

为什么多体纠缠对全息术至关重要

Norihiro Iizuka^{♣,◇}, Simon Lin[♡], and Mitsuhiro Nishida[♠]

[♣]*Department of Physics, National Tsing Hua University, Hsinchu 300044, Taiwan*

[◇]*Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan*

[♡]*New York University Abu Dhabi, P.O. Box 129188, Abu Dhabi, United Arab Emirates*

[♠]*National Institute of Technology, Yuge College, Ehime 794-2593, Japan*

2025 年 4 月 25 日

摘要

我们主张多体纠缠在全息术和全息量子纠错码中普遍存在。我们的论点基于真正的多重熵，这是一种用于衡量多体纠缠的新指标。我们还讨论了块 IR 重构与边界子区域上的大量多体纠缠之间的联系。

为引力研究基金会

2025 年度引力论文奖而撰写的论文

1 介绍

纠缠和量子信息在我们现代理解量子引力和 AdS/CFT 中扮演着关键角色。沿这条路线取得的开创性进展是以 Ryu-Takayanagi (RT) 公式 [1, 2] 的发现为标志, 该公式将边界 CFT 中的纠缠熵与 AdS 体内的最小曲面面积联系起来。这开启了“从纠缠中获得几何”计划 [3, 4], 确立了现在的普遍信念, 即体几何数据编码在边界场论的纠缠结构中。

RT 公式告诉我们, 全息 CFT 态必须具有较大的纠缠才能支撑一个体几何。一个自然的问题是: 我们能否分类全息 CFT 态的不同类别的纠缠量? 或者换一种说法, 不同数量的参与者之间的纠缠如何贡献于这一图景? 不幸的是, 仅仅通过检查纠缠熵本身无法回答这个问题, 因为它只对纯态中的二分的纠缠敏感。在三体纠缠方面, 参考文献 [5] 通过研究反射熵 [6] 和马尔可夫间隙 [7] 回答了这个问题。¹ 然而对于更高阶的纠缠, 这仍然是一个开放问题。

在本文中, 我们希望通过论证全息 CFT 状态必须包含大量 q -部分纠缠对于所有² $q \geq 3$ 来回答这个问题。我们的提议基于两个观察: 第一个是全息纠错码 [10] 的结构, 在那里我们论证说在全息条件下, 其代码子空间自然具有大量的多部分纠缠。第二个是一种新的多部分纠缠度量称为真实的多熵 [11], 我们论证认为从其提出的几何对偶来看, 全息状态下的该度量是非零的。我们在本节余下部分简要回顾它们。

全息量子纠错码

我们现代全息字典理解中的一个重要部分是实现量子纠错 (QEC) 在 AdS/CFT [10] 中。中心思想是应该将体和边界的关联视为一个线性映射, 该映射将半经典体算子编码到 CFT 希尔伯特空间中, 然后可以从边界数据“重建”这些信息 [12]。

作为因果楔的扩展, 边界子区域 R 的纠缠楔形区被定义为由 R 本身及其 RT 表面所限定的体区域, 这已被建议为给定 R [13–16] 上数据可重构的区域。这种纠缠楔重构的一个显著特征是无需访问整个边界即可执行重构。因此, 即使某些边界子区域丢失, 体算符仍

¹参见 [8, 9] 以了解关于此主题的最新进展和讨论。

²这里指的是从 q 到 $\mathcal{O}\left(V/\ell_{\text{pl}}^d\right)$ 的所有内容, 其中 ℓ_{pl} 是普朗克长度尺度, V 是边界 CFT 的 d 维体积。

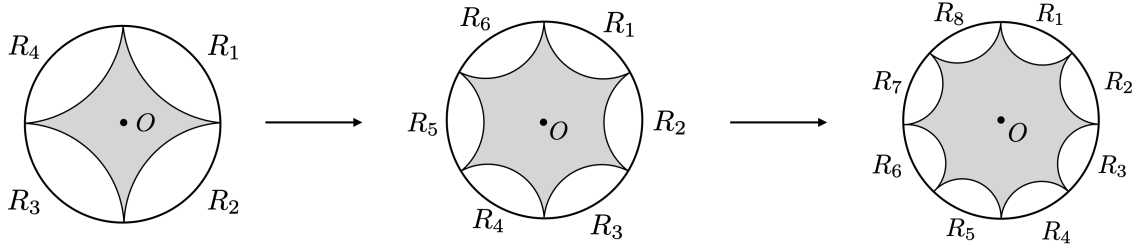


图 1: 边界子区域 $R_1, R_2, \dots$ 及其相应的纠缠楔 (用白色表示)。 O 表示一个局部算子, 即使失去一些子区域也能被重构。当我们将边界划分为更细的子区域时, O 的可能位置 (用灰色表示) 会变大。在边界场论中, 所有子区域都有独立的自由度。

