb{C}$ n 或从

算术函数 $\mathbb{R}$ 到算术函数 $\mathbb{C}$ 的强制转换。我们发现当从 R 到 R' 存在强制转换时，很难设置从算术函数 R 到算术函数 R' 的强制转换，因为所需的强制转换实例将包含过多的自由参数；并且硬编码相关情况 $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 导致了大量的代码重复。参见 Lean Zulip 聊天中的讨论 [2]，以了解详细信息以及我们如何到达当前设计的，该设计如下所述。为了避免这些问题，我们将 L 系列的实现改为不使用算术函数的类型。首次尝试使用类型 $\mathbb{N}+ \to \mathbb{C}$ 的论点（其中 $\mathbb{N}+$ 是 $\mathbb{N}$ 由正自然数组成的子类型）被放弃，转而采用下文所述的方法，因为事实证明，在 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}+$ 之间来回转换导致了一些摩擦；此外，还缺少一些针对 $\mathbb{N}+$ 的 API。

我们最终确定的设计是使用函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$，并简单地忽略 f 在零处的值，因此当右边的级数绝对收敛时

$$\texttt{LSeries}\ f\ s = \sum_{n \neq 0} \frac{f(n)}{n^s}$$

（根据 Mathlib 关于拓扑和的规定，否则其值为零）；参见 `LSeries`。为了解决与 L 级数 χ 等相关的问题，我们引入了符号 $\nearrow f$，当存在强制转换 $\mathbb{N} \to A$ 和 $R \to \mathbb{C}$ 时，它将 $f : A \to R$ 强制转换为从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{C}$ 的函数。我们引入谓词

`LSeriesHasSum` 和 `LSeriesSummable` 来讨论当一个 L 级数收敛的情况。

事实证明,借助这种设置,L 级数的操作形式化及其性质的处理相当顺利。这包括,例如,Dirichlet$L$ 级数的欧拉乘积表示。

L 级数的基本理论在大约 1400 行 Lean 代码中发展，这些代码分布在 `Mathlib/数论/L 级数`下的各种文件中，而欧拉乘积表示的推导（在`数学库/数论/欧拉乘积`下的文件中）则需要另外 500 行左右的代码。

3 从傅里叶分析到齐塔函数

3.1 傅里叶分析

对于我们处理 zeta 和 L-函数的关键分析输入是傅里叶级数理论，用傅里叶基函数 $x \mapsto e^{2\pi i n x}$ 表示函数 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$（即定义在 $\mathbb{R}$ 上且周期为 1 的函数）对于 $n \in \mathbb{Z}$。

在这个项目开始时，Mathlib 已经包含了一些傅里叶理论的重要结果（主要是 Heather Macbeth 贡献的），这些结果一直延伸到证明傅里叶基函数是希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 中平方可积函数 [3] 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$(`hasSum_fourier_series_L2`) 上的一个正交基。为了我们的应用，我们需要形式化更多傅里叶理论中的额外结果：

- 傅里叶级数的一致收敛：如果 f 是在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的连续函数，使得 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$，其中 $c_n(f)$ 是 n-th Fourier 系数 $\int_0^1 e^{-2\pi i n z} f(z)\,\mathrm{d}z$，那么 f 的傅里叶级数绝对且一致收敛到 f。
- 傅里叶变换 对整个实线上的函数的定义及其基本性质。

[2] https://leanprover.zulipchat.com/#narrow/channel/144837-PR-reviews/topic/.2310725.20and.20.2310728.3A.20L-series/near/422590170

[3] 更准确地说，几乎处处相等的函数的等价类。

- 泊松求和公式：如果 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是连续且绝对可积的，并且 f 及其傅里叶变换 $\hat{f}$ 在 $\pm\infty$ 处有足够快的衰减，则
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

连续函数的一致收敛性结果可以从 L^2 版本推导出来，通过论证如果 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$，则傅里叶级数必须一致收敛到一些事物；而由于一致收敛意味着 L^2 收敛，并且我们知道该级数在 L^2 中收敛到 f，因此它实际上必须一致收敛到 f。这被形式化为 hasSum_fourier_series_of_summable。

