

黑洞解在 量子现象学引力动力学中

Ana Alonso-Serrano ^{1,2,*} Marco de Cesare ^{3,4,†} and Manuel Del Piano ^{3,4,5,‡}

¹*Institut für Physik, Humboldt-Universität zu Berlin, Zum Großen Windkanal 6,
12489 Berlin, Germany, Am Mühlenberg 1, 14476 Potsdam, Germany*

²*Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Am Mühlenberg 1, 14476 Potsdam, Germany*

³*Scuola Superiore Meridionale, Largo S. Marcellino, 10, 80138 Napoli, Italy*

⁴*INFN sezione di Napoli, via Cintia, 80126 Napoli, Italy*

⁵*Quantum Theory Center (hQTC) & D-IAS, Southern Denmark Univ., Campusvej 55, 5230 Odense M, Denmark*

我们研究了基于时空热力学的量子引力现象学方法中的黑洞解，该方法由 Alonso-Serrano 和 Liška 发展。场方程是无迹的，类似于么正引力，并包括二次曲率修正。我们发现，在这一理论中，静态、球对称、真空时空中分裂成两个分支。第一个分支与么正引力中的相应解无法区分，描述了 Schwarzschild-(Anti) de Sitter 黑洞。第二个分支则描述了无视界解，并且以空间曲率的大值为特征。我们分析了这两个分支上的度规一阶摄动的动力学，表明在这个水平上没有偏离么正引力。

I. 介绍

近年来寻找量子引力的一种方法是通过分析其在普朗克能量尺度以下实验可及范围内的可能效应作为对经典引力预测的修改，这被称为量子引力现象学。由于热力学已成为重力研究中极其有用的工具，几年前在 Ref.[1] 中提出了一个基于时空热力学的模型无关且理论不可知的量子引力现象学方法。该方法基于 Jacobson 从时空热力学推导出爱因斯坦场方程的方法 [2–4] 的推广。通过在热力学输入数据中引入由于量子引力修正而产生的额外引力熵贡献来实现这种推广，这可能在普朗克能量尺度以下也起作用。不同的量子引力方法预测了 Bekenstein 熵的对数修正 [5–8]（以及纠缠熵），从而为具有所需普遍性的现象学方法提供了基础。这导致了包含量子修正的爱因斯坦场方程的修改。有趣的是，由此产生的场方程是无迹的，就像单模引力一样（关于单模引力，请参见 Refs.[9–11] 及其中的参考文献）。以前的工作分析了该理论中宇宙时空的动力学，表明在早期时期与标准宇宙学有显著偏差 [1, 12–14]。

在这项工作中，我们对当前理论中的真空、静态、球面对称解进行了全面分析，并考察了可能与广义相对论的偏差。特别地，我们展示了由于解空间的分支，Birkhoff 定理在此理论中不成立。还详细分析了这些背景周围扰动的动力学。

本文组织如下。在第 II 节中，我们简要回顾了“量子现象学引力动力学”的场方程。在第 III 节中，我们分析了球对称静态解，并表明解空间分为两个分支。在第 IV 节中，我们推导了这两个分支上的扰动的动力学方程，并将它们与么模引力和广义相对论中的扰动动力学进行了比较。提供了一个技术附录，在其中我们回顾了么模引力和广义相对论中施瓦西-（反）德西特几何的扰动动力学。

II. 量子现象学引力动力学简述

我们简要介绍了运动的通用现象学方程，这些方程是通过遵循与时空热力学中经典导出方程相似的步骤获得的。为此，首先构造一个局部观察者依赖的地平线，在该地平线上可以施加平衡条件。由于平衡条件，总熵的变化必须为

* ana.alonso.serrano@aei.mpg.de

† marco.decesare@na.infn.it

‡ manuel.delpiano-ssm@unina.it

零，它是物质场的半经典熵通量和地平线几何熵变化之和（后者通常被解释为纠缠熵）[关于这种构造的详细讨论，请参见参考文献 [15]]。对于我们的目的，在这里我们直接提出了在参考文献 [1] 中导出的结果场方程

$$\mathcal{G}_\mu{}^\nu := S_\mu{}^\nu - \alpha\kappa S_{\mu\rho}S^{\rho\nu} + \frac{\alpha\kappa}{4} \left(R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \frac{R^2}{4} \right) \delta_\mu{}^\nu = \kappa \left(T_\mu{}^\nu - \frac{T}{4} \delta_\mu{}^\nu \right), \quad (2.1)$$

