通过时间重标度加速基于反馈的量子算法

L. A. M. Rattighieri,[1, *] G. E. L. Pexe,[1, *] B. L. Bernado,[2] and F. F. Fanchini[3, 1, 4, †]

[1] *Faculty of Sciences, UNESP - São Paulo State University, 17033-360 Bauru-SP, Brazil*

[2] *Department of Physics, Federal University of Paraíba, 58051-900 João Pessoa-PB, Brazil*

[3] *Hospital Israelita Albert Einstein, 05652-900 São Paulo-SP, Brazil*

[4] *QuaTI - Quantum Technology & Information, 13560-161 São Carlos-SP, Brazil*

(10Dated: April 6, 2025)

本研究调查了时间重标定对反馈量子算法（FQA）及其优化任务变体 FALQON 性能的影响。我们引入了 TR-FQA 和 TR-FALQON，分别是 FQA 和 FALQON 的时间重标定版本。该方法应用于两个代表性问题：最大割组合优化问题以及 ANNNI 量子多体模型的基态制备。结果表明，在电路早期层中，TR-FALQON 加速了向最优解的收敛速度，在浅深度区域显著优于其标准版本。在状态制备的背景下，TR-FQA 展示了更优的收敛性，减少了所需的电路深度几百层。这些发现突显了时间重标定作为提高近期量子设备算法性能策略的潜力。

I. 介绍

量子算法在解决优化问题方面比经典方法更高效，展示了巨大的潜力。然而，其实用化实施仍面临重大挑战，特别是由于执行所需操作所需的电路深度不断增加 [1, 2]。这种深度使得量子算法更容易出错，这是噪声中等规模量子（NISQ）设备的关键限制，这些设备仍然受到有限相干时间和不完美门保真度的约束。

尽管量子计算有许多潜在应用，其中一个最有前景的领域是量子优化，它能够影响广泛的行业。传统方法如变分量子本征求解器 [3–5] 和量子近似优化算法 [6–8] 在这个背景下得到了广泛应用。这些算法依赖于混合量子-经典循环，在其中使用经典的优化器来更新参数化量子电路的参数。相比之下，基于反馈的量子算法，如反馈量子算法（FQA）[9, 10] 及其在优化任务中的专门化版本——基于反馈的量子优化算法（FALQON）[11]，通过消除对经典优化程序的需求提供了另一种策略。相反，它们根据测量结果迭代调整电路参数，通过闭环量子控制机制引导系统达到期望状态。

虽然基于反馈的算法为混合量子-经典方法提供了一种有前景的替代方案，但它们并非没有限制。一个关键挑战在于实现所需的电路深度：通常需要大量的层才能达到满意的结果。这限制了其在受噪声和有限相干时间影响的量子设备上的适用性。为了克服这一缺点，已经提出了一些策略。例如，FOCQS 方法 [12] 采用基于庞特里亚金最优控制的控制层微扰更新，旨在减少电路深度并提高收敛速度。另一种方法 [13] 修改反馈规则通过纳入二级时间近似，这使得可以使用更大的时间步长，并增强了收敛性，从而在诸如 MaxCut 等问题中减少了电路深度。此外，反绝热控制 [14] 已被研究作为一种加速系统演进的方式，可能同时减少执行时间和电路深度。

在这项工作中，我们追求类似的方向，并提出了一种旨在加速动态并减少所需层数的系统时间演化的修改。我们的方法基于绝热近路（STA）技术，这是一种广泛用于优化量子系统 [15–17] 演变的技术类别，在包括冷原子 [18]、囚禁离子 [19]、氮空位中心 [20] 和超导量子比特 [21] 等多种平台中取得了成功应用。在此框架基础上，我们引入了时间重新标度反馈量子算法（TR-FQA），通过修改参考哈密顿量的时间依赖性来提高标准 FQA 的效率，有效地实施了一种改进收敛并减少电路深度的 STA 协议。当应用于优化问题时，该方法被称为 TR-FALQON。为了说明其有效性，我们在 MaxCut 问题上测试了 TR-FALQON，并在 ANNNI 模型上测试了 TR-FQA，展示了在收敛和计算效率方面的改善。

本文组织如下。在第二节中，我们简要介绍了量子李雅普诺夫控制及其与 FQA 的关联。在第三节中，我们介绍了时间重标度方法，并给出了 TR-FQA 的公式。在第四节中，我们描述了用于评估我们的方法的

* These authors contributed equally to this work

† felipe.fanchini@unesp.br

两个案例研究：代表组合优化任务的最大割问题和涉及量子基态准备的 ANNNI 模型。在第五节中，我们展示了我们的数值结果，强调了 TR-FALQON 和 TR-FQA 带来的改进。最后，在第六节中，我们总结了我们的发现，并讨论了潜在的未来研究方向。

II. 量子李亚普诺夫控制和反馈量子算法

量子李雅普诺夫控制(QLC)[22, 23] 是一种用于确定控制函数的方法，这些控制函数可以渐近地引导量子系统的演化趋向于期望的目标状态。为了说明 QLC 的原则，我们考虑一个由时变哈密顿量 $H(t) = H_p + \beta(t)H_d$ 所支配的系统，其动力学由时变薛定谔方程(其中 $\hbar = 1$）所描述：

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = (H_p + \beta(t)H_d)|\psi(t)\rangle. \tag{1}$$

