

一个简单的示意图模型用于描述 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 融合反应中的截面不足问题

K. Hagino

Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

在天体物理能量下的 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 融合反应中观察到了截面缺陷现象，在非共振区域，融合截面比 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 系统的融合截面受到抑制。在这里，我构建了一个简单的示意图模型来模拟这一现象。该模型基于高斯正交系综（GOE）的随机矩阵哈密顿量，并与离散基表示中的入口通道哈密顿量耦合。我展示了当 GOE 配置的能级密度和衰减宽度都较大时，传输系数几乎为一，实现了强吸收区域。另一方面，当这些参数较小时，能量函数下的传输系数显示出显著的结构。在这种情况下，在共振能量下该模型中的传输系数达到一，这与实验中发现的截面缺陷一致。

I. 介绍

$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 在极低能量下的聚变反应在实验和理论研究上都引起了极大的关注 [1–21]，主要是因为这是核天体物理学中的关键反应之一。此反应例如在大质量恒星的碳燃烧、Ia 型超新星以及 X 射线超级爆发中非常重要。该系统的聚变截面的一个特征是存在许多显著的共振峰。这与类似系统 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 聚变反应的聚变截面形成了对比，后者表现出截面的能量依赖性要平滑得多。另一个有趣的观察是，在共振能量下， $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反应的融合截面似乎与 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 反应的截面重合，而在非共振能量下的那些则相对受到抑制 [5, 6]。也就是说， $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 反应的融合截面似乎提供了 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 系统融合截面的上限。这在参考文献 [10] 中被称为截面不足。其机制尚未完全阐明。

在参考文献中论证了 [10] 这些系统中融合截面的不同行为是由以下原因造成的：i) Q 值的 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 融合反应低于 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 融合反应的 Q 值，ii) 在 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 融合反应中形成的复合核是 ^{24}Mg ，这是一个偶-偶核，因此能级密度低于在 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 反应中形成的 ^{25}Mg ，iii) $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 是一种相同玻色子的反应，因此只能填充 ^{24}Mg 中具有正宇称和偶数自旋的状态。所有这些都导致了在低能条件下， $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 聚变反应中的共振是孤立的，而 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 聚变反应即使在低能条件下也处于重叠共振区域。在前者情况下，已知平均传输系数被 Moldauer 因子 $P_J = 1 - e^{-2\pi\Gamma_J/D_J}$ 抑制，其中 J 是复合核的自旋， Γ_J 是平均衰减宽度，而 D_J 是平均能级间距 [10, 22–24]。关于 Moldauer 因子的推导，请参见参考文献 [25, 26]。请注意， $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 融合反应的低 Q 值也导致复合核中的中子发射通道在 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 融合反应中关闭，而在 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 融合反应中该通道是开放的。

莫尔道因子解释了为什么 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 系统的融合截面平均而言比 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 系统的截面受到抑制。然而，它并没有提供一个理由来解释为什么在共振能量下， $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 系统的融合截面与 $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$ 系统的截面一致。为了回答这个问题，在本文中我考虑了一个简单的示意图模型，该模型在 Ref.[27] 的附录 B 中有使用。该模型基于高斯正交系综（GOE）耦合到入口通道中的散射态的随机矩阵哈密顿量组成。每个 GOE 配置都具有一个衰变宽度 γ ，因此入射通量的一部分被 GOE 配置吸收。通过改变 GOE 哈密顿量和衰变宽度 γ 的参数，可以模拟孤立共振态和重叠共振态，从而该模型提供了一个方便的工具来定性地理理解两个 C+C 系统的融合截面之间的差异。

论文组织如下。在第二节中，我详细阐述了本文采用的简单示意图模型。特别是，我详细解释了如何基于离散基形式计算传输系数或吸收概率。在第三节中，我使用该模型比较了孤立共振区和重叠共振区，并展示了该模型可以定性地重现 C+C 融合反应中的实验结果。然后我在第四节中总结了论文。在附录中，我详细阐述了一种数值方法来计算复能量平面中 S 矩阵的极点。

