

基于同步字的量子重置协议

J drzej Stempin, Jan Wójcik, Andrzej Grudka, Marcin Karczewski, Paweł Kurzyński,* and Antoni Wójcik
*Institute of Spintronics and Quantum Information, Faculty of Physics,
Adam Mickiewicz University, 61-614 Poznań, Poland*

(10Dated: 2025 年 4 月 6 日)

系统状态的复位在物理学、工程学、计算机科学以及许多其他领域中扮演着基础性的角色。在这里，我们专注于一种最初在自动机理论中提出的方法。自动机的状态根据一组规则演变。这些规则构成一个字母表，人们可以依次应用这些规则。这样的一系列规则被称为词。一些特定的词，即同步词，能够使系统无论其初始配置如何都演变成预定状态。这个过程本质上是不可逆的，在表面上似乎与量子力学中的么正性相矛盾。么正演化保留信息，因此禁止这种经典意义上的复位到预定状态。在这项工作中，我们通过引入辅助量子比特来编码自动机字母表的规则，提出了基于量子同步词的新复位协议。进一步地，我们提出了一种实现该协议的量子电路，并且可以在量子计算机上实施。此外，我们建立了这种方法与 Kraus 通道之间的联系，表明可以无需明确参考辅助量子比特的状态就能实现量子同步词。我们的结果将经典和量子同步词的概念结合起来，揭示了量子信息处理与非么正动力学之间的相互作用。

介绍

同步是一个广泛的概念，出现在科学的各个领域。在物理学中，它通常被认为是一种现象，在这种现象中，两个或更多的振荡器趋向于相同的频率和相位。然而，在计算机科学中，特别是在自动机理论中，同步是将自动机带到预定状态的过程，无论其初始状态如何 [1, 2]。尽管表面上有所不同，这两种同步概念有一个重要的共同特征：它是一个压缩系统允许状态空间的过程。

为了说明自动机同步，考虑一个具有独特锁定机制的高度安全的银行保险箱。只有输入正确的数字代码，从 0 到 9，保险箱才会解锁。然而，输入错误的数字会导致其内容不可逆地被破坏。保险箱通过三个按钮操作： a 、 b 和 “Enter”。内部系统从一个未知的初始状态开始，即某个预定的数字，并且按下 a 或 b 会对该状态应用确定性的变换。尽管 a 和 b 的功能是公开已知的，但由于缺乏对初始状态的知识，确定达到正确代码所需的精确操作序列极为困难。因此，即使变换和最终密码都是公开的，不触发破坏而打开保险箱仍然是一项艰巨的挑战。

这个问题强调了同步协议的重要性——一个由 a 和 b 构成的算法序列，确保收敛到唯一的最终状态，无论初始条件如何。这类序列被称为同步字 [1–5]，在自动机理论中占据核心地位，并在控制理论、编码和符号动力学中有广泛的应用。一个设计良好的同步协议将允许保险箱可靠地被打开，绕过初始状态的不确定性。

在本文中，我们将同步单词的概念扩展到量子系统。一个自然的初步方法是将经典同步方案翻译成么正量子

动力学的语言。然而，一个基本挑战出现了：为了实现同步，必须存在将多个初始状态映射到同一最终状态的操作。这一要求与么正演化的可逆性相冲突，使得直接翻译成为不可能。

为了克服这一限制，我们提出了一种通过引入辅助子系统来实现量子自动机复位的方法。我们展示了如何在量子计算机上对任意数量的状态实施这种方法。此外，我们探索了一个基于噪声 Kraus 通道的替代框架，该框架能够在不明确提及额外子系统的状态的情况下实现复位。这一方法自然地扩展了我们之前提出的概念 [6]，并为开发有效且通用的量子计算工具奠定了坚实的基础。

经典自动机理论中的同步单词

一个确定有限自动机 (DFA) 被正式定义为一个 5 元组 $(Q, \Sigma, \delta, F, q_0)$ ，其中 Q 表示可能状态的非空集合， Σ 表示输入字母表， $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ 是控制系统动态的转移函数， $F \subseteq Q$ 是接受状态集，而 $q_0 \in Q$ 是初始状态 [7]。整个字母表 Σ 上的语言表示为 Σ^* 。DFA 可以被表示为有向图的集合，其中每个图对应于函数 $\delta_a: Q \rightarrow Q$ 的操作，该函数定义为 $\delta_a(q) = \delta(q, a)$ 对于特定符号 $a \in \Sigma$ 和任何 $q \in Q$ 。给定一个转换函数 δ 和一个输入词 (来自 Σ 的符号序列)，可以确定 DFA 的结果状态。一个词 $\bar{w} \in \Sigma^*$ ，无论初始状态如何，都能将自动机驱动到同一最终状态，则称为同步词。已经开发了几种算法来识别给定 DFA [1–5] 的同步词。