其中 $S_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - R/4 g_{\mu\nu}$ 是里奇张量的无迹部分， $T_{\mu\nu}$ 是物质的能量-动量张量。参数 α 是一个无量纲常数¹，它直接来源于熵中的额外对数修正项，并在不同的量子引力候选理论和计算量子引力校正的多种方法中取不同的值（尽管在每种此类方法中仍然扮演着普遍常数的角色），当接近普朗克尺度时，它给出了相关贡献。因此，这样一个参数的具体数值特定于给定的量子引力方法，为了通用性我们将保持其自由状态。请注意，方程 (2.1) 是无迹的，并且当 $\alpha = 0$ 减少到不引入量子引力修正时即恢复为单模引力的场方程。

对等式 (2.1) 的两边取协变散度，并使用缩并的 Bianchi 恒等式 $\nabla^\nu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}) = 0$ ，我们得到 [1]

$$\frac{1}{4}\nabla_\mu R - \alpha\kappa\nabla_\nu (S_{\mu\rho}S^{\rho\nu}) + \frac{\alpha\kappa}{4}\nabla_\mu \left(R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \frac{R^2}{4} \right) = \kappa \left(\nabla_\nu T_\mu{}^\nu - \frac{1}{4}\nabla_\mu T \right). \quad (2.2)$$

与广义相对论不同，但类似于单模引力（其场方程也是无迹的），物质场的应力-能量张量的守恒不能从 Bianchi 恒等式中得出，而是构成一个独立假设 [1, 9]。我们将在此假设下工作，即 $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ ，贯穿全文。我们注意到方程 (2.2) 的结构比单模引力中的对应方程更为复杂，特别是由于左边的第二项，在一般的时空几何中无法表示为标量函数的梯度。然而，对于某些对称时空，公式 (2.2) 仍然可以明确地积分。在这种情况下，宇宙常数作为积分常数出现，这与单模引力 [9] 完全类似。这一性质已在 Refs.[1, 13] 中讨论过对于宇宙时空的情况。在下一节中我们展示某些真空球对称时空中也存在类似的特性。

III. 真空解在球对称中的应用

让我们考虑一个静态且球对称的度规的一般假设

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

其中 r 是面积半径， $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ 表示单位 2-球面上的圆度度规。将 (3.1) 代入场方程 (2.1) 并假设真空时空（即， $T_{\mu\nu} = 0$ ），我们得到以下一组动力学方程

$$4r^3\mathcal{G}_t{}^t = 2\alpha\kappa F\nu'(rF\nu' - \mathcal{A}) - r\mathcal{A} - 4r^2F\nu' = 0, \quad (3.2a)$$

$$4r^3\mathcal{G}_r{}^r = 2\alpha\kappa F\nu'(rF\nu' + \mathcal{A}) - r\mathcal{A} + 4r^2F\nu' = 0, \quad (3.2b)$$

$$4r^2\mathcal{G}_\theta{}^\theta = \mathcal{A} + 2\alpha\kappa F^2\nu'^2 = 0, \quad (3.2c)$$

$$\mathcal{G}_\varphi{}^\varphi = \mathcal{G}_\theta{}^\theta = 0, \quad (3.2d)$$

其中，为了方便表示，引入了辅助函数

$$\mathcal{A} := r^2F'' + 3r^2F'\nu' + 2F(r^2\nu'' + r^2\nu'^2 - 1) + 2. \quad (3.3)$$

在本文中，撇号表示关于径向坐标 r 的导数。为了使记号更简洁， F 和 ν 对 r 的函数依赖性隐含的。由于线元素 (3.1) 的对称性， $\mathcal{G}_\mu{}^\nu$ 的其余分量恒为零。显然，上述方程并非全部独立。事实上，取方程 (3.2a) 和 (3.2b) 的线性组合，我们得到

$$-2r^2(\mathcal{G}_r{}^r + \mathcal{G}_t{}^t) = \mathcal{A} + 2\alpha\kappa F^2\nu'^2 = 0, \quad (3.4a)$$

$$r^3(\mathcal{G}_r{}^r - \mathcal{G}_t{}^t) = (2r^2 + \alpha\kappa\mathcal{A})F\nu' = 0. \quad (3.4b)$$