II. 模型

本文中采用的模型如图 1 所示。这是参考文献 [27] 附录 B 中的同一模型，包含一个维度为 N_{GOE} 的 GOE 哈密顿量 H_{GOE} 。GOE 哈密顿量的矩阵元表示如下：

$$(H_{\text{GOE}})_{ij} = v_g r_{ij} \sqrt{1 + \delta_{ij}}, \quad (1)$$

其中， v_g 是相互作用的平均强度，而 r_{ij} 是从单位方差高斯分布 $\langle r_{ij}^2 \rangle = 1$ 中抽取的一个随机数。我假设前

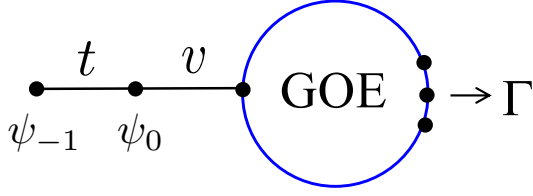


图 1: 本文中使用的模型哈密顿量的示意图。它基于高斯正交系综 (GOE) 的一个随机矩阵, 并与自由散射态 ψ_i 以强度 v 耦合。 Γ 是 GOE 配置的衰减宽度, 而 t 表示动能算符的非对角元, 它在离散基表示中连接相邻的散射态。

N_{decay} 个基态具有衰减宽度 γ 。因此, 总的 GOE 哈密顿量由下式给出

$$H'_{\text{GOE}} = H_{\text{GOE}} - \frac{i}{2}\Gamma, \quad (2)$$

其中 Γ 是一个对角矩阵, 其前 N_{decay} 个分量是 γ , 其余为零。

在图 1 中, ψ_0 和 ψ_{-1} 分别表示在 x_0 和 x_{-1} ($= x_0 - \Delta x$) 处的自由散射波函数, Δx 是网格间距。自由散射波函数满足方程

$$t\psi_{i-1} + t\psi_{i+1} = (E' + 2t)\psi_i \equiv E\psi_i, \quad (3)$$

其中 ψ_i 是在 x_i 处的波函数。这里, 将散射能量 E' 移位为 $E = E' + 2t$, 以便动能算符的对角分量 $-2t$ 不会出现在方程中。假设平面波解, $\psi_i \propto e^{\pm ikx_i}$, 发现 E 和 k 之间的关系由以下给出

$$E = 2t \cos(k\Delta x). \quad (4)$$

我假设自由波函数 ψ_0 以强度 v 耦合到 GOE 哈密顿量的第一个基态。因此, 波函数 ψ_0 和 ψ_{-1} 以及 GOE 基态的振幅 $\{f_i\}$ 满足方程

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{v}^T \\ \vec{v} & H'_{\text{GOE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\psi_{-1} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

, 其中 N_{GOE} 分量向量 $\vec{0}$ 和 $\vec{v}$ 分别定义为 $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$ 和 $\vec{v} = (v, 0, \dots, 0)^T$ 。这里, T 表示转置。通过取方程 (5) 中的最后 N_{GOE} 行,

$$(H'_{\text{GOE}} - E)\vec{f} = \begin{pmatrix} -v\psi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

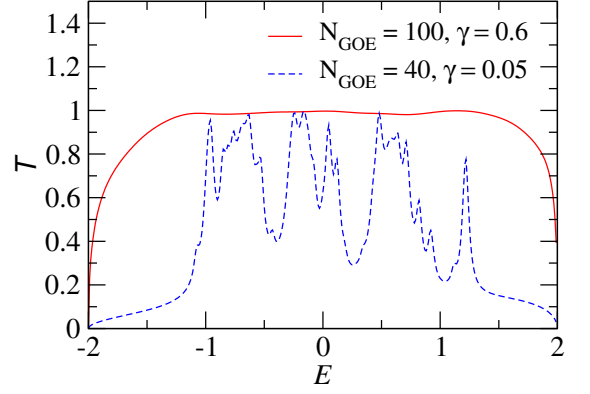


图 2: 传输系数是使用单一随机种子获得的。红色实线和蓝色虚线分别是用 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (100, 0.6)$ 和 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (40, 0.05)$ 获得的。衰减通道的数量 N_{decay} 每种情况下均设置为 $N_{\text{decay}} = N_{\text{GOE}}$ 。其他参数是 $v_g = 0.1$, $t = -1$ 和 $v = 1$ 。