这里，$|\psi(t)\rangle$ 是系统在时间 t 的状态矢量。操作符 H_p 和 H_d 是无量纲哈密顿量，其中 H_p 编码要解决的问题(问题哈密顿量)，而 H_d 表示驱动或控制哈密顿量。标量函数 $\beta(t)$ 是一个随时间变化的控制参数，耦合到 H_d。目标是设计 $\beta(t)$，使得系统通过最小化一个被称为李雅普诺夫函数的目标函数 $J(t)$ 进化到 H_p 的基态。在此上下文中，$J(t)$ 被定义为 H_p 的期望值：

$$J(t) = \langle\psi(t)| H_p |\psi(t)\rangle. \tag{2}$$

通过最小化 $J(t)$，系统趋向于 H_p 的基态。控制函数 $\beta(t)$ 被选择以确保 $J(t)$ 随时间单调递减，即，

$$\frac{dJ(t)}{dt} \leq 0, \quad \forall t. \tag{3}$$

计算 $J(t)$ 的时间导数得到：

$$\frac{dJ(t)}{dt} = A(t)\beta(t), \tag{4}$$

其中 $A(t) = \langle\psi(t)| i[H_d, H_p] |\psi(t)\rangle$。为了保证方程 (3) 中的条件，我们要求：

$$\beta(t) = -\omega f(t, A(t)) \tag{5}$$

其中 $\omega > 0$ 和 $f(t, A(t))$ 是满足所有 $A(t) \neq 0$ 的 $f(t, 0) = 0$ 和 $A(t)f(t, A(t)) > 0$ 的连续函数。这确保了 $J(t)$ 单调递减，使系统趋向目标状态。

方程 (5) 在选择 $\beta(t)$ 上提供了灵活性。最简单也是最常见的选项是设定 $\omega = 1$ 并选择 $f(t, A(t)) = A(t)$，从而导致：

$$\beta(t) = -A(t) \tag{6}$$

一个显然满足方程 (3) 中条件的选择，因为 $\frac{dJ(t)}{dt} = -[A(t)]^2 \leq 0$。必须强调的是，$H_p$ 和 H_d 不得交换，否则对于所有的 t，$A(t) = 0$ 将成立，系统将不再向基态演化，因为代价函数 $J(t)$ 会保持不变。

在此控制策略的基础上，FQA 作为专为基态准备设计的量子算法被开发出来。它基于量子李雅普诺夫控制，并迭代构建一个参数化量子电路。与依赖经典优化器调整电路参数的变分量子算法不同，FQA 采用完全基于量子反馈的机制。在每次迭代中，新一层量子门的参数会根据前一层产生的状态测量结果进行更新。这一持续的反馈过程引导系统趋向问题哈密顿量的基态。

算法的动力学可以从薛定谔方程的通解中理解，即式 (1)：

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{T}e^{\int_0^t -i(H_p+\beta(t')H_d)dt'}|\psi(0)\rangle, \tag{7}$$

其中 $\mathcal{T}$ 是时间排序算子。将时间间隔 $[0, t]$ 离散化为持续时间为 Δt 的 k 步骤序列，并应用 Trotter-Suzuki 分解 [24]，我们得到离散形式：

$$|\psi_k\rangle = U_d(\beta_k)U_p \ldots U_d(\beta_2)U_pU_d(\beta_1)U_p|\psi_0\rangle, \tag{8}$$

其中 $U_d(\beta_k) = e^{-i\beta_k H_d \Delta t}$ 和 $U_p = e^{-iH_p\Delta t}$，β_k 由与第 $\beta_k \approx \beta(k\Delta t)$ 层（k）相关的控制参数给出，而 $|\psi_k\rangle$ 则由应用第 $|\psi_k\rangle \approx |\psi(k\Delta t)\rangle$ 层（k）后的系统状态给出。为了确保系统趋向于 H_p 的基态，我们定义 β_k 为：

$$\beta_k = -A_{k-1} = -\langle\psi_{k-1}| H_p |\psi_{k-1}\rangle, \tag{9}$$

从而建立了反馈定律，指导后续层的构建。

FQA 从将电路准备到初始状态 $|\psi_0\rangle$ 开始，这应该很容易生成。在选择适当的时间间隔 Δt 并定义层数 ℓ 后，应用第一层，该层由幺正算子 $e^{-iH_p\Delta t}$ 和 $e^{-iH_d\Delta t}$ 组成，其中 $\beta_1 = 0$。对于每一新的层 k，应用运算符