¹ 这里我们使用 $\kappa = 8\pi G_N$ ，与 $c = 1$ 使得 $\alpha\kappa = D\ell_P^2$ 来自参考文献 [1] 的方程 (3.43) 和 α 包括一个 $\hbar$ 因子。

我们观察到方程 (3.4a) 与角方程 (3.2c) 相同。因此，方程 (3.4a) 和 (3.4b) 表示该系统的一组最小独立方程。

给定方程 (3.4b) 的因式分解形式，我们可以识别出两个不同的分支，这取决于 ν' 或括号中的项组合是否消失。因此，在这个理论中 Birkhoff 定理不成立。以下子节将分别分析这两个分支。如下面所示，第一个分支上的解并不涉及任何偏离广义相对论的情况，而第二个分支上的解则具有显著的 α 依赖修正。

A. 分支 I

在这个分支上，通过要求 $\nu' = 0$ 满足方程 (3.4b)。这意味着 $\nu(r) = \nu_0$ ，其中 ν_0 是一个常数。将代入方程 (3.2a)，我们得到

$$r^2 F'' - 2F + 2 = 0, \quad (3.5)$$

其通解为

$$F(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad (3.6)$$

其中质量 M 和宇宙学常数 Λ 作为自由积分常数出现。事实是 Λ 作为一个积分常数出现，这是场方程无迹的一个基本结果。这类似于单模引力 [9]，并且已经在手头理论的宇宙学解中观察到了类似的性质 [1, 13]。

因此，该分支上的解是施瓦茨希德-（反）德西特黑洞。我们还观察到这类解不依赖于 α ，因而与广义相对论中的相应解无法区分。出于这个原因，在下文中我们将把这个分支称为 “GR 分支”。

B. 分支 II

接下来，我们考虑 $\nu' \neq 0$ 的情况。然后，为了满足方程 (3.4b) 我们要求括号内的项组合为零，即

$$2r^2 + \alpha\kappa \mathcal{A} = 0. \quad (3.7)$$

通过结合方程 (3.7) 和方程 (3.2c) 来消除 $\mathcal{A}$ 可以得到一个关于 ν 的简单方程

$$(\alpha\kappa)^2 F^2 \nu'^2 - r^2 = 0. \quad (3.8)$$

这可以通过四次积分求解

$$\nu(r) = \frac{\sigma}{\alpha\kappa} \int dr \frac{r}{F(r)} \quad \text{where } \sigma := \pm 1. \quad (3.9)$$

将方程 (3.9) 代入方程 (3.2b) 我们得到一个二阶非线性常微分方程 $F(r)$

$$(\alpha\kappa)^2 r^2 F F'' + \sigma \alpha\kappa r^3 F' + 2F [(\alpha\kappa)^2 + (1 + \sigma)\alpha\kappa r^2] - 2(\alpha\kappa)^2 F^2 + 2r^4 = 0. \quad (3.10)$$

方程 (3.10) 的一个精确解是

$$F(r) = 1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}, \quad \text{with } \sigma = -1. \quad (3.11)$$

将解 (3.11) 代入方程 (3.9)，我们得到

$$\nu(r) = -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa} \right) + \nu_0, \quad (3.12)$$

其中 ν_0 是一个积分常数。将解 (3.11) 和 (3.12) 插入线元素 (3.1) 中，我们得到

$$ds^2 = -e^{2\nu_0} dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.13)$$

通过重新缩放时间坐标为 $t \mapsto e^{-\nu_0} t$ 并引入新的坐标 χ ，定义为 $\chi = \arcsin(r/r_0)$ 对于 $\alpha < 0$ 和 $\chi = \operatorname{arcsinh}(r/r_0)$ 对于 $\alpha > 0$ ，其中 $r_0 := \sqrt{|\alpha|\kappa}$ ，我们可以重新表达 (3.13) 为

$$ds^2 = -dt^2 + r_0^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2), \quad \text{for } \alpha < 0, \quad (3.14a)$$

$$ds^2 = -dt^2 + r_0^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2), \quad \text{for } \alpha > 0. \quad (3.14b)$$