振幅 $\vec{f}$ 可以作为与 ψ_0 的比值获得为 [28, 32]

$$f_i = -(H'_{\text{GOE}} - E)^{-1}_{i1} v \psi_0 \equiv -G_{i1} v \psi_0, \quad (7)$$

其中 $G \equiv (H'_{\text{GOE}} - E)^{-1}$ 是格林函数。振幅 $\vec{f}$ 获得后, 波函数 ψ_{-1} 可以表示为

$$\psi_{-1} = -\frac{1}{t}(-E\psi_0 + v f_1) = -\frac{\psi_0}{t}(-E - G_{11}v^2). \quad (8)$$

因为 ψ_0 和 ψ_{-1} 表示自由散射波函数, 它们应该满足关系

$$\psi_{-1} = A(e^{-ik\Delta x} - S e^{ik\Delta x}), \quad (9)$$

$$\psi_0 = A(1 - S), \quad (10)$$

其中 S 是 S 矩阵。从这些方程中, S -矩阵为,

$$S = \frac{\psi_{-1} - e^{-ik\Delta x}\psi_0}{\psi_{-1} - e^{ik\Delta x}\psi_0} = \frac{E + G_{11}v^2 - t e^{-ik\Delta x}}{E + G_{11}v^2 - t e^{ik\Delta x}}. \quad (11)$$

从 S -矩阵中, 得到吸收概率或传输系数。

$$T = 1 - |S|^2. \quad (12)$$

III. GOE 属性在传输系数中的作用

现在我们来数值计算传输系数, 并讨论参数在 GOE 哈密顿量中所起的作用。图 2 中的红色实线和蓝色虚线分别显示了使用单个随机种子为参数

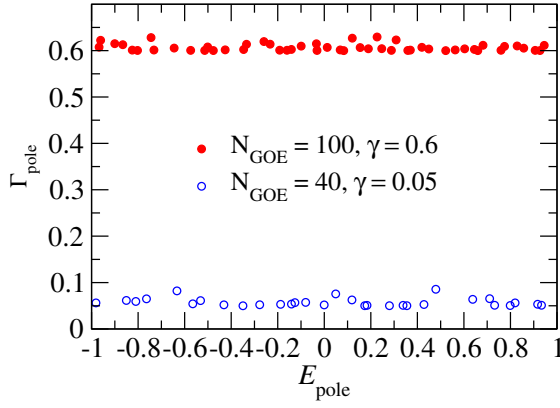


图 3: 共振极点的能量, $E_{\text{pole}} - i\Gamma_{\text{pole}}/2$, 对应于图 2 中的两条曲线。

$(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (100, 0.6)$ 和 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (40, 0.05)$ 获得的传输系数。为此, 我设置了 $N_{\text{decay}} = N_{\text{GOE}}$, 并取 $v_g = 0.1$ 、 $t = -1$ 和 $v = 1$ 。请注意, 传输系数在 $E = \pm 2$ 处降至零, 因为能量的绝对值 E 不能大于 $2t$, 这是由于色散关系, 方程 (4)。然而, 仍然可以讨论传输系数在中心能量 $E \sim 0$ 周围的行为。对于 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (100, 0.6)$ 情况下, 传输系数接近于 1。这与经常假设的重离子反应中的强吸收极限一致 [33, 34]。另一方面, 在 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (40, 0.05)$ 的情况下, 传输系数作为 E 的函数具有更多的结构, 并有几个显著的共振峰。有趣的是, 观察到在几个共振能量下, 传输系数接近于 1。这类似于在 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 反应中观察到的截面不足。因此, 目前的简单模型捕捉到了 C+C 融合反应的一个基本特征。