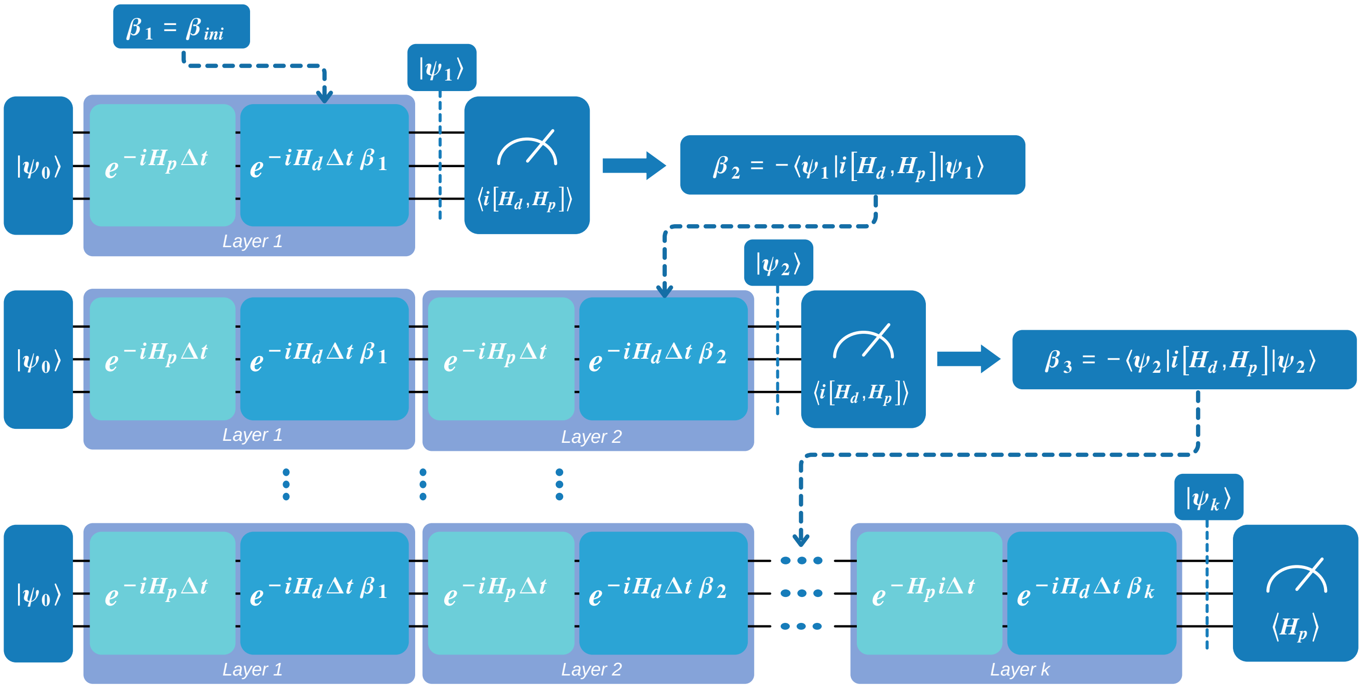

Figure 1. 示例图的 FQA[10]。过程从状态 $|\psi_0\rangle$ 开始，在每一层 k 中，依次应用幺正算子 $e^{-iH_p\Delta t}$ 和 $e^{-iH_d\Delta t\beta_k}$。参数 β_k 在每次迭代中自适应调整。这一动态反复进行，引导状态 $|\psi\rangle$ 通过各层直到达到所需的解决方案。

$e^{-iH_p\Delta t}$ 和 $e^{-iH_d\Delta t\beta_k}$，并根据公式 (9) 调整 β_k，使用前一层生成的状态。术语 "反馈" 指的是这个过程，在此过程中，后续层的参数基于当前状态的测量结果来确定。这一循环反复进行直到状态接近基态，每次迭代成本函数 $J_k = \langle\psi_k|H_p|\psi_k\rangle$ 都会减小。图 1 说明了 FQA 的操作。

详细描述了标准 FQA 的结构和操作后，我们现在转向本工作中引入的改进。在接下来的部分中，我们将介绍时间重标度方法，该方法作为提高算法效率和减少电路深度的基础。

III. 时间重标度方法

时间重新标度方法由 Bertulio 在 [25] 中引入，并由 Ferreira 在 [26] 中进一步发展。该方法修改了量子系统哈密顿量的时间依赖性，改变其演化动力学，使目标终态能够更高效地达到，无论是通过加速还是减速过程以满足需要。

为了形式化这一想法，考虑一个由时间依赖哈密顿量 $H(t)$ 支配的量子系统，在时间区间 $t \in [0, t_f]$ 内演化，并通过薛定谔方程描述。相应的幺正演化给出为：

$$U(t_f) = \mathcal{T}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_f} H(t')\,dt'\right\}. \tag{10}$$

系统的动力学可以通过重标度函数 $t = f(\tau)$ 进行修改，该函数重新定义了时序演化。应用这个变量变化，幺正演化可以重写为：

$$\mathcal{U}(t_f, 0) = \mathcal{T}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t_f)} H(f(\tau))\dot{f}(\tau)d\tau\right\}. \tag{11}$$

此表达式描述了由重新缩放的哈密顿量支配的系统演化：

$$\mathcal{H}(\tau) = H(f(\tau))\dot{f}(\tau), \tag{12}$$

这依赖于重新缩放函数 $f(\tau)$ 及其时间导数 $\dot{f}(\tau)$。因此，如果重标度系统的演化发生在区间 $\tau \in [f^{-1}(0), f^{-1}(t_f)]$，它将产生与原始演化 $H(t)$ 相同的最终状态 $|\psi(t_f)\rangle$，前提是两者都从相同的初始状态 $|\psi(0)\rangle$ 开始。