这些是静态时空，其常数- t 切片的拓扑分别为一个 3 球面和一个 3 双曲面，且两者都具有空间曲率半径 r_0 。我们注意到，如果 $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$ ， r_0 是普朗克长度 $\ell_{\text{Pl}} = \sqrt{\kappa}$ 的量级。有趣的是观察到解 (3.14a), (3.14b) 分别对应于具有常数尺度因子的“冻结”FLRW 宇宙，且其拓扑结构分别为封闭和开放。它们的稳定性将在第 IV B 节中进行探讨。

有趣的是，解 (3.11) 并不是方程 (3.10) 唯一允许在 r

$$F(r) = \sum_{n=-L}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{\sqrt{|\alpha|\kappa}} \right)^n, \quad (3.15)$$

中进行幂律展开的解，其中 L 是一个有限且正整数。将 (3.15) 代入方程 (3.10)，我们得到展开系数 a_n 的一组代数非线性方程。我们发现系数 $a_{-k} = 0 = a_{2k+1}$ （其中 k 是任意正整数）对于两种情况 $\sigma = \pm 1$ 都为零。特别地，由于 a_{-1} 为零，这阻止了我们使用这种假设来获得类似史瓦西的解。一方面，在 $\sigma = 1$ 的情况下，我们获得了一个唯一解，为此提供了前几个展开系数： $a_0 = 0 = a_2$ ， $a_4 = -1$ ， $a_6 = 4$ ， $a_8 = -25$ ， $a_{10} = 226$ 。另一方面，固定 $\sigma = -1$ ，我们得到两个解。第一个由以下系数给出： $a_0 = 0 = a_2$ ， $a_4 = -1$ ， $a_6 = -2$ ， $a_8 = -11$ ， $a_{10} = -82 \dots$ ，而第二个也是更不平凡的解由

$$\begin{aligned} a_0 = 1, \quad a_4 = \frac{a_2 - 1}{5}, \quad a_6 = \frac{7a_2 - 5a_2^2 - 2}{70}, \quad a_8 = \frac{70a_2^3 - 127a_2^2 + 77a_2 - 20}{1890}, \\ a_{10} = \frac{-9450a_2^4 + 21110a_2^3 - 19091a_2^2 + 8857a_2 - 1426}{415800}. \end{aligned}$$

给出。我们注意到后者解由系数 a_2 参数化，该系数不能通过方程 (3.10) 确定。通过选择特定的 $a_2 = 1$ ，所有高阶系数消失，并恢复解 (3.11)。

更一般地说，很容易证明分支 II 的解不描述黑洞，因为这些解没有事件视界。实际上，假设 $F(r)$ 在 $r = \tilde{r} \neq 0$ 处有一个零点，方程 (3.10) 暗示 $F'(\tilde{r}) = -2\sigma\tilde{r}/(\alpha\kappa)$ 。将此结果代入方程 (3.9)，我们得到，在接近 $\tilde{r}$ ， $\nu(r) \approx -\frac{1}{2} \log(r/\tilde{r} - 1) + C$ 处，其中 C 是一个积分常数。因此，我们有 $g_{tt}(\tilde{r}) = 2\sigma\tilde{r}^2 \exp(2C)/(\alpha\kappa) \neq 0$ ，这表明在 $r = \tilde{r}$ 处没有视界。对于这种解，方程 (3.10) 可以通过在 $\tilde{r}$ 周围进行幂级数展开系统地求解。这样的解在 $\tilde{r}$ 附近是解析的，并表示为

$$F(r) = -\frac{2\sigma\tilde{r}}{\alpha\kappa}(r - \tilde{r}) - \left(\frac{2}{\tilde{r}^2} + \frac{2 + \sigma}{\alpha\kappa} \right) (r - \tilde{r})^2 + \mathcal{O}(r - \tilde{r})^3. \quad (3.16)$$

因此，对于 σ 的任一符号，(3.16) 给出一个由 $\tilde{r}$ 参数化的单参数解族。上述结果还表明此类解没有一个明确定义的 $\alpha \rightarrow 0$ 极限。