复能量, $E_{\text{pole}} - i\Gamma_{\text{pole}}/2$, 对于相应的 S -矩阵极点如图所示 3。见附录中的数值方法来评估共振极点。宽度 Γ_{pole} 在未扰动的宽度 γ 附近波动。平均能级间距也接近于 GOE 哈密顿量的能级密度的倒数, $\rho_{\text{GOE}} = \sqrt{N_{\text{GOE}}}/\pi v_g$ 。对于 $v_g = 0.1$, 这是 $1/\rho_{\text{GOE}} = 0.03$ 和 0.05 对于 $N_{\text{GOE}} = 100$ 和 40 , 分别。 γ 的值远大于 $1/\rho_{\text{GOE}}$ 在 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (100, 0.6)$ 的情况下, 并且共振大部分重叠。因此, 传输系数显示出如图 2 所示的平滑能量依赖性。另一方面, 在 $(N_{\text{GOE}}, \gamma) = (40, 0.05)$ 的情况下, γ 的值与 $1/\rho_{\text{GOE}}$ 相当, 导致了结构化的传输系数。

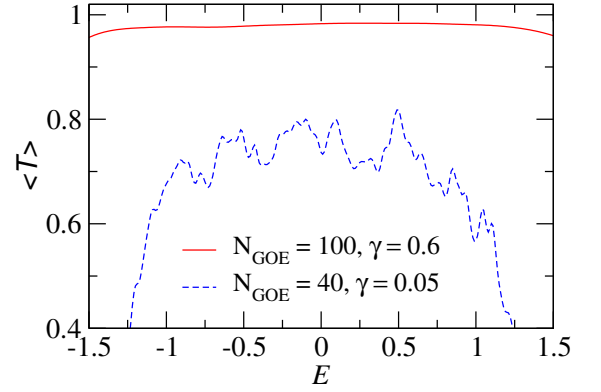


图 4: 传输系数的集合平均值, $\langle T(E) \rangle = 1 - \langle |S(E)|^2 \rangle$, 通过 20 个集合获得。哈密顿量的参数与图 2 中的相同。

传输系数的集合平均值,

$$\langle T(E) \rangle = 1 - \langle |S(E)|^2 \rangle, \quad (13)$$

如图所示 4。为此, 我取了 20 个集合的平均值。由于是集合平均值, 与使用单个随机种子在图 2 中显示的情况相比, 蓝色虚线结构明显模糊。然而, 仍然可以观察到虚线比实线具有更多的结构。

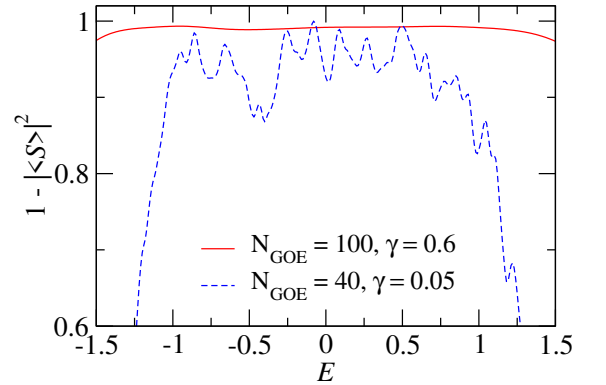


图 5: 平均传输系数, $\bar{T}(E) = 1 - |\langle S(E) \rangle|^2$, 通过首先对 S 矩阵取集合平均获得。

在复合核理论中, 由光学势获得的透射系数对应于

$$\bar{T}(E) = 1 - |\langle S(E) \rangle|^2. \quad (14)$$

也就是说, 首先对 S 矩阵取系综平均, 然后取绝对值平方以得到平均透射系数。如果将平均透射系数 (13)