这表明，通过适当选择 $f(\tau)$，由 $\mathcal{H}(\tau)$ 支配的过程

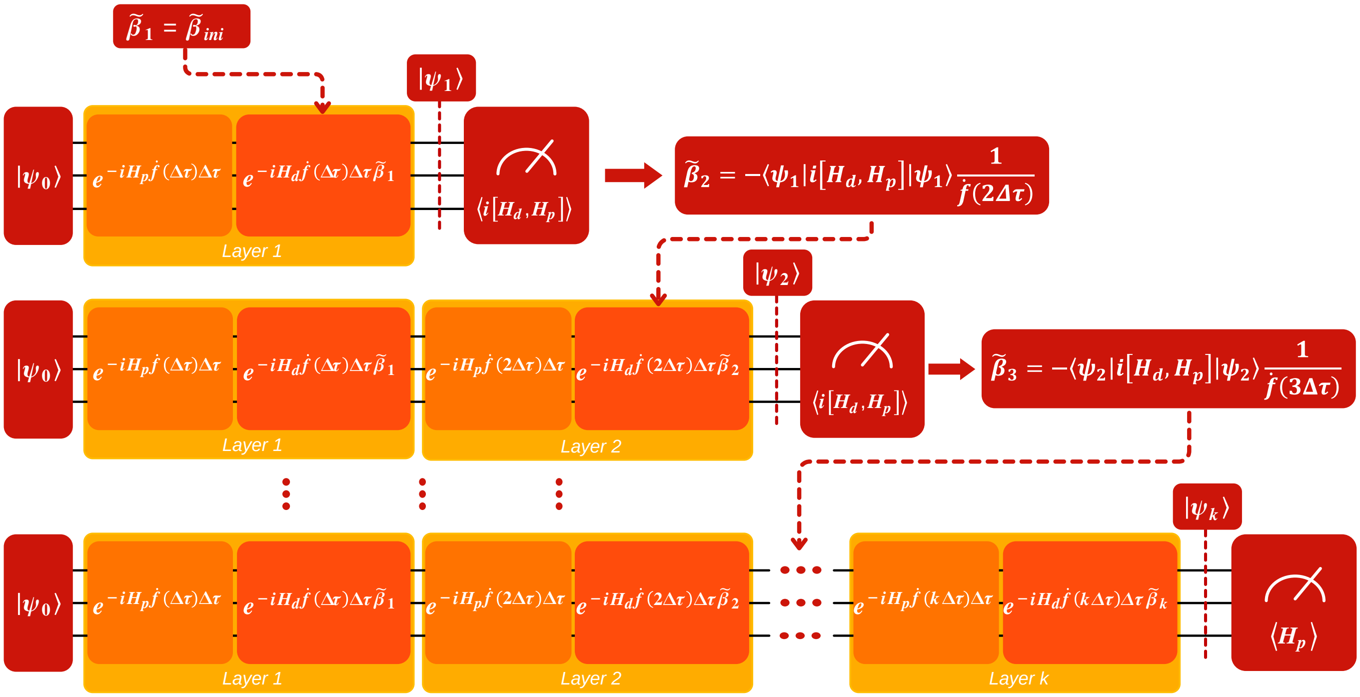

Figure 2. TR-FQA 的示例图。该过程始于初始状态 $|\psi_0\rangle$。在每一层 k 中，单位算子 $e^{-iH_p\dot{f}(k\Delta\tau)\Delta\tau}$ 和 $e^{-iH_d\dot{f}(k\Delta\tau)\Delta\tau\tilde{\beta}_k}$ 依次应用，并自适应地调整参数 $\tilde{\beta}_k$。

可以相对于原始演化加速（$\Delta\tau < \Delta t$）或减速（$\Delta\tau > \Delta t$），其中 $\Delta t = t_f - 0$。如果原始演化对应于一个绝热变换，并且函数 $f(\tau)$ 被选择为：(i) 初始时间一致，即 $f^{-1}(0) = 0$；(ii) 终止时间缩短，$f^{-1}(t_f) < t_f$；以及 (iii) 初态和终态的哈密顿量保持不变，$\mathcal{H}(0) = H(0)$ 和 $\mathcal{H}(f^{-1}(t_f)) = H(t_f)$，则时间重标度方法可以被归类为快速绝热通道。

一种常用的重缩放函数是：

$$f(\tau) = a\tau - \frac{t_f}{2\pi a}(a-1)\sin\left(\frac{2\pi a}{t_f}\tau\right), \tag{13}$$

其中 a 是一个控制时间压缩的参数。另一种可能是多项式函数：

$$f(\tau) = \frac{2(a^2-a^3)}{t_f^2}\tau^3 + \frac{3(a^2-a)}{t_f}\tau^2 + \tau. \tag{14}$$

这些函数允许在不改变系统最终状态的情况下修改系统的时态演化，总演化时间为 $\Delta\tau = \Delta t/a$。

现在我们已经描述了时间重标度方法背后的核心思想，我们将在此基础上将其适应于 FQA 框架。通过修改算法的演化动力学，这种适应性提升了性能，并使期望的解决方案更高效地达成，减少了计算时间。

A. 时间重新标度反馈量子算法

基于时间重标度方法，我们可以将其适应用于 FQA。为此，我们考虑应用于时变哈密顿量的形式为 $H(t) = H_p + \beta(t)H_d$ 的薛定谔方程，其中 H_p 代表问题哈密顿量，H_d 是驱动哈密顿量，$\beta(t)$ 是控制函数。演化方程由下式给出：

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH(t)|\psi(t)\rangle. \tag{15}$$

通过时间变换 $t = f(\tau)$ 进行重标度后，上述方程变为：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}|\psi(\tau)\rangle &= -i\mathcal{H}(\tau)|\psi(\tau)\rangle, \\ &= -iH(f(\tau))\dot{f}(\tau)|\psi(\tau)\rangle.\end{aligned} \tag{16}$$

为了获得这种情况下的控制函数，我们遵循在 FQA 中使用相同的步骤。首先，我们计算沿重新缩放

演化过程中 H_p 期望值的时间导数：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\langle\psi(\tau)|H_p|\psi(\tau)\rangle &= i\langle\psi(\tau)|\mathcal{H}(\tau)H_p - H_p\mathcal{H}(\tau)|\psi(\tau)\rangle,\\ &= i\langle\psi(\tau)|[\mathcal{H}(\tau),H_p]|\psi(\tau)\rangle,\\ &= i\dot{f}(\tau)\langle\psi(\tau)|[H(f(\tau)),H_p]|\psi(\tau)\rangle,\\ &= \beta(f(\tau))\dot{f}(\tau)\langle\psi(\tau)|i[H_d,H_p]|\psi(\tau)\rangle\\ &= \tilde{\beta}(\tau)A(\tau)\dot{f}(\tau),\end{aligned} \tag{17}$$