IV. 扰动的动力学

在本节中，我们分析两个分支上的首次扰动的动力学。扰动的度量是

$$\bar{g}_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是背景度量， $h_{\mu\nu}$ 表示度量扰动。由于我们感兴趣的背景是真空状态，物质场的能量-动量张量的第一个非平凡贡献出现在扰动级别。假设度量和物质扰动的阶数相同，即 $|h_{\mu\nu}|, |T_{\mu\nu}| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ ，其中 $\varepsilon \ll 1$ 。在下面的内容中，我们将进行符号转换：用它们的带杠对应物替换方程 (2.1) 中的所有量，并继续以 ε 为基准展开扰动。从此以后，无杠量将指代背景。此外，指标将使用背景度量来提升。依照此方案，场方程 (2.1) 可以在一阶 ε 下进行微扰展开。在以下的小节中，我们将研究背景解在两个分支上的线性微扰的动力学。

A. 分支 I 扰动

如第 III A 节所示, 分支 I 的背景解是 Schwarzschild-(Anti) de Sitter 黑洞。展开场方程 (2.1) 在这样的背景周围, 我们得到一阶的 ε

$$S_{\mu\nu}^{(1)} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{4} g_{\mu\nu} \right), \quad (4.2)$$

其中

$$S_{\mu\nu}^{(1)} = \Lambda \left(h_{\mu\nu} - \frac{h}{4} g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu h + \square h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla^\lambda h_{\nu\lambda} - \nabla_\nu \nabla^\lambda h_{\mu\lambda}) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla^\rho h_{\lambda\rho} - \square h), \quad (4.3)$$

是 $S_{\mu\nu}$ 的一级扰动, 且 $\square := g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, $h := g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ 。注意扰动场方程 (4.3) 在背景 $g_{\mu\nu}$ 下是无迹的: 这一性质继承自完整的场方程 (2.1)。

让我们指出, 微扰方程 (4.3) 不包含任何 α 依赖项。这一性质已经在第 III A 节对分支 I 的背景解中观察到, 并且上述方程表明它也适用于这些背景周围的微扰。此外, 由于 α 校正仅通过二次 Ricci 曲率项进入非线性场方程 (2.1), 因此对于线性微扰的方程与单模引力中的方程相同。(为了便于比较, 在附录中回顾了广义相对论和单模引力中对微扰的动力学方程。) 因此, 我们得出结论, 在该分支上的第一阶微扰动力学不受当前模型中量子引力激励校正的影响——无论黑洞的质量和宇宙常数的值如何。

B. 分支 II 扰动

转向分支 II 背景, 我们取精确解 (3.13) 作为背景 (为了方便, 将时间坐标重标度为 $t \mapsto e^{-\nu_0} t$)。请注意, 与分支 I 的解不同, 这样的背景不是一个爱因斯坦流形, 即 $R_{\mu\nu} \neq k g_{\mu\nu}$, 因此从方程 (2.1) 到方程 (4.2) 的简化在这种情况下不会发生。相反, 我们有 $R_0^0 = 0$ 和 $R_i^j = -\frac{2}{\alpha\kappa} \delta_i^j$, 其中 i, j 表示空间指标。

为了研究如何在该分支上的线性化动力学中引入 α -修正, 让我们分别考察轴向和极向度规扰动。为简单起见, 在本节中我们专注于真空扰动 (即我们假设 $T_{\mu\nu} = 0$)。

1. 轴向扰动

在 Regge-Wheeler 标准下 [16–19], 假设一个单色轴向扰动, 频率为 ω , 扰动线元素表示为

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2e^{-i\omega t} \sin \theta \frac{dP_\ell(\cos \theta)}{d\theta} (h_0(r)dt + h_1(r)dr) d\varphi, \quad (4.4)$$

其中 $|h_0(r)|, |h_1(r)| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ 是线性轴向扰动的径向轮廓, 而 $P_\ell(\cos \theta)$ 是次数为 ℓ 的 Legendre 多项式。将场方程 (2.1) 展开到线性阶, 我们发现角向和径向部分可以因子化 (如同广义相对论中那样), 并且扰动的径向分布遵循以下一阶常微分方程系统

$$i\omega h_0' - 2i\omega \frac{h_0}{r} + \left(\frac{\ell(\ell+1) - 2}{r^2} - \omega^2 \right) h_1 = 0, \quad (4.5)$$

$$i\omega h_0 + \frac{r}{\alpha\kappa} h_1 + \left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa} \right) h_1' = 0. \quad (4.6)$$