对于仅由循环组成的 DFA，同步词不存在，因为同

步/重置需要存在收缩点，即多个边汇聚的节点。这一特性对于动力学的不可逆性至关重要。因此，我们将分析集中在带有附加连接到主循环的节点的修改后的循环上。一个基本案例涉及两个状态和两个输入符号的 DFA，如图 1 所示。

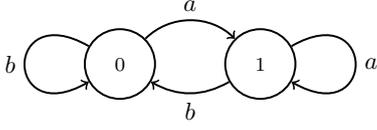


图 1: 简单的 DFA 示例由 $Q = \{0, 1\}$ 和 $\Sigma = \{a, b\}$ 组成。对于每个初始位置的情况，由单个字母组成的单词是同步词。

此基本模型可以通过在外部回路中加入额外的节点进行推广。我们将符号 a 对应的图作为参考，其中节点按升序标记。符号 b 的图可以通过对参考图应用置换 π 得到。这两个图如图 2 所示。为了简化分析，我们假设 $\pi_0 = 1$ 和 $\pi_1 = 0$ 。为了简单起见，我们将排列中 $\pi_0 = 1, \pi_1 = 0$ 和 $\pi_k = k$ 对于 $k \geq 2$ 定义为一个置换 $\pi = (1, 0)$ 。在这种情况下，其中 $\pi = (1, 0)$ ，最短的同步词 \bar{w} 表示为：

$$\bar{w} \equiv a^{(n-1) \bmod 2} (ab)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \quad (1)$$

其中 n 是节点的数量。我们采用从右到左读取单词的习惯，与量子操作的标准顺序保持一致。这种方法确保了与管理量子变换的数学形式主义的一致性。这个同步词总是将 DFA 导向状态 1。反之，交换 a 和 b 可以得到一个终止于状态 0 的同步词。值得注意的是，在这个示例中，同步词的长度恰好是 $n - 1$ 。

统一协议用于同步单词

众多技术已被引入用于实现量子元胞自动机 [8-13]。在本文中，我们提出了一种新的量化方法，该方法保持了与同步词概念的最大兼容性。

有向图上的演化由于存在收缩而难以量化。然而，这一限制可以通过添加辅助控制系统来克服。我们提出了一种形式主义，在这种形式主义中，DFA 的状态由希尔伯特空间 \mathcal{H}_s 中的向量描述。字母表中的单个字母被编码为量子比特空间中的向量。因此，一个 k 字母单词及其对应节点的总状态通过属于张量积空间的一个向量进行编码。 $\mathcal{H}_2^{\otimes k} \otimes \mathcal{H}_s$

在我们的模型中，任意给定的时间步长内，系统仅与特定的量子比特 j 相互作用。这种相互作用由一个么正算子 U_j 描述，该么正算子根据方程 2 中写的置换规则定义。

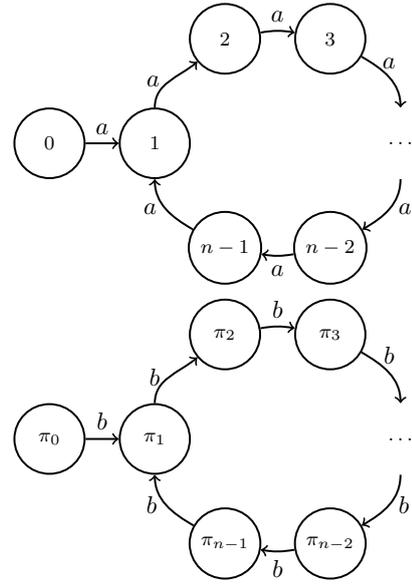


图 2: 与字母 a (上部) 和字母 b (下部) 对应的图，适用于所考虑系统的通用情况。

$$\begin{array}{ccc} |a\rangle_j |0\rangle & \leftarrow & |b\rangle_j |\pi_{n-1}\rangle \\ \downarrow & & \uparrow \\ |a\rangle_j |1\rangle & & \dots \\ \downarrow & & \uparrow \\ |a\rangle_j |2\rangle & & |b\rangle_j |\pi_2\rangle \\ \downarrow & & \uparrow \\ \dots & & |b\rangle_j |0\rangle \\ \downarrow & & \uparrow \\ |a\rangle_j |n-1\rangle & \rightarrow & |b\rangle_j |1\rangle \end{array} \quad (2)$$