为了推导泊松求和公式，我们证明对于任何足够良好的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，函数

$$F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

是一个连续周期函数，并且它的傅里叶系数由 $c_n(F) = \hat{f}(n)$ 给出。因此，泊松的求和公式相当于函数 F 的傅里叶级数在点 0 处逐点收敛，这是前面定理的一个应用。这被形式化为 Real.tsum_eq_tsum_fourierIntegral_of 假设 f 是连续的，并且 $|f|$ 和 $|\hat{f}|$ 在无穷大处以 $O(|x|^{-b})$ 衰减，对于某些 $b > 1$。

该项目的傅里叶分析部分大约相当于 Mathlib 中的 1400 行代码。

备注

注意在这个公式中我们对 f 和 $\hat{f}$ 都有衰减假设。这在我们的应用中很容易验证，其中 f 和 $\hat{f}$ 都是高斯函数。然而，在其他应用中，将所有假设都用 f 单独表达是有利的。基于上述贡献，S. Gouëzel 最近向 Mathlib 添加了一个证明，即 Schwartz 函数的 Fourier 变换也是一个 Schwartz 函数，从而得出 Poisson 求和公式对任何 Schwartz 函数都成立（SchwartzMap.tsum_eq_tsum_fourierIntegral）。

3.2 雅可比 θ 函数

雅可比 *theta* 函数 $\theta(\tau)$ 被定义为对于 $\tau \in \mathbb{C}$ 和 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ 的级数

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}.$$

在 Mathlib 中，这被定义为 jacobiTheta。该函数的许多性质，如在 τ 中的全纯性和在 $\tau \mapsto \tau + 2$ 下的周期性，都直接从定义得出。一个更为深刻的对称关系是变换法则（jacobiTheta_S_smul）

$$\theta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\theta(\tau).$$

。这是通过对高斯函数 $x \mapsto e^{\pi i x^2 \tau}$ 应用泊松求和公式推导出来的，其傅里叶变换是另一个将 τ 替换为 $\frac{-1}{\tau}$ 的高斯函数；这是一个著名的高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ 版本，最近由 S. Gouëzel 贡献给了 Mathlib（integral_gaussian）。由于梅林变换 $\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\theta(it)-1}{2}\,\mathrm{d}t$ 是 $\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$，这给出了 ζ 函数的亚纯延拓和函数方程。

为了将此扩展到狄利克雷特征 L-级数，需要考虑更一般的两变量 theta 函数（形式化为雅可比 theta 函数 $_2$）

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n z + \pi i n^2 \tau}.$$

这满足一个泛函方程，推广了一变量函数的方程（并且通过相同的方法证明）；其梅林变换给出了偶赫尔维茨 zeta 函数（HurwitzZeta.hurwitzZetaEven ）的解析延拓和泛函方程。

$$\zeta_\alpha^{\mathrm{ev}}(s) = \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n+\alpha\neq 0}} \frac{1}{|n+\alpha|^s}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

通过对值 $\alpha = \frac{k}{N}$ 在 $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上取适当的加权和，我们可以获得任意即使狄利克雷特征（满足 $\chi(-1) = 1$）的解析延拓和泛函方程。

为了包含奇数 Dirichlet 特征的情况，我们需要研究另一种形式的 theta 级数（雅可比 theta 函数 $'_2$），其定义为

$$\theta'(z,\tau) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi i n\, e^{(2\pi i n z + \pi i n^2 \tau)}.$$

这与奇 Hurwitz zeta 函数（HurwitzZeta.hurwitzZetaOdd）相关，该函数定义为

$$\zeta_\alpha^{\mathrm{odd}}(s) = \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n+\alpha\neq 0}} \frac{\mathrm{sign}(n+\alpha)}{|n+\alpha|^s},$$

如前所述，我们可以通过对 $\alpha = \frac{k}{n}$ 求和来获得奇 Dirichlet 特征的 L 函数。

在 Mathlib 对上述结果的实现中，雅可比 theta 函数的定义和性质大约占用了 900 行代码，而狄利克雷 L-函数的解析延拓和功能方程的证明则另外占用了 3300 行。（这个出人意料的大总数部分是因为几个中间步骤——例如，在后者收敛时将 $\int_0^\infty t^{s-1} \frac{\theta(it)-1}{2}\,\mathrm{d}t$ 与 $\sum_n n^{-s}$ 相关联所需的交换积分和求和次序的合理性验证——以比该项目绝对需要更广泛的情况完成了，以便于以后进行推广；见下文。）