其中我们定义了 $A(\tau)=\langle\psi(\tau)|i[H_d,H_p]|\psi(\tau)\rangle$，它量化了 H_d 和 H_p 之间的非交换性，以及 $\tilde{\beta}(\tau)=\beta(f(\tau))$，表示在重新缩放时间下评估的控制函数。

为了确保成本函数，定义为 H_p 的期望值在整个演化过程中减少，我们确定一个满足以下条件的控制函数 $\tilde{\beta}(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\langle\psi(\tau)|H_p|\psi(\tau)\rangle\leq 0,\quad\forall\tau. \tag{18}$$

满足此条件的选择是:

$$\tilde{\beta}(\tau)=-\omega F(\tau,A(\tau))G(\dot{f}(\tau)), \tag{19}$$

其中 $\omega>0$, $F(\tau,A(\tau))$ 是对于所有 $A(\tau)\neq 0$ 都具有 $F(\tau,0)=0$ 和 $A(\tau)F(\tau,A(\tau))\geq 0$ 的连续函数，且 $G(\dot{f}(\tau))$ 是具有 $G(\dot{f}(\tau))\dot{f}(\tau)\geq 0$ 的连续函数。我们将采用 $\omega=1$,$F(\tau,A(\tau))=A(\tau)$ 和 $G(\dot{f}(\tau))=1/\dot{f}(\tau)$，从而使 $\tilde{\beta}(\tau)$ 变为:

$$\tilde{\beta}(\tau)=-A(\tau)\frac{1}{\dot{f}(\tau)}. \tag{20}$$

以这种方式选择 $\tilde{\beta}(\tau)$ 确保函数 $J(\tau)$ 随时间减少。

现在，我们可以调整 FQA 电路以包含重新缩放的时间。为此，我们在区间 $\tau_0=0$ 到 $\tau_f=f^{-1}(t_f)$ 中考虑时间的重新缩放演化，将其离散化为 k 步，每步时间为 $\Delta\tau$。这种演化可以通过单位算子的一系列应用来描述:

$$\mathcal{U}(\tau)=\exp\left(-i(H_p+\tilde{\beta}(\tau)H_d)\dot{f}(\tau)\Delta\tau\right). \tag{21}$$

将算子 $\mathcal{U}(\tau)$ 应用于状态 $|\psi(\tau)\rangle$ 产生更新后的状态 $|\psi(\tau+\Delta\tau)\rangle$。为了在量子电路中实现 $\mathcal{U}(\tau)$，我们使用 Trotter 近似，这使我们能够将 $\mathcal{U}(\tau)$ 表达为:

$$\mathcal{U}(\tau)=\mathcal{U}_d(\tilde{\beta}(\tau))\mathcal{U}_p \tag{22}$$

其中 $\mathcal{U}_d(\tilde{\beta}(\tau))=\exp\left(-iH_d\tilde{\beta}(\tau)\dot{f}(\tau)\Delta\tau\right)$ 和 $\mathcal{U}_p=\exp\left(-iH_p\dot{f}(\tau)\Delta\tau\right)$。从这个分解中，我们可以描述在这些 Trotter 化算子连续应用 k 次后 FQA 电路的结果状态:

$$|\psi_k\rangle=\mathcal{U}_d(\tilde{\beta}_k)\mathcal{U}_p\ \ldots\ \mathcal{U}_d(\tilde{\beta}_2)\mathcal{U}_p\,\mathcal{U}_d(\tilde{\beta}_1)\mathcal{U}_p\,|\psi_0\rangle, \tag{23}$$

其中 $|\psi_k\rangle$ 是第 k 层应用后的电路状态（$|\psi_k\rangle\approx|\psi(k\Delta\tau)\rangle$），而 β_k 是第 k 层的控制参数（$\tilde{\beta}_k\approx\tilde{\beta}(k\Delta\tau)$）。同样，类似于标准 FQA，由于需要提前确定 β_k 来构建状态 $|\psi_k\rangle$，我们使用上一次迭代的状态。对于足够小的时间间隔，这个状态近似于 $|\psi_k\rangle$，使我们可以如下定义反馈律:

$$\tilde{\beta}_k=-A_{k-1}\frac{1}{\dot{f}(k\Delta\tau)}=-\langle\psi_{k-1}|H_p|\psi_{k-1}\rangle\frac{1}{\dot{f}(k\Delta\tau)}. \tag{24}$$

这样，我们可以将 FQA 适应以包含时间重缩放。图 2 说明了 TR-FQA 的操作。

如我们可以看到，TR-FQA 利用时间重标度来加速收敛，通过减少总演化时间提高 FQA 的效率。此外，由于重标度函数依赖于 a 和 t_f，TR-FQA 的行为也会随着这些参数的变化而变化，必须仔细调整以达到预期的性能。

IV. 优化和状态准备的应用

为了说明时间重标度反馈算法的有效性和灵活性，我们考虑两个不同的问题。第一个是著名的组合优化问题 MaxCut，它作为评估 TR-FALQON 在优化上下文中性能的基准。第二个是 ANNNI 模型，一个用于测试 TR-FQA 准备基态能力的量子多体系统。

A. 最大割问题

最大割问题 [27, 28] 是一个图上的组合优化问题。给定一个图 $G=(V,E)$，目标是将顶点集 V 分成两个子集 S 和 S'，使得连接不同子集中顶点的边的数量