分解为,

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= 1 - |\langle S(E) \rangle|^2 - (\langle |S(E)|^2 \rangle - |\langle S(E) \rangle|^2) \\ &= \bar{T} - (\langle |S(E)|^2 \rangle - |\langle S(E) \rangle|^2), \end{aligned} \quad (16)$$

$\bar{T}$ 对应于复合核形成的概率, 而第二项, $(\langle |S(E)|^2 \rangle - |\langle S(E) \rangle|^2)$, 则对应于复合弹性散射 [35]。平均传输系数 $\bar{T}$ 绘制在图 5 中。这些传输系数在定性上类似于集合平均值 $T(E)$, 尽管蓝色虚线有所增加。有趣的是, 一些共振峰接近强极限下的实线。请注意, 平均传输系数 $\bar{T}$ 是可以直接与 Moldauer 因子 $1 - e^{-2\pi\Gamma\rho_{\text{GOE}}}$ 比较的量。如果使用 $\Gamma = 0.05$ 和 $\rho_{\text{GOE}} = 1/0.05$ 来表示 $N_{\text{GOE}} = 40$, 这个因子被发现为 0.998。这与图 5 所示的平均传输系数有些偏差, 但这可以理解, 因为为了验证用于推导 Moldauer 因子 [25, 26] 的近似值, 需要较小的传输系数。

IV. 摘要

我已经构建了一个简单的示意图模型, 用于复合核反应, 并讨论了传输系数对复合核性质的依赖性。该模型基于高斯正交系综 (GOE) 的随机矩阵, 与自由散射波耦合。通过改变 GOE 哈密顿量的维度和复合核态的衰减宽度, 模型可以描述重叠共振区和孤立共振区两种情况。我展示了在孤立共振区的传输系数相对于重叠共振区而言, 在非共振能级时受到抑制, 而在重叠共振区接近于 1。在共振能级时, 孤立共振区的传输系数也接近于 1, 在非共振能级则表现出亏缺现象。这与碳核融合截面实验观测中 $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ 和 $^{12}\text{C}+^{13}\text{C}$ 系统的定性结果相同。因此, 尽管当前模型足够简单, 但它仍捕捉到了两个碳核融合反应的基本特征。

当前模型可以通过用更现实的多体哈密顿量 (如壳模型哈密顿量) 替换 GOE 哈密顿量来扩展。这样的研究将有助于阐明与核天体物理学相关的共振反应的动力学, 同时保持对截面的定量描述。我将在另一篇出版物中报告这一内容。

Acknowledgments

我感谢 G.F. Bertsch、X.D. Tang、A.B. Brown 和 K. Uzawa 的有益讨论。本工作部分得到了日本学术振

兴会科研费补助金 JP23K03414 的支持。

附录 A: S -矩阵的极点

为了找到矩阵 S 的极点, 即方程 (11) 在复平面上的极点, 我严格遵循参考文献 [28] 补充材料中的方法。在此方法中, 将外射边界条件 $\psi_0 = e^{-ik\Delta x}\psi_{-1}$ 施加到散射波函数上, 并引入迭代过程来寻找极点。将 $\psi_{-1} = e^{ik\Delta x}\psi_0$ 代入公式 (5), 得到

$$M(x)\vec{\psi} \equiv (H + te^{ik\Delta x}C - E)\vec{\psi} = 0, \quad (\text{A1})$$

其中 x 被定义为 $x \equiv k\Delta x$, 而 $\vec{\psi}$ 和 H 分别被定义为 $\vec{\psi} \equiv (\psi_0, \vec{f})^T$ 和

$$H \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{v}^T \\ \vec{v} & H'_{\text{GOE}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2})$$