备注

由于上述关于泊松求和公式和雅可比 θ 函数的结果被添加到 Mathlib 中，它们找到了一个令人惊讶且出乎意料的实际应用：θ 函数的变换公式在实现亚马逊网络服务中的隐私保护计算的验证算法时得到了使用。[Med+24]

3.3 推广

雅可比 θ 函数是权为 $\frac{1}{2}$（且级数为 4）的模形式的一个示例。我们在项目中用于证明黎曼 ζ 函数和狄利克雷 L-函数解析延拓和函数方程的论证是更一般论证的特殊情况，这些论证可以用来证明任何模形式的 L-函数的类似结果。

因此，我们已经在一个公理框架中建立了这些论点，该框架旨在应用于任何模形式 L 函数，遵循了 [DS05, Chapter 5] 中的论证。我们引入一个我们称之为“函数方程对”或简称“FE-pair”的概念：这是一对局部可积函数 f, g 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上，使得

- $f(x)$ 和 $g(x)$ 每个都有形如（常数）+（快速衰减项）的形式，当 $t \to \infty$，
- $f(1/x) = \varepsilon x^k g(x)$ ，对于某个正实数 k 和复数 ε。

上述定义形式化为 WeakFEPair（其中 StrongFEPair 是 f, g 在 ∞ 处的常数项都为零的特殊情况）。我们证明对于任意的 FE 对，f 和 g 的 Mellin 变换具有亚纯延拓（极点和留数由 f 和 g 的渐近性确定）并且满足一个将值关联在 s 和 $k-s$ 之间的函数方程（WeakFEPair.functional_equation）。

FE-对的基本示例是 $f(x)=g(x)=\theta(ix)$（带有 $k=\frac{1}{2}$）；两个变量的 theta 函数也产生了 FE-对，再次与 $k=\frac{1}{2}$ 相关。在 Mathlib 中模形式理论的形式化正在进行中；我们希望在未来项目中使用 FE-对框架来形式化解释更高权重模形式的 L-函数的性质。

4 L 函数的特殊值

最后，我们描述了欧拉的“巴塞尔问题”公式 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ 及其推广形式的公理化。我们对这些内容进行公理化的证明也使用了傅里叶分析，尽管与上述方法有所不同。它是通过对“周期伯努利函数” `periodizedBernoulli` 的研究产生的，即在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的唯一函数，其限制到 $[0,1)$ 的值是第 k 个伯努利多项式 $B_k(x)$。一个标准计算表明这个函数的 n 阶傅里叶系数是 $\frac{-k!}{(2\pi in)^k}$。对于偶数 $k\geqslant 2$，在点 0 处考虑逐点和，并应用上述关于傅里叶级数收敛的结果，给出了用第 $2k$ 个伯努利数 $B_{2k}(0)$ 表示的 $\zeta(2k)$ 的标准公式（`riemannZeta_two_mul_nat`）。这包括巴塞尔问题作为特殊情况。

该方法可立即推广到计算 Hurwitz zeta 函数的值。结果最简洁地表述为在负的整数处的值：

$$\zeta_\alpha(-k)=\frac{-B_{k+1}(\alpha)}{k+1}\quad \text{for } \alpha\in[0,1] \text{ and } k\geqslant 1\ .$$

这形式化为 `HurwitzZeta.hurwitzZeta_neg_nat`。

我们方法的一个缺点是，我们必须排除情况 $k=0$。在这种情况下，上述公式对于 $\alpha\in(0,1)$ 仍然有效；但我们的证明不再适用，因为相关的傅里叶级数具有 $c_n(f)=-1/(2\pi in)$，因此不满足条件 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|<\infty$。例如，格雷戈里—莱布尼茨公式 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$，给出了模 4 的唯一非平凡狄利克雷特征的 L-级数在 $s=1$ 处的值，并不是我们的结果 [4] 的特殊情况。包括这种情形将需要扩展 Mathlib 的傅里叶理论库，增加更多关于周期函数的傅里叶级数收敛到该函数的一般条件（例如有界变差函数的狄利克雷—乔丹判别准则）；这将是未来一个有趣的项目。

5 陷阱：总体化函数

数学上，$\zeta(s)$ 的自然定义域是“刺破的复平面” $\mathbb{C}-\{1\}$；没有合理的定义将 $\zeta(1)$ 视为 $\mathbb{C}$ 的元素。然而，在形式化证明时，使用在子类型上定义的函数会带来不便；因此通常的做法是通过在坏点处赋值无效值来将部分定义的函数扩展成全函数，例如许多定理验证器（包括 Coq、Isabelle 和 Lean）使用的惯例 $1/0=0$[Buz20]。