$e \in E$ 最大化。如果边具有权重，则目标是最大化跨越划分的边的权重之和，即所谓的割。

为了使用量子算法解决最大割问题，该问题被映射到一个量子哈密顿量上。每个顶点 $i \in V$ 与一个量子比特关联，其中状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示划分的两个子集：$|0\rangle$ 意味着该顶点属于一个子集，而 $|1\rangle$ 则意味着它属于另一个子集。问题可以被公式化为一个伊辛哈密顿量：

$$H = -\sum_{i,j=0}^{L-1} \frac{w_{ij}}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z^i \sigma_z^j). \tag{25}$$

这里，w_{ij} 表示连接顶点 i 和 j 的边的权重。如果图是无权的，则对于所有边都有 $w_{ij} = 1$。术语 $(\mathbb{1} - \sigma_z^i \sigma_z^j)$ 在量子比特处于不同状态（$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$）时评估为 1，意味着相应的边被切断；当它们处于相同状态时评估为 0，意味着边未被切断。该哈密顿量的基态对应于 MaxCut 的最优解。

B. ANNNI 模型

轴向次近邻伊辛模型，即 ANNNI 模型 [29, 30]，是传统伊辛模型的扩展。它描述了排列在一维链中的自旋-1/2 的行为，其中自旋与它们最近和次近的邻居各向异性地相互作用。

描述 ANNNI 模型的哈密顿量由下式给出：

$$H_A(\kappa, g) = -J \sum_{j=0}^{L-1} \left(\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \kappa \sigma_j^y \sigma_{j+2}^y + g \sigma_j^x\right) \tag{26}$$

其中 L 是自旋链的大小，而 σ_j^x、σ_j^y 和 σ_j^z 则是对应于位置 j 处的自旋分量的泡利矩阵。在这项工作中，我们采用周期性边界条件，使得 $\sigma_L = \sigma_0$ 和 $\sigma_{L+1} = \sigma_1$。参数 J 是铁磁最近邻相互作用的耦合常数，它是正的，并定义了能量尺度（$J = 1$）。项 κ 是非尺寸耦合常数，描述次近邻之间反铁磁相互作用的强度。项 g 是一个无量纲耦合常数，描述作用于系统的横向磁场的强度。

V. 结果

在本节中，我们展示了使用 TR-FQA 进行的分析，并将其分为两个部分。在第一部分中，我们研究了算法解决优化问题的表现，称之为 TR-FALQON。作为测试案例，我们考虑 MaxCut 问题，采用方程 (25) 中定义的哈密顿量为 H_p。在第二部分中，我们评估了 TR-FQA 在量子态制备中的有效性，分析其在 ANNNI 模型中的表现，在此采用了方程 (26) 中描述的哈密顿量作为 H_p。在这两个模拟中，所使用的驱动哈密顿量是：

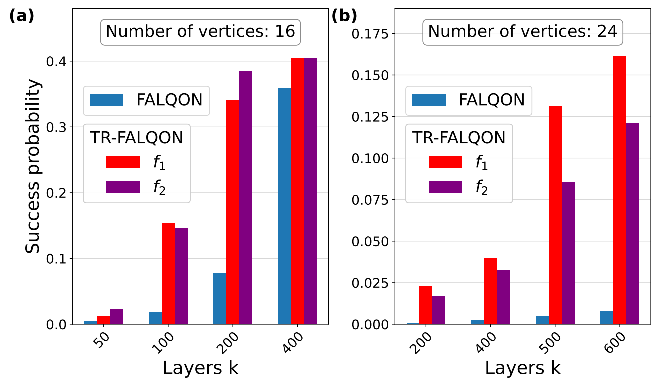

Figure 3. FALQON 和 TR-FALQON 在不同时间重标度函数下的性能比较，展示了从准备状态获得问题解的概率与不同层数的关系。图（a）给出了一个 16 顶点图的结果，在此结果中，FALQON 使用了 $\Delta t = 0.04$，400 层，而 TR-FALQON 使用了 $\Delta\tau = 0.04$，400 层，$a = 2$ 和 $t_f = 16$。图 (b) 展示了具有 24 个顶点的图的结果，其中 FALQON 使用了 $\Delta t = 0.03$、600 层，而 TR-FALQON 则使用了 $\Delta\tau = 0.03$、600 层、$a = 2$ 和 $t_f = 18$。

$$H_d = \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^x. \tag{27}$$

系统最初处于以下状态：

$$|\psi_0\rangle = \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \tag{28}$$

其中 L 对应于编码问题所需的量子位数。在最大割（MaxCut）的情况下，L 等于图中的顶点数，而对于 ANNNI 模型，它对应于链中的格点数。

A. 最大割问题的应用

图 3 比较了使用时间重标度函数 f_1（公式 13）和 f_2（公式 14）的 FALQON 和 TR-FALQON 的性能。面板 3(a) 显示了 16 个顶点图的结果。对于浅层电路（例如，50 层），获得正确解的概率在所有方法中都很低。然而，在这个早期阶段，TR-FALQON 已经优于 FALQON。随着层数的增加，TR-FALQON 的成功概率显著提高，

特别是在 100 和 200 层时，它一直超越 FALQON。在 400 层时，正如预期的那样，TR-FALQON 的优势减弱，标准 FALQON 的性能赶上来了。这是因为当电路足够深时，系统有足够的演化时间达到基态，即使没有时间重标度也能做到这一点，从而减少了基于捷径方法的相对益处。