这一结果表明, 在这种情况下也没有来自 α 依赖修正的贡献。方程 (4.6) 和 (4.5) 可以结合起来得到一个二阶常微分方程 h_1

$$\left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa} \right) h_1'' - \left(2 + \frac{r^2}{\alpha\kappa} \right) \frac{h_1'}{r} - \left[\frac{\ell(\ell+1) - 2}{r^2} - \left(\omega^2 - \frac{1}{\alpha\kappa} \right) \right] h_1 = 0. \quad (4.7)$$

现在，我们注意到方程 (4.7) 可以通过引入以下辅助函数 $Q(r)$ 转换为类似薛定谔的形式，如

$$h_1(r) = \frac{r Q(r)}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}}} , \quad (4.8)$$

并变换径向坐标为

$$dr_* = \frac{dr}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}}} . \quad (4.9)$$

通过这种变换，方程 (4.7) 变为

$$\frac{d^2 Q}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{\alpha\kappa} \right) \right] Q = 0 . \quad (4.10)$$

在上述方程中， r 应该被看作是 r_* 的函数。请注意，在大距离情况下，离心势垒的影响可以忽略不计；因此，解要么是纯粹振荡的，要么根据 $\omega^2 - 1/(\alpha\kappa)$ 的符号呈指数衰减/不衰减。一旦方程 (4.10) 解出 $Q(r)$ ，就可以求解方程 (4.6) 来确定 h_0 。

$$h_0(r) = \frac{i}{\omega} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}} (r Q(r))' . \quad (4.11)$$

2. 极地扰动

我们可以将上述分析扩展到度规的单色极化扰动。在 Regge-Wheeler 规范 [16] 中，扰动后的度规为

$$ds^2 = -(1 + H_0(r)A(t, \theta))dt^2 + \frac{1 + H_2(r)A(t, \theta)}{1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}}dr^2 + 2H_1(r)A(t, \theta)dt dr + r^2(1 + K(r)A(t, \theta))(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (4.12)$$

其中我们定义了 $A(t, \theta) := e^{-i\omega t} P_\ell(\cos \theta)$ 作为简写符号和 $|H_0(r)|, |H_1(r)|, |H_2(r)|, |K(r)| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ 。将此度规代入场方程 (2.1) 并展开到 ε 的一阶，我们得到极化扰动的动力学方程。具体来说，我们得到了代数约束方程 $H_2(r) = H_0(r)$ 和以下一组方程用于剩余的动力学变量

$$i\omega H_1 - (H_0 + K)' = 0 , \quad (4.13a)$$

$$\left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}\right) \left(H_0'' - \frac{2K'}{r} - 2i\omega H_1'\right) + \frac{r}{\alpha\kappa} H_0' - \left(\omega^2 + \frac{2}{\alpha\kappa} + \frac{2}{r^2}\right) H_0 - \frac{2i\omega}{\alpha\kappa} r H_1 + \frac{\ell(\ell+1) - 2}{r^2} K = 0 , \quad (4.13b)$$

$$\left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}\right) \left(\frac{2i\omega H_1}{r} - K''\right) + \left(\frac{2K'}{r} + \frac{3r}{\alpha\kappa}\right) K' - \omega^2 K + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{\alpha\kappa}\right) H_0 = 0 . \quad (4.13c)$$

我们注意到参数 α 仅通过背景曲率 $\sim 1/(\alpha\kappa)$ 进入扰动的动力学方程。上述内容可以组合为

$$\frac{d^2 W}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{\alpha\kappa} \right) \right] W = 0 , \quad (4.14)$$

其中我们引入了量 $W(r) := (H_0(r) + K(r))/r$ 和 r_* 的定义如 (4.9) 所示。以这种形式书写时，极坐标扰动的方程 (4.14) 与变量 Q 的轴向扰动方程 (4.10) 完全匹配。一旦方程 (4.14) 被解出，可以通过求积法解出方程 (4.13a) 以确定 H_1 。最后，上述系统的另一个线性无关组合给出了以下动态方程对于 H_0 ，其中 W 扮演源的角色

$$\left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}\right) H_0'' + \frac{2 + \frac{3r^2}{\alpha\kappa}}{r} H_0' - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \omega^2 + \frac{2r^2}{\alpha\kappa}\right) H_0 = \left(1 + \frac{r^2}{\alpha\kappa}\right) \frac{6W'(r)}{r} + \left(\frac{\ell(\ell+1) - 2}{r^2} - 2\omega^2\right) W(r) . \quad (4.15)$$

