# Figiel-Lindenstrauss-Milman 定理的一个非常简洁的证明

Tomer Milo



本笔记的目的是为以下定理提供一个新的证明，该定理最初由 Figiel、Lindenstrauss 和 Milman 在 [2] 中证明：

**定理 1.** *存在一个绝对常数 $c > 0$，使得对于每一个 $n \in \mathbb{N}$ 和每一个关于原点对称的凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$（也就是说，$P = -P$），我们有：*

$$\log |V| \cdot \log |\mathcal{F}| \geq cn$$

*其中 $V$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是 $P$ 的顶点（0 维面）和 facet（$(n-1)$ 维面）的集合。此外，对于满足 $B_n \subset P \subset \sqrt{n}B_n$ 的一般多面体 $P$，相同的估计也成立，其中 $B_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得单位球，并且实际上可以取 $c = c_n = \frac{1}{9} + o(1)$ 为 $n \to \infty$，其中 $\log$ 是以 $e$ 为底的标准对数。*

定理对满足 $B_n \subset P \subset \sqrt{n}B_n$ 的一般多面体 $P$ 成立这一事实意味着它也适用于每个原点对称的多面体；这是约翰定理的结果，我们现在陈述该定理。关于约翰定理的一个很好的阐述可以在 [1, Section 2] 中找到。

**定理 2.** *(约翰) 令 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为使得 $K = -K$ 的。存在一个线性变换 $T$，使得 $B_n \subset T(K) \subset \sqrt{n}B_n$。*

确实，对于一个原点对称的多面体 $P$，我们可以应用一个适当的线性变换 $T$，使得 $B_n \subset T(P) \subset \sqrt{n}B_n$。由于 $T$ 不改变 $P$ 的组合结构，定理 1的对称部分将随之而来。
定理 1是作为 Dvoretzky 定理的结果经典证明的；参见 [1, section 5] 中对 Milman 的经典证明及其应用的阐述。这里我们提供了一个新的证明，完全避免了 Dvoretzky 定理（以及 Dvoretzky-Rogers 引理），并且也避开了 Euclidean 球面上的 Lipschitz 函数的经典集中不等式 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$，该不等式是通过 Levy 的球面等周不等式证明的。我们只需要以下简单的集中结果，其中可以找到一个初等证明在 [1, Theorem 3.1.5] 中：

**引理 3.** *令 $\sigma$ 表示欧几里得单位球面上唯一的旋转不变概率测度 $S^{n-1}$。对于每一个 $u \in S^{n-1}$ 和每一个 $\varepsilon \in (0,1)$，*

$$\sigma(\{\theta \in S^{n-1} : \langle \theta, u \rangle < \varepsilon\}) > 1 - e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$

我们证明了定理 1对于一般多面体 $P = \mathrm{conv}(V) \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $B_n \subset P \subset \sqrt{n}B_n$。在整个证明过程中，符号 $c, C, c_1$ 等表示正绝对常数，其值在不同的行中可能不同。设 $\|x\|_P = \inf\{t : x \in tP\}$ 表示 $P$ 的量规函数，并设 $h_P(x) := \max_{y \in P}\langle x, y\rangle = \max_{v \in V}\langle x, v\rangle$。我们引入以下两个参数：

$$M(P) = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_P d\sigma(\theta), \quad M^*(P) = \int_{S^{n-1}} h_P(\theta) d\sigma$$

并注意简单的关系 $M^*(P) = M(P^\circ)$，其中 $P^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{y \in P}\langle x, y\rangle \leq 1\}$ 是 $P$ 的对偶体。我们证明的主要成分是对 $M^*(P)$ 在 $P$ 顶点方面的以下已知界限。

**引理 4.** 令 $P \subset RB_n$ 为一个顶点集为 $V$ 的多面体，使得 $\log|V| < \frac{n}{3}$。则

$$M^*(P) := \int_{S^{n-1}} h_P d\sigma \le CR\sqrt{\frac{\log|V|}{n}}$$

其中 $C = C_n = \sqrt{3} + o(1)$ 作为 $n \to \infty$。

*证明.* 我们写出 $h_P(\theta) = \max_{v \in V}\langle v, \theta\rangle$。令 $B_t = \{\theta \in S^{n-1} : h_P(\theta) \le t\}$。使用引理 3和再次运用并集界得到：

$$M^*(P) = \int_{S^{n-1}} \max_{v \in V}\langle v, \theta\rangle d\sigma = \int_{B_t} \max_{v \in V}\langle v, \theta\rangle d\sigma + \int_{S^{n-1}\setminus B_t} \max_{v \in V}\langle v, \theta\rangle d\sigma \le t + R|V|e^{-\frac{1}{2}n(\frac{t}{R})^2}.$$

选择 $t = R\sqrt{\frac{3\log|V|}{n}}$ 并利用事实 $|V| > n$ 得到

$$M^*(P) \le R\left(\sqrt{\frac{3\log|V|}{n}} + \frac{1}{\sqrt{|V|}}\right) \le \left(\sqrt{3} + o(1)\right) R\sqrt{\frac{\log|V|}{n}},$$

其中 $o(1)$ 项的衰减率至多为 $\frac{1}{\sqrt{\log n}}$。

$\square$

我们将引理 4应用于对偶多面体 $P^\circ$。我们使用以下事实：$M^*(P) = M(P^\circ)$，$R(P) = \frac{1}{r(P^\circ)}$ 其中 $r = r(P^\circ)$ 是使得 $rB_n \subset P^\circ$ 成立的最大 $r$，并且 $P$ 的面数 $\mathcal{F}$ 等于 $P^\circ$ 的顶点数。我们得到：

$$M(P) \le \left(\sqrt{3} + o(1)\right) \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\log|\mathcal{F}|}{n}}. \tag{1}$$

*定理的证明 1.* 结合引理 4和 (1)（注意，如果引理 4的条件 $\log|V| < \frac{n}{3}$ 不满足，则无需证明），使用平凡界 $M(P)M^*(P) \ge 1$ 和我们的假设 $\frac{r}{R} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$，我们最终得到：

$$\log|V| \cdot \log|\mathcal{F}| \ge \left(\frac{1}{9} + o(1)\right) n^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 (M(P)M^*(P))^2 \ge \left(\frac{1}{9} + o(1)\right) n$$

$\square$

# 参考文献


[1] Artstein-Avidan S., Giannopoulos A., Milman V.D., *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*. Mathematical Surveys and Monographs, volume 202, American Mathematical Society, Providence, RI. (2015).

[2] Figiel, T., Lindenstrauss, J., Milman, V.D. *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*. Acta Math. 139, 53 − 94 (1977). https://doi.org/10.1007/BF02392234