面板 3(b) 展示了一个有 24 个顶点的图的结果。在这种情况下，TR-FALQON 整体上保持了明显的优势，随着层数的增长，成功概率增加得更快。重新缩放函数 f_1 提供了最佳的整体性能，展示了时间重新缩放在组合优化问题中加速收敛的潜力。值得注意的是，在这种情况下，标准 FALQON 尚未达到任何重缩放方法在此深度下的性能水平，表明算法尚未完全收敛到给定层数的状态。

B. ANNNI 模型的应用

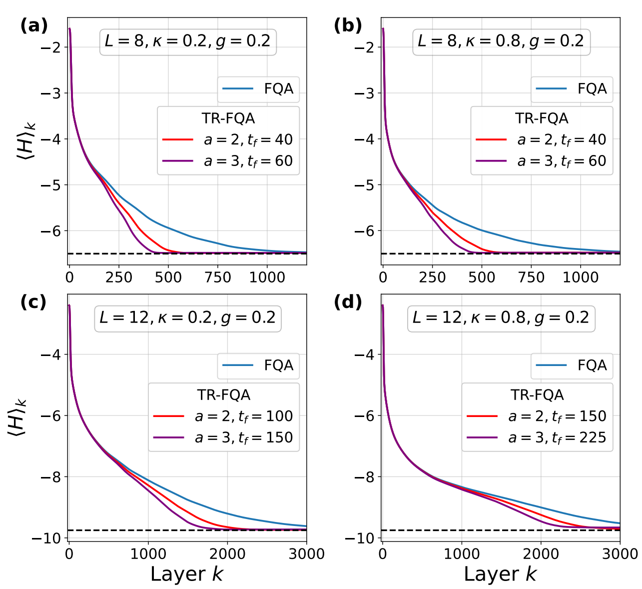

Figure 4. 数值模拟比较了应用于 ANNNI 模型的不同链配置和 κ 及 g 值的 FQA 与 TR-FQA。TR-FQA 模拟使用函数 f_1 进行，每个面板中指定了 a 和 t_f 的值。对于具有 $L = 8$ 个站点的链，采用了 $\Delta t = \Delta\tau = 0.01$，而对于 $L = 12$ 个站点，则使用了 $\Delta t = \Delta\tau = 0.005$。在这些面板中，虚线代表基态能量，而曲线显示了代价函数 $J = \langle\Psi_k|H|\Psi_k\rangle$ 随层数 k 的收敛情况。

图 4 探索了将 FQA 和 TR-FQA 算法应用于 ANNNI 模型时的可扩展性，使用时间重标度函数 f_1 和不同的链尺寸 L。模拟是在各种配置的 κ 和 g 下进行的，旨在评估每个算法将系统驱动至其基态的能力。面板表明随着系统规模的增加，需要更多的层 k 来实现收敛。然而，TR-FQA 相比 FQA 保持了更优的表现，更快地收敛到基态能量。在重标度协议中，配置为 $a = 3$ 的特别有效，与标准 FQA 相比减少了超过 500 层的电路深度。此外，结果强调了选择适当的最终时间 t_f 的重要性，对于较大的系统和较高的 a 值，必须增加该时间以保持高效的收敛。

VI. 结论

在这项工作中，我们探讨了时间重新标定对基于反馈的量子算法性能的影响，引入了 TR-FQA 和 TR-FALQON 变体作为 FQA 和 FALQON 的时间重新标定版本。这些算法被应用于两个不同的任务：解决组合优化问题（MaxCut）和在量子多体系统中制备基态（ANNNI 模型）。我们的结果表明，TR-FALQON 显著提高了电路早期阶段的收敛性，在更少的层数下实现了更高的成功概率。同样，在制备基态的背景下，TR-FQA 始终优于标准 FQA。值得注意的是，时间重新标定方法能够减少超过 500 层的电路深度同时保持准确性。这突显了时间重新标定的潜力，因为标准和重新标定的方法仅在算法已经接近收敛时产生可比的结果，这是一个需要电路显著更深的情况。这使得所提出的方法对近期量子设备特别有价值，在这些设备中，电路深度是一个关键约束条件。

ACKNOWLEDGMENTS

F.F.F 感谢巴西圣保罗研究基金会（FAPESP）的支持，项目编号为 2023/04987-6，以及海军研究办公室（ONR）的支持，项目编号为 N62909-24-1-2012。G.E.L.P. 和 L.A.M.R. 感谢巴西教育部高级人员培训协调署（CAPES）的支持，分别获得项目编号 88887.829788/2023-00 和 88887.143168/2025-00 的支持。

[1] K. Bharti, A. Cervera-Lierta, T. H. Kyaw, T. Haug, S. Alperin-Lea, A. Anand, M. Degroote, H. Heimonen, J. S. Kottmann, T. Menke, W.-K. Mok, S. Sim, L.-C. Kwek, and A. Aspuru-Guzik, Noisy intermediate-scale quantum algorithms, Rev. Mod. Phys. **94**, 015004 (2022).

[2] M. Cerezo, A. Arrasmith, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, K. Fujii, J. R. McClean, K. Mitarai, X. Yuan, L. Cincio, and P. J. Coles, Variational quantum algorithms, Nature Reviews Physics **3**, 625 (2021).

[3] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik, and J. L. O' Brien, A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor, Nature Communications **5**, 4213 (2014).

[4] P. Díez-Valle, D. Porras, and J. J. García-Ripoll, Quantum variational optimization: The role of entanglement and problem hardness, Phys. Rev. A **104**, 062426 (2021).

[5] T. V. Le and V. Kekatos, Solving constrained optimization problems via the variational quantum eigensolver with constraints, Phys. Rev. A **110**, 022430 (2024).