因此 Mathlib 的 `riemannZeta` 函数对所有复数（包括 1）都有一个明确定义的值。然而，这个垃圾值并不是明确选择的，而是从构造早期阶段其他垃圾值的选择中“传播”过来的。这导致了以下稍微令人尴尬的一幕。当第一作者最初宣布对黎曼假设的形式化时，声明相当于：

> 如果 $s\in\mathbb{C}$ 不是严格负的偶数整数，并且 $\zeta(s)=0$，则 $\Re(s)=\frac{1}{2}$。

[4] 该特定公式已作为 `Real.tendsto_sum_pi_div_four` 存在于 Mathlib 中，但所使用的方法似乎无法推广到其他 Dirichlet 特征。自本文初稿撰写以来，X. Roblot 已向 Mathlib 贡献了 Dedekind 类数公式的证明，适用于一般数域，`NumberField.tendsto_sub_one_mul_dedekindZeta_nhdsGT`；将其应用于二次域时，应该相对容易推导出任何二次 Dirichlet 特征的 $L(\chi,1)$ 公式。

正如 K. Buzzard 和 J. Ellenberg（在 Buzzard 关于这项工作的 Twitter 帖子之后的讨论中）指出的，如果 $s = 1$ 存在一个问题。我们的构造为表达式黎曼泽塔 1 分配了一些值；但这个值是什么远非显而易见。如果这个垃圾值碰巧是零，那么我们所制定的猜想就不是黎曼假设；它将显然是错误的！

幸运的是，我们能够证明 Mathlib 中的 $\zeta(1)$ 定义具有非零值：它是 $\frac{1}{2}(\gamma - \log 4\pi)$，其中 γ 是 Euler–Mascheroni 常数。这个看起来很奇特的公式是因为 zeta 函数在三个步骤中定义：

(1) 首先，我们定义函数

$$\Lambda_0(s) = \int_1^\infty (t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{\theta(it) - 1}{2} \, \mathrm{d}t,$$

它是整个 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数；

(2) 我们定义 $\Lambda(s) = \Lambda_0(s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$；

(3) 最后我们定义 $\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \Lambda(s)$（在 $s = 0$ 处进行了修正）。

在第 2 步引入了 $s = 1$ 处的“垃圾值”，因为 $\frac{1}{1-1}$ 被定义为 0。由此可知，Mathlib 对 $\zeta(1)$ 的定义等于极限

$$\Lambda_0(1) - 1 = \lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{\pi^{s/2}}{(s-1)\Gamma(s/2)} \right),$$

，并且通过一个冗长而非常微妙的计算，利用公式 [5] $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ 和 Gamma 函数的性质表明，该极限确实为 $\frac{1}{2}(\gamma - \log 4\pi)$。有了这一点，就不难对所涉及的常数给出充分好的界限来表明 $\zeta(1) \neq 0$(riemannZeta_one_ne_zero)；其实际值约为 -0.98。

备注

这样的疏忽可能在通过人工智能自动发现证明的过程中产生不幸的后果。在这种情况下，对猜想陈述形式化的错误可能导致数学家们相信某个猜想已经被证明（或证伪），而实际上系统证明或证伪的是一个表面上类似但实际上容易得多的陈述，在表述猜想时“利用”了一个在某些数学上不有趣的特例中的疏忽。

6 在算术级数中的素数应用

我们可以使用关于 L 级数的通用结果和关于狄利克雷 L 级数解析延拓的具体结果，按照经典的分析证明方法来证明算术级数中的素数定理。

这里需要的一个关键要素是证明狄利克雷 L-函数在关闭右半平面 $\Re(s) \geqslant 1$ 上不为零。当 $s \neq 1$ 或狄利克雷特征不是二次时，这很容易从欧拉积表示和某个三角多项式的非负性得出。剩下的情况是 $L(\chi, 1) \neq 0$ 当 χ 是一个二次狄利克雷特征时，则需要更微妙的论证。我们证明了如果一个带有非负实系数（且在 1 处有正系数）的 L 级数在某个半平面内收敛，并作为整函数具有解析延拓，则其解析延拓在整个 $\mathbb{R}$ 上必须取正值（LSeries.positive_of_differentiable_of_eqOn）。假设 $L(\chi, 1) = 0$，我们得到 $L(\chi, s)\zeta(s)$ 可以延拓为一个整函数（$L(\chi, \cdot)$ 的零点消除了 ζ 的极点），并且它是一个具有非