对于前一节讨论的特定情况，其中 $\pi = (0, 1)$ ，从图态的任意叠加开始，可以通过应用等式 2 中定义的么正操作序列来确定系统的最终状态。 $n = 4$ 节点的变换如下进行：

$$\begin{aligned} U_3 U_2 U_1 |a\rangle_3 |b\rangle_2 |a\rangle_1 \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle) = \\ = (\alpha|aba\rangle + \beta|bba\rangle + \gamma|aaa\rangle + \delta|abb\rangle) \otimes |1\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

同步量子电路

让我们考虑具有 n 个节点的图，其中 n 是 2 的幂。对于实际的量子实现，我们将节点编码为多个量子位的状态 $\{g_1, \dots, g_m\}$ ，其中需要 $m = \log_2 n$ 个量子位来表示 n 个节点。此外，我们引入控制量子比特 $\{q_j\}_{j=0}^{n-1}$ ，每一步 j

都涉及量子比特与仅一个控制量子比特 q_j 之间的相互作用。整个门实现由等式 2 定义的操作符 U_j 。为了表示方便，我们将 $|a\rangle$ 与量子比特的状态 $|0\rangle$ 以及 $|b\rangle$ 与 $|1\rangle$ 对应起来。

提出的量子电路，如图 3 所示，由以下三个主要组件组成。

1. **基变换算子 T** 此算子将输入向量变换到一个基中，在该基中演化表现为在一个由位置空间和辅助量子比特空间组成的 $2m$ 维空间上的简单平移。它需要条件操作，该操作将按顺序数字索引的节点映射到根据置换映射 π 重新索引的节点，当控制量子比特处于状态 $|1\rangle$ 时，字母 b 。此实现可以通过应用以下内容来实现：

$$T = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes T_g \quad (4)$$

其中：

$$T_g = \sum_{i=1}^m |\pi_i\rangle\langle i| \quad (5)$$

在图 4 中，我们展示了最简单情况下 $\pi = (1, 0)$ 的 T 门。

2. **移位算子 S** 此算子实现了循环索引递增，这对于根据公式 2 中的规则保持正确的演化动力学至关重要。

$$S = \sum_{i=1}^{2m} |(i+1) \bmod 2m\rangle\langle i| \quad (6)$$

3. **逆变换 T^\dagger** 该算子旋转回计算基，在此基中某个节点的二进制表示与原始设置相符。

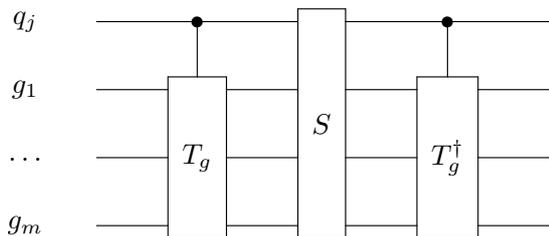


图 3: 与仅涉及一个辅助量子比特交互的动态过程一步相对应的电路。

上述每个门都可以通过选定状态之间的交换操作序列构建。这种方法是有用的，因为任何置换都可以分解为

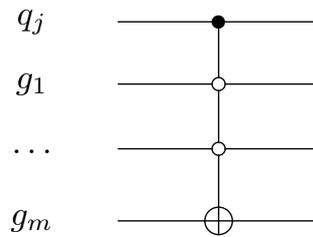


图 4: 总 T 门用于 $\pi = (1, 0)$ 的情况。

2-循环（换位）的乘积。例如，在 $\pi = (1, 0)$ 采用多控 $CNOT$ 门的形式，如图 4 所示的情况下，操作符为 T 。

相同的方法学可以应用于推导移位算子的分解。很容易证明移位置换可以表达为下列形式的 2-圈的乘积：

$$\begin{aligned} & (2m-1, 0, \dots, 2m-2) = \\ & = (2m-1, 0)(2m-1, 1) \dots (2m-1, 2m-2) \end{aligned} \quad (7)$$