。 C 是一个包含元素的矩阵 $C_{ij} = \delta_{i,j}\delta_{i,0}$ 。

如果取一个任意数 $x = x_g$, 公式 (A1) 通常不成立。然而, 可以通过假设它接近于满足公式 (A1) 的 x_r 来改进 x_g 。从 $M(x_r)\vec{\psi} = 0$ 和 $x_r = x_g + x_r - x_g$, 可以得到

$$\left[M(x_g) + (x_r - x_g) \frac{dM}{dx} \Big|_{x_g} \right] \vec{\psi} = 0, \quad (\text{A3})$$

直到 $x_r - x_g$ 的一阶该方程转换为

$$(M'(x_g))^{-1}M(x_g)\vec{\psi} = (x_g - x_r)\vec{\psi}. \quad (\text{A4})$$

由于此方程的右侧对于共振极点消失, 可以取最低模特征值 $\bar{\lambda}$ 作为 $(M'(x_g))^{-1}M(x_g)$, 并更新 x_g 为

$$x_{g+1} = x_g - \bar{\lambda}. \quad (\text{A5})$$

注意 $M'(x)$ 由 $M'(x) = ite^{ix}C + 2t\sin(x)$ 给出, 其中 E 由方程 (4) 给出。这是一个对角矩阵, 并且可以很容易地求逆。

此迭代过程必须以一个好的初始猜测 x_g 开始。在本文中, 我使用矩阵 $H'_{\text{GOE}} = H_{\text{GOE}} - i\Gamma/2$ 的复特征值 E_i 并将其转换为 $x_g^{(i)} = \cos^{-1}(E_i/2t)$ 。