[5] 该定理（tendsto_riemannZeta_sub_one_div）实际上是为了这个特定目的专门添加到项目中的。

负系数的 L 级数，因此在特别的情况下，在 $s=-2$ 处一定是正的。但是 $\zeta(-2)=0$，导致矛盾。这建立了普遍的非零结果，`DirichletCharacter.LFunction_ne_zero_of_one_le_re`。

为了证明 Dirichlet 定理，我们考虑将函数发送到 n 的 L 级数（其中 Λ 是 von Mangoldt 函数）在 $n \equiv a \bmod q$ 时为 $\Lambda(n)$，否则为零。我们在 `ArithmeticFunction.vonMangoldt.LSeries_residueClass_eq` 中证明了这个 L 级数是与模 q 的狄利克雷特征相关的 L 级数的对数导数的线性组合。这一证明步骤使用了（狄利克雷）特征的正交关系，这也是我们为 Mathlib 所贡献的内容。上述非零结果意味着这些对数导数除在 $s=1$ 处有一个简单极点外，可以连续地扩展到 $\Re(s) \geqslant 1$，当 a 和 q 互质时。这个简单极点的存在很快就能导致证明 $\sum_{n \equiv a \bmod q} \Lambda(n)/n$ 发散，进而很容易推导出无穷多素数 $p \equiv a \bmod q$ 的存在。我们以两个版本陈述这个最终结果，

`Nat.setOf_prime_and_eq_mod_infinite`（这些素数的集合是无限的）

和

`Nat.forall_exists_prime_gt_and_eq_mod`（对于每一个自然数 n，都存在一个更大的素数 $p \equiv a \bmod q$）。

正性结果需要大约 100 行，正交性大约 60 行，非零结果大约 400 行，以及最终结果另外 400 行的 Lean 代码。

7 致谢

我们想感谢众多参与此处描述的形式化项目的 Lean 社区成员，特别是 Chris Birkbeck、Riccardo Brasca、Kevin Buzzard、Johan Commelin 和 Sébastien Gouëzel。我们也感谢匿名审稿人对论文的仔细阅读和敏锐评论。

该项目的关键部分（在收敛横坐标上 L 函数的非零性）是在 2024 年 10 月，当 Birkbeck 和第二作者作为数学研究所 (FIM) 的客人访问苏黎世联邦理工学院期间撰写的。我们感谢 FIM 及其工作人员的热情款待。

References

[Buz20] K. Buzzard. *Division by zero in type theory: a FAQ*. Xena Project blog. 2020. url: https://xenaproject.wordpress.com/2020/07/05/division-by-zero-in-type-theory-a-faq/.

[DS05] F. Diamond and J. Shurman. *A First Course in Modular Forms*. Volume 228. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.

[Ebe19] M. Eberl. “Nine Chapters of Analytic Number Theory in Isabelle/HOL”. In: *10th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2019)*. Edited by J. Harrison, J. O’Leary, and A. Tolmach. Volume 141. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2019, 16:1–16:19. doi: 10.4230/LIPIcs.ITP.2019.16.

[GK20] B. Gomes and A. Kontorovich. *Riemann Hypothesis in Lean (with or without Mathlib)*. REU project, Rutgers University. 2020. url: https://github.com/AlexKontorovich/Lean-RH.

[Kon+] A. Kontorovich et al. *The Prime Number Theorem And...* Project blueprint. url: https://alexkontorovich.github.io/PrimeNumberTheoremAnd/web/.

[Med+24] M. de Medeiros et al. *Verified Foundations for Differential Privacy*. arXiv preprint. 2024. url: https://arxiv.org/abs/2412.01671.

[Rie59] B. Riemann. “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse [On the number of prime numbers less than a given size]”. In: *Monatsberichte Berliner Akademie* (1859). English translation by D.R. Wilkins: https://www.claymath.org/wp-content/uploads/2023/04/Wilkins-translation.pdf.

[SY24] S. Song and B. Yao. *Prime Number Theorem with Remainder Term*. Archive of Formal Proofs. 2024. url: https://isa-afp.org/entries/PNT_with_Remainder.html.