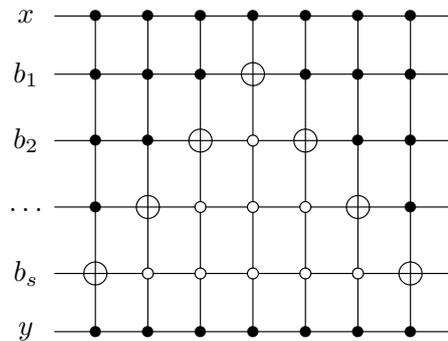


图 5: 状态之间的一般交换 k 和 $2m$ ，其中 b_1, \dots, b_s 表示二进制表示中值为 0 的位，而 k 和 x, y 表示所有值为 1 的位。为了更简洁地反映底层结构，这个电路中的量子比特顺序已经进行了更改。

因此，应将最高值状态 $2m-1$ 和某个数 k 之间的置换序列应用在特定步骤中选择的。接下来，可以利用 $2m-1$ 的二进制表示是一个长度为 $\log_2(2m)$ 的简单的一系列 1 的事实。利用这个事实，每个置换应按照以下步骤构建：如果 b_1, \dots, b_s 表示状态 k 的二进制表示中为 0 的位置（与 $2m-1$ 的二进制表示不同），并且 x, y 表示在 k 和 $2m-1$ 中取相同值的位置，则应应用从一系列置换后跟反向操作序列构建的一般交换门。因此，只有状态 $|k\rangle$ 和 $|2m-1\rangle$ 受此操作影响，其结果是 $|k\rangle$ 被赋值给 $|2m-1\rangle$ 和反之亦然。

整个电路应分别应用于每个控制量子比特。假设量子比特 $\{q_j\}$ 根据同步词的字母进行了初始化，那么无论它

们的初始状态配置如何，在图量子比特 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 上将获得一个同步状态。有关在量子计算机上的可能实现的详细信息，请参见附录 A。

量子行走解释

对于从节点 2 到 $n - 1$ 的完全反置换 (即 $\pi = (1, 0)(n - 1, \dots, 2)$)，我们可以将复位电路解释为具有修改后的步进算子的量子随机行走。这种视角为理解复位过程背后的量子动力学提供了有价值的见解。

步算子 S 定义如下：

$$\begin{cases} S|a\rangle|x\rangle = |a\rangle|x+1\rangle, & \text{for } x \neq n-1, \\ S|a\rangle|n-1\rangle = |b\rangle|1\rangle, \\ S|b\rangle|x\rangle = |b\rangle|x-1\rangle, & \text{for } x \neq 0, x \neq 2 \\ S|b\rangle|0\rangle = |b\rangle|n-1\rangle \\ S|b\rangle|2\rangle = |a\rangle|0\rangle \end{cases} \quad (8)$$

在这些转换规则下，系统中的每个初始状态 $|\psi_0\rangle$ ，用辅助硬币状态准备：

$$|\Psi_0\rangle = |a\rangle|ab\rangle^{\otimes(n-3)} \otimes |\psi_0\rangle \quad (9)$$

将会被驱动到状态 $|1\rangle$ ，经过应用于每个辅助量子位的一系列步骤。此外，这种表示建立了量子自动机理论与已深入研究的量子漫步领域之间的直接联系，可能允许一个领域的技术应用到另一个领域的问题 [14–17]。该重置协议的有效性取决于状态空间的维度，需要 $\mathcal{O}(n)$ 操作来实现完全重置。

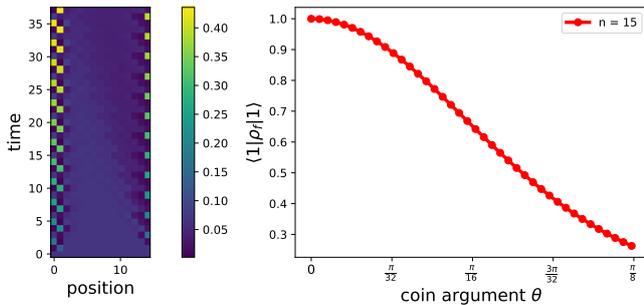


图 6: 左边: 在位置域中，定义于方程 8 的重置步算子和值为 $\theta = \frac{\pi}{11}$ 的概率分布随时间的变化。右边: 作为硬币算子参数 θ 函数的最终状态 ρ_f 的保真度，在演化之后。初始状态被选择为位置状态的等权重叠加。