-
- [1] L. J. Patterson, H. Winkler, and C. S. Zaidins, *Astrophys. J.* **157**, 367 (1969).
- [2] D. G. Kovar, D. F. Geesaman, T. H. Braid, Y. Eisen, W. Henning, T. R. Ophel, M. Paul, K. E. Rehm, S. J. Sanders, P. Sperr, J. P. Schiffer, S. L. Tabor, S. Vigdor, B. Zeidman, and F. W. Prosser, Jr., *Phys. Rev. C* **20**, 1305 (1979).
- [3] L. J. Satkowiak, P. A. DeYoung, J. J. Kolata, and M. A. Xapsos, *Phys. Rev. C* **26**, 0207 (1982).
- [4] M. D. High and B. Cujec, *Nucl. Phys. A* **282**, 181 (1977).
- [5] M. Notani, H. Esbensen, X. Fang, B. Bucher, P. Davies, C. L. Jiang, L. Lamm, C. J. Lin, C. Ma, E. Martin, K. E. Rehm, W. P. Tan, S. Thomas, X. D. Tang, and E. Brown, *Phys. Rev. C* **85**, 014607 (2012).
- [6] N.T. Zhang, X.Y. Wang, D. Tudor, B. Bucher, I. Burducea, H. Chen, Z.J. Chen, D. Chesneanu, A.I. Chilug, L.R. Gasques, D.G. Ghita, C. Gomoiu, K. Hagino, S. Kubono, Y.J. Li, C.J. Lin, W.P. Lin, R. Margineanu, A. Pantelica, I.C. Stefanescu, M. Straticiuc, X.D. Tang, L. Trache, A.S. Umar, W.Y. Xin, S.W. Xu, and Y. Xu, *Phys. Lett. B* **801**, 135170 (2020).
- [7] T. Spillane, F. Raiola, C. Rolfs, D. Schürmann, F. Strieder, S. Zeng, H.-W. Becker, C. Bordeanu, L. Galanella, M. Romano, and J. Schweitzer, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 122501 (2007).
- [8] W. P. Tan, A. Boeltzig, C. Dulal, R. J. deBoer, B. Frenzt, S. Henderson, K. B. Howard, R. Kelmar, J. J. Kolata, E. F. Aguilera, P. Amador-Valenzuela, D. Lizcano, E. Martinez-Quiroz, J. Long, K. T. Macon, S. Moylan, G. F. Peaslee, M. Renaud, C. Seymour, G. Seymour, B. Vande Kolk, and M. Wiescher, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 192702 (2020).
- [9] G. Fruet, S. Courtin, M. Heine, D. G. Jenkins, P. Adley, A. Brown, R. Canavan, W. N. Catford, E. Charon, D. Curien, S. Della Negra, J. Duprat, F. Hammache, J. Lesrel, G. Lotay, A. Meyer, D. Montanari, L. Morris, M. Moukaddam, J. Nippert, Zs. Podolyák, P. H. Regan, I. Ribaud, M. Richer, M. Rudigier, R. Shearman, N. de Séréville, and C. Stodel, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 192701 (2020).
- [10] C. L. Jiang, B. B. Back, H. Esbensen, R. V. F. Janssens, K. E. Rehm, and R. J. Charity, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 072701 (2013).
- [11] A. Tumino, C. Spitaleri, M. La Cognata, S. Cherubini, G. L. Guardo, M. Gulino, S. Hayakawa, I. Indelicato, L. Lamia, H. Petrascu, R. G. Pizzone, S. M. R. Puglia, G. G. Rapisarda, S. Romano, M. L. Sergi, R. Spartá, and L. Trache, *Nature* **557**, 687 (2018).
- [12] B. Imanishi, *Phys. Lett.* **27B**, 267 (1968).
- [13] B. Imanishi, *Nucl. Phys. A* **125**, 33 (1969).
- [14] Y. Kondo, T. Matsuse, and Y. Abe, *Prog. Theo. Phys.* **59**, 465 (1978).
- [15] W. Scheid, W. Greiner, R. Lemmer, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 176 (1970).
- [16] H. -J. Fink, W. Scheid, and W. Greiner, *Nucl. Phys. A* **188**, 259 (1972).
- [17] H. Esbensen, X. Tang, and C.L. Jiang, *Phys. Rev. C* **84**, 064613 (2011).
- [18] M. Assuncao and P. Descouvemont, *Phys. Lett. B* **723**, 355 (2013).
- [19] A. Diaz-Torres and M. Wiesher, *Phys. Rev. C* **97**, 055802 (2018).
- [20] A. Bonasera and J. B. Natowitz, *Phys. Rev. C* **102**, 061602 (R) (2020).
- [21] Y. Taniguchi and M. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **823**, 136790 (2021).
- [22] P.A. Moldauer, *Phys. Rev.* **157**, 907 (1967).
- [23] P.A. Moldauer, *Phys. Rev.* **171**, 1164 (1968).
- [24] G.L. Celardo, F.M. Izrailev, V.G. Zelevinsky, and G.P. Berman, *Phys. Lett. B* **659**, 170 (2008).
- [25] P.A. Moldauer, *Phys. Rev.* **177**, 1841 (1969).
- [26] M. Simonius, *Phys. Lett.* **52B**, 279 (1974).
- [27] G.F. Bertsch and K. Hagino, *Phys. Rev. C* **107**, 044615 (2023).
- [28] P. Fanto, G.F. Bertsch, and Y. Alhassid, *Phys. Rev. C* **98**, 014604 (2018).
- [29] G.F. Bertsch and W. Younes, *Ann. Phys.* **403**, 68 (2019).
- [30] Y. Alhassid, G.F. Bertsch, and P. Fanto, *Ann. of Phys.* **419**, 168233 (2020).
- [31] Y. Alhassid, G.F. Bertsch, and P. Fanto, *Ann. of Phys.* **424**, 168381 (2021).
- [32] K. Hagino, *Phys. Rev. C* **109**, 034611 (2024).
- [33] K. Hagino, K. Ogata, and A.M. Moro, *Prog. in Part. and Nucl. Phys.* **125**, 103951 (2022).
- [34] K. Hagino and N. Takigawa, *Prog. Theo. Phys.* **128**, 1061 (2012).
- [35] C.A. Bertulani and P. Danielewicz, *"Introduction to Nuclear Reactions"* (CRC Press, Boca Raton, 2004).