最后，我们观察到，由于方程 (4.10) 和 (4.14) 具有相同的形式，轴向和极向扰动的准正常模式谱 [20] 完全相同。这种性质在广义相对论中的黑洞背景中早已为人所知 [19, 21, 22]。

V. 结论

我们表明，在球对称的情况下，量子引力现象动力学的静态真空解分为两个分支。分支 I 的解是 Schwarzschild-(Anti) de Sitter 时空。因此，它们与广义相对论中相应的黑洞解无法区分。另一方面，分支 II 的解不描述黑洞。相反，它们是没有视界的时空，并且以大曲率值为特征。我们在该分支上获得了一个精确解，它描述了一个具有非零空间曲率（约为普朗克曲率尺度 $\sim \ell_{Pl}^{-2}$ ）的非膨胀 FLRW 时空。

我们全面证明了分支 I 背景的扰动不会引起任何偏离单模引力微扰动力学的现象，无论黑洞质量如何以及宇宙学常数取何值。对于分支 II，我们集中讨论了上述精确背景解，并考虑了真空引力扰动。我们分别分析了极化和轴向度规扰动的动力学行为。同样，在这种情况下，无论是哪种极性区段的扰动，都不会偏离单模引力的行为。

致谢

AA-S 得到了 Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) — 项目 ID 51673086 的资助, 并感谢 Grants No. PID2020 – 118159 GB-C44 和 PID2023-149018NB-C44(由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助) 的支持。MdC 感谢 INFN iniziativa specifica GeoSymQFT 的支持。MDP 感谢 INFN iniziativa specifica ST&FI 的支持, 并对南丹麦大学、丹麦高等研究院和奥登塞量子理论中心（丹麦）在工作最后阶段的接待表示感谢。本工作贡献于 COST Action CA23130 – Bridging high and low energies in search of quantum gravity (BridgeQG)。

附录：广义相对论和单模引力中 SCHWARZSCHILD-(反)DE SITTER 的扰动

在本附录中，我们回顾了广义相对论和么正引力中线性度量和物质扰动的动力学，这些动力学围绕着相同的施瓦西-（反）德西特背景。

在广义相对论中的微扰场方程为

$$2G_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\mu \nabla^\rho h_{\nu\rho} + \nabla_\nu \nabla^\rho h_{\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h + (\Lambda h + \square h - \nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma}) g_{\mu\nu} - 2\Lambda h_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu} , \quad (\text{A.1})$$

其中 $\square := g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, $h := g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ 。在与逆背景度量 $g^{\mu\nu}$ 缩并后，方程 (A.1) 给出

$$G^{(1)} = \square h - \nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma} + \Lambda h = \kappa T . \quad (\text{A.2})$$

方程 (A.1) 左边的散度恒为零， $\nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ ，这是 Bianchi 恒等式的线性化版本。因此，对方程 (A.1) 两边取散度我们得到 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 。

另一方面，么模引力的场方程为 [23]

$$S_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{R}{4} g_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{4} g_{\mu\nu} \right) . \quad (\text{A.3})$$

插入扰动度量 (4.1) 并在线性化 Schwarzschild-(Anti) de Sitter 背景周围的场方程中，我们得到扰动方程

$$2S_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\mu \nabla^\rho h_{\nu\rho} + \nabla_\nu \nabla^\rho h_{\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h + \frac{1}{2} (\square h - \nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma} + \Lambda h) g_{\mu\nu} - 2\Lambda h_{\mu\nu} = 2\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{4} g_{\mu\nu} \right) . \quad (\text{A.4})$$

将这些方程与逆背景度量相缩合，可以很容易地实现它们是无迹的。事实上，对等式 (A.4) 两边取散度，我们得到

$$\nabla^\nu \left(S_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{\kappa}{4} T g_{\mu\nu} \right) = \kappa \nabla^\nu T_{\mu\nu} . \quad (\text{A.5})$$