在图 6 中，我们展示了具有重置步操作符的量子行走的模拟。系统的总演化由以下乘积给出：

$$U = SC_\theta \quad (10)$$

其中 $C_\theta = \exp(-i\sigma_y\theta)$ 是标准的量子行走硬币操作符。从最初非局域状态开始的重置成功率强烈依赖于 θ 的值。然而，在参数值的小范围内，即在 0 和 $\pi/32$ 之间，该协议对扰动具有鲁棒性，并且最终状态仍然是期望状态的良好近似。 $\langle 1|\rho_f|1\rangle$ 的函数关系相对于位置空间的维度表现出不变性。这种独立性源于一个基本洞察：量子粒子的动力学仅在收缩实现的节点处受到硬币投掷的显著扰动。因此，图的整体范围对于这一特定量子现象是无关紧要的。

使用嘈杂的信道进行重置

重置协议可以通过噪声量子信道的形式化表达 [18] 进行推广，而不需要明确引用控制系统的状态。我们定义一个由角度 φ 参数化的通用旋转操作：

$$R_{ij}^{[k]}(\varphi) = \sum_{p \neq i, j, k} |p\rangle\langle p| + \cos \varphi |i\rangle\langle i| + \sin \varphi |i\rangle\langle j| - \sin \varphi |j\rangle\langle i| + \cos \varphi |j\rangle\langle j| \quad (11)$$

该算子不是一个有效的量子操作，因为它不包括由 k 索引的状态，因此应该总是与第二个操作一起完成，后者规定了如何处理状态 $|k\rangle$ 。特别是当 $\varphi = \pi/2$ ，算子 $R_{ij}^{[k]}(\varphi)$ 实现一个 NOT 门，并在状态 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 之间伴随相位变化 π 。再一次，将使用置换分解为对换的乘积来获得完整的 Kraus 通道。我们定义两个算子：

$$A_1(\varphi_A) = R_{12}^{[0]}(\varphi_A)R_{23}^{[0]}(\varphi_A)\dots R_{n-2, n-1}^{[0]}(\varphi_A) \quad (12)$$

$$B_1(\varphi_B) = R_{02}^{[1]}(\varphi_B)R_{23}^{[1]}(\varphi_B)\dots R_{n-2, n-1}^{[1]}(\varphi_B) \quad (13)$$

这两个操作对应于图 2 中的大循环。为了模仿噪声信道的结构，还应包括两个额外的操作：

$$A_2 = |1\rangle\langle 0| \quad B_2 = |0\rangle\langle 1| \quad (14)$$

最后，每个 Kraus 通道对密度矩阵的影响由以下给出：

$$A(\rho) = A_1\rho A_1^\dagger + A_2\rho A_2^\dagger \quad (15)$$

$$B(\rho) = B_1\rho B_1^\dagger + B_2\rho B_2^\dagger \quad (16)$$

图 7 展示了系统对完整同步字序列的定量分析。该图显示了最终量子态的保真度 (左面板) 和纯度 (右面板) 作为旋转角度的函数。这些结果是在变化的 φ_A 和 φ_B 值参数空间中系统计算得出的。生成的热图表明，重置协议在对抗导致随机信息退化的微小扰动时保持了显著的鲁棒性。这种韧性表明，即使在存在噪声诱导退相干效应的实际量子信息处理环境中，重置机制也具有内在的稳定性特性。

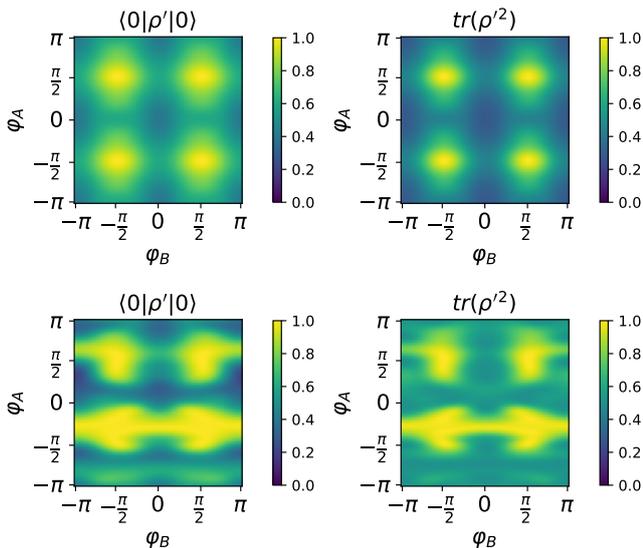


图 7: 保真度对于 $|0\rangle$ 状态 (左侧) 和纯度 (右侧) 针对具有 $n = 5$ 节点的图以及协议 $\rho' = ABAB(\rho)$ 后得到的状态。上图计算的是初始混合状态 $\rho = \frac{1}{n}I$ 的结果, 而下图计算的是由等权重叠加构造的初始纯态的结果。