[6] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann, A quantum approximate optimization algorithm, arXiv preprint arXiv:1411.4028 (2014).

[7] K. Ichikawa, G. Hayashi, S. Ohuchi, T. Yokoyama, K. N. Okada, and K. Fujii, Optimal elemental configuration search in crystal using quantum approximate optimization algorithm (2025), arXiv:2503.09356 [quant-ph].

[8] X. Jiang, Z. Chen, J. Zhang, Z. Yu, L. Wang, and H. Mei, Qaoa-based mrmr algorithm for feature selection, in *Proceedings of the 2023 International Conference on Advances in Artificial Intelligence and Applications*, AAIA '23 (Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2024) p. 277 – 282.

[9] J. B. Larsen, M. D. Grace, A. D. Baczewski, and A. B. Magann, Feedback-based quantum algorithms for ground state preparation, Phys. Rev. Res. **6**, 033336 (2024).

[10] G. E. L. Pexe, L. A. M. Rattighieri, A. L. Malvezzi, and F. F. Fanchini, Using a feedback-based quantum algorithm to analyze the critical properties of the annni model without classical optimization, Phys. Rev. B **110**, 224422 (2024).

[11] A. B. Magann, K. M. Rudinger, M. D. Grace, and M. Sarovar, Feedback-based quantum optimization, Physical Review Letters **129**, 10.1103/physrevlett.129.250502 (2022).

[12] L. T. Brady and S. Hadfield, Focqs: Feedback optimally controlled quantum states (2024), arXiv:2409.15426 [quant-ph].

[13] D. Arai, K. N. Okada, Y. Nakano, K. Mitarai, and K. Fujii, Scalable circuit depth reduction in feedback-based quantum optimization with a quadratic approximation, Phys. Rev. Res. **7**, 013035 (2025).

[14] R. K. Malla, H. Sukeno, H. Yu, T.-C. Wei, A. Weichselbaum, and R. M. Konik, Feedback-based quantum algorithm inspired by counterdiabatic driving, Phys. Rev. Res. **6**, 043068 (2024).

[15] E. Torrontegui, S. Ibáñez, S. Martínez-Garaot, M. Modugno, A. del Campo, D. Guéry-Odelin, A. Ruschhaupt, X. Chen, and J. G. Muga, Shortcuts to adiabaticity, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* (Elsevier, 2013) p. 117 – 169.

[16] A. d. Campo, J. Goold, and M. Paternostro, More bang for your buck: Super-adiabatic quantum engines, Scientific Reports **4**, 10.1038/srep06208 (2014).

[17] S. Deng, A. Chenu, P. Diao, F. Li, S. Yu, I. Coulamy, A. del Campo, and H. Wu, Superadiabatic quantum friction suppression in finite-time thermodynamics, Science Advances **4**, eaar5909 (2018).

[18] M. G. Bason, M. Viteau, N. Malossi, P. Huillery, E. Arimondo, D. Ciampini, R. Fazio, V. Giovannetti, R. Mannella, and O. Morsch, High-fidelity quantum driving, Nature Physics **8**, 147 – 152 (2011).

[19] S. An, D. Lv, A. del Campo, *et al.*, Shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving for trapped-ion displacement in phase space, Nature Communications **7**, 12999 (2016).

[20] B. B. Zhou, A. Baksic, H. Ribeiro, C. G. Yale, F. J. Heremans, P. C. Jerger, A. Auer, G. Burkard, A. A. Clerk, and D. D. Awschalom, Accelerated quantum control using superadiabatic dynamics in a solid-state lambda system, Nature Physics **13**, 330 – 334 (2016).

[21] T. Wang, Z. Zhang, L. Xiang, Z. Jia, P. Duan, W. Cai, Z. Gong, Z. Zong, M. Wu, J. Wu, L. Sun, Y. Yin, and G. Guo, The experimental realization of high-fidelity 'shortcut-to-adiabaticity' quantum gates in a superconducting xmon qubit, New Journal of Physics **20**, 065003 (2018).

[22] S. Grivopoulos and B. Bamieh, Lyapunov-based control of quantum systems (2004) pp. 434 – 438 Vol.1.

[23] A. B. Magann, K. M. Rudinger, M. D. Grace, and M. Sarovar, Lyapunov-control-inspired strategies for quantum combinatorial optimization, Phys. Rev. A **106**, 062414 (2022).

[24] M. Schuld and F. Petruccione, *Machine Learning with Quantum Computers* (Springer, 2021) pp. 165–166.

[25] B. d. L. Bernardo, Time-rescaled quantum dynamics as a shortcut to adiabaticity, Phys. Rev. Res. **2**, 013133 (2020).

[26] J. L. M. Ferreira, Ângelo F. da Silva França, A. Rosas, and B. de Lima Bernardo, Shortcuts to adiabaticity designed via time-rescaling follow the same transitionless route (2024), arXiv:2406.07433 [quant-ph].

[27] M. Bechtold, J. Barzen, F. Leymann, A. Mandl, J. Obst, F. Truger, and B. Weder, Investigating the effect of circuit cutting in qaoa for the maxcut problem on nisq devices, Quantum Science and Technology **8**, 045022 (2023).

[28] A. Lucas, Ising formulations of many np problems, Frontiers in Physics **2**, 10.3389/fphy.2014.00005 (2014).

[29] W. Selke, The annni model —theoretical analysis and experimental application, Physics Reports **170**, 213 (1988).

[30] S. Suzuki, J. ichi Inoue, and B. Chakrabarti, Quantum ising phases and transitions in transverse ising models, Springer (2013).