利用线性化的 Bianchi 恒等式和 $S_{\mu\nu}^{(1)} = G_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{4} G^{(1)} g_{\mu\nu}$ ，这个方程简化为

$$-\frac{1}{4} \nabla_\mu \left(G^{(1)} - \kappa T \right) = \kappa \nabla^\nu T_{\mu\nu} . \quad (\text{A.6})$$

如果我们进一步假设物质场的能动张量守恒（即 $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ ，在么模引力中这是一个独立的假设），我们最终得到

$$G^{(1)} - \kappa T = c, \quad (\text{A.7})$$

其中 c 是一个积分常数。最后，使用公式 (A.7) 可以直接证明公式 (A.4) 可以改写为形式 (A.1)，其中宇宙学常数变为 $\Lambda \mapsto \Lambda + c$ 。

-
- [1] Ana Alonso-Serrano and Marek Liška. Quantum phenomenological gravitational dynamics: A general view from thermodynamics of spacetime. *JHEP*, 12:196, 2020.
 - [2] Ted Jacobson. Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1260–1263, 1995.
 - [3] Ted Jacobson and Renaud Parentani. Horizon entropy. *Found. Phys.*, 33:323–348, 2003.
 - [4] Christopher Eling, Raf Guedens, and Ted Jacobson. Non-equilibrium thermodynamics of spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, 96:121301, 2006.
 - [5] Romesh K. Kaul and Parthasarathi Majumdar. Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5255–5257, 2000.
 - [6] Steven Carlip. Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula. *Class. Quant. Grav.*, 17:4175–4186, 2000.
 - [7] Krzysztof A. Meissner. Black hole entropy in loop quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 21:5245–5252, 2004.
 - [8] Ashoke Sen. Logarithmic Corrections to Schwarzschild and Other Non-extremal Black Hole Entropy in Different Dimensions. *JHEP*, 04:156, 2013.
 - [9] George F. R. Ellis, Henk van Elst, Jeff Murugan, and Jean-Philippe Uzan. On the Trace-Free Einstein Equations as a Viable Alternative to General Relativity. *Class. Quant. Grav.*, 28:225007, 2011.
 - [10] Raúl Carballo-Rubio, Luis J. Garay, and Gerardo García-Moreno. Unimodular gravity vs general relativity: a status report. *Class. Quant. Grav.*, 39(24):243001, 2022.
 - [11] Gabriel R. Bengochea, Gabriel Leon, Alejandro Perez, and Daniel Sudarsky. A clarification on prevailing misconceptions in unimodular gravity. *JCAP*, 11:011, 2023.
 - [12] Ana Alonso-Serrano, Marek Liška, and Antonio Vicente-Becerril. Friedmann equations and cosmic bounce in a modified cosmological scenario. *Phys. Lett. B*, 839:137827, 2023.
 - [13] Marco de Cesare and Giulia Gubitosi. Cosmological evolution from modified Bekenstein entropy law. *JCAP*, 01:046, 2024.
 - [14] Ana Alonso-Serrano, Guillermo A. Mena Marugan, and Antonio Vicente-Becerril. Analytic Primordial Power Spectrum in the Dressed Metric Approach to Loop Quantum Cosmology and Thermodynamics of Spacetime. 7 2023.
 - [15] Ana Alonso-Serrano, Luis J. Garay, and Marek Liška. From spacetime thermodynamics to Weyl transverse gravity. *Phys. Rev. D*, 111(6):064019, 2025.
 - [16] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, 1957.
 - [17] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.
 - [18] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Vol. 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 3 2018.
 - [19] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. 1985.
 - [20] S. Chandrasekhar and S. Detweiler. The quasi-normal modes of the schwarzschild black hole. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 344(1639):441–452, 1975.
 - [21] Adam Pound and Barry Wardell. Black hole perturbation theory and gravitational self-force. 1 2021.
 - [22] Misao Sasaki and Hideyuki Tagoshi. Analytic black hole perturbation approach to gravitational radiation. *Living Rev. Rel.*, 6:6, 2003.
 - [23] Alejandro Perez, Daniel Sudarsky, and Edward Wilson-Ewing. Resolving the H_0 tension with diffusion. *Gen. Rel. Grav.*, 53(1):7, 2021.