结论

在本文中, 我们提出了一种构建特定子类量子元胞自动机的新方法。我们展示了通过利用辅助系统——具体来说是量子比特——可以实现这种构造, 从而建立了我们的框架与量子信息处理范式之间的有意义联系。我们提出的协议使量子系统能够从任意初始叠加态确定性地重置到一个特别选定的状态。

我们开发了两种方法论途径: 第一种明确利用辅助环境空间的结构, 为此我们设计了一个相应的量子电路实现; 第二种在带有显式退相干过程的噪声信道框架内运行。这种双重视角促进了我们的工作与广义量子动力学的各种理论模型的整合。Kraus 通道形式尤其值得注意, 它提供了一种有趣的联系到我们之前的工作 [6], 在该工作中我们提出了重置协议作为构建三量子位状态通用量子计算框架的方法论。本文中提出的论点可以被视为这些思想的自然扩展, 具有实现一套全面的门控以引导任意 n 维量子态到任何目标配置的重大潜力。

进一步, 我们展示了我们的协议在量子随机行走的成熟结构中的实现。在这种情况下, 我们表明尽管引入硬币算子扰动了重置效应, 但在一定的参数范围内这些扰动对期望的结果影响不大。鉴于这些发现, 我们的协议成为一种适用于广泛量子系统的通用且可适应的工具, 其影响范围涵盖基础量子力学、量子信息科学和量子计算架构。

致谢。该项研究受到波兰国家科学中心 (NCN) Maestro 资助计划第 DEC-2019/34/A/ST2/00081 号资助。

附录 A: 补充材料

所有相关计算和数值结果, 包括本文中描述的量子电路实现, 已在我们的 GitHub 代码库中公开: https://github.com/JedrekSt/Quantum_Synchronization_Protocol/tree/main。该代码库包含跨多个平台使用的计算方法的全面文档、模拟数据和源代码, 以促进重现性和进一步调查此处提出的重置机制。

* Electronic address: pawel.kurzynski@amu.edu.pl

- [1] J. Černý, *Matematicko-fyzikálny časopis* **14**, 208 (1964).
- [2] H. Jürgensen, *Information and Computation* **206**, 1033 (2008).
- [3] A. Ryzhikov, *Synchronizing automata and coding theory*, Ph.D. thesis, Université Paris-Est (2020).
- [4] A. van Hoorn BSc, H. Don, and W. Bosma, *System* **1**, 42 (2022).
- [5] D. Eppstein, *SIAM Journal on Computing* **19**, 500 (1990).
- [6] A. Grudka, M. Karczewski, P. Kurzyński, J. Stempin, J. Wójcik, and A. Wójcik, arXiv preprint arXiv:2502.09522 (2025).
- [7] M. Naeem Irfan, C. Oriat, and R. Groz (Elsevier, 2013) pp. 89–139.
- [8] B. Schumacher and R. F. Werner, arXiv preprint quant-ph/0405174 (2004).
- [9] C. A. Pérez-Delgado and D. Cheung, *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* **76**, 032320 (2007).
- [10] K. Wiesner, arXiv preprint arXiv:0808.0679 (2008).
- [11] G. Grössing and A. Zeilinger, *Complex systems* **2**, 197 (1988).
- [12] T. Farrelly, *Quantum* **4**, 368 (2020).
- [13] C. Moore and J. P. Crutchfield, *Theoretical Computer Science* **237**, 275 (2000).
- [14] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, and V. Kendon, *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* **81**, 042330 (2010).
- [15] P. C. Costa, R. Portugal, and F. de Melo, *Quantum Information Processing* **17**, 1 (2018).

- [16] C. Huerta Alderete, S. Singh, N. H. Nguyen, D. Zhu, R. Balu, C. Monroe, C. Chandrashekar, and N. M. Linke, *Nature communications* **11**, 3720 (2020) .
- [17] J. Kempe, *Contemporary Physics* **50**, 339 (2009) .
- [18] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information (Cambridge university press, 2010) .