然可以被重构。此外, 丢失子区域的选择是任意的, 尽管根据重构局部算符的位置, 丢失的子区域数量受到限制。例如, 在图 1 中, 即使丢失子区域 R_1 或 R_2 等, 体局部算子 O 的重建也是可能的。

人们长期以来就明白, QEC 的这些性质只有在子系统之间存在纠缠的情况下才有可能。然而, 这种纠缠的确切结构仍然很大程度上是未知的。这是我们研究全息 QEC 中 q -部分纠缠的主要动机之一。

真实的多熵

为了研究 q -部分纠缠, 我们将使用多熵 [17–19], 这是纠缠熵向 q -部分子系统的一种自然推广。多熵, 记为 $S^{(q)}$, 定义为纯密度矩阵的对称缩合的对数。多熵可以用来量化更高部分的纠缠。然而, $S^{(q)}$ 本身并不是衡量 q -partite 纠缠的良好指标, 因为它对所有 q -partite 纠缠在 $q < q$ 中也很敏感。因此, 人们无法确定 $S^{(q)}$ 的非零值是由于双向纠缠还是多向纠缠。为解决此问题, 可以定义一个真实的多熵 (记作 $GM^{(q)}$), 其具有以下性质 [11]:

- $GM^{(q)}$ 包括 q -部多熵。
- $GM^{(q)}$ 对于所有 q 色纠缠态在 $q < q$ 下消失。³

简而言之, 应将 $GM^{(q)}$ 视为多部件纠缠包含在多重熵中的不同数量的 “不可约表示

³这些状态的示例包括但不限于可分态。例如, 在 $q = 3$ 中, 它们还包括三角状态。它们是形式为 $|\psi\rangle = |\psi_{A_1 B_2}\rangle |\psi_{B_1 C_2}\rangle |\psi_{C_1 A_2}\rangle$ 的两体纠缠态。

分解”。

在实际操作中， $GM^{(q)}$ 可以通过所有较低部分的 q -多熵的线性组合明确构造出来，使用 $q \leq q$ [11, 20]。例如， $q = 3$ 真实多熵由

$$GM^{(3)}(A : B : C) = S^{(3)}(A : B : C) - \frac{1}{2} (S(A) + S(B) + S(C)). \quad (1)$$

给出对于更高部分的情况，真实多熵带有自由参数。这与一般情况下即使是同一 q 也有许多不同类别的多体纠缠的事实有关。对于 $q = 4$ 存在一个自由参数 a :

$$\begin{aligned} GM^{(4)}(A : B : C : D) &= S^{(4)}(A : B : C : D) - \frac{1}{3} (S^{(3)}(AB : C : D) + S^{(3)}(AC : B : D) + \dots) \\ &+ a (S(AB) + S(AC) + S(AD)) + (1/3 - a) (S(A) + S(B) + S(C) + S(D)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $+\dots$ 表示对所有可能的边界子区域进行求和（总共 6 项）。对于 $q = 5$ 我们也有一个自由参数 b :

$$\begin{aligned} GM^{(5)}(A : B : C : D : E) &= S^{(5)}(A : B : C : D : E) - \frac{1}{4} (S^{(4)}(AB : C : D : E) + \dots) \\ &+ \frac{1+4b}{10} (S^{(3)}(AB : CD : E) + \dots) + \frac{1-16b}{20} (S^{(3)}(ABC : D : E) + \dots) \\ &- \frac{1+4b}{20} (S(AB) + S(AC) + \dots) + b (S(A) + S(B) + S(C) + S(D) + S(E)). \end{aligned} \quad (3)$$

我们强调，对于任意正整数 q ，真正的多熵可以以直接的方式获得，甚至对于 $q > 5$ 也是如此，这是相对于其他先前提出的多部件纠缠度量的一个主要优势。

2 量子纠错中的码子空间和多体纠缠

我们从量子纠错码 (QEC) 的角度展示了全息中多体纠缠的重要性。量子纠错码与纠缠之间的深刻联系已经讨论了很长时间 [21, 22]。主要思想是将原始状态编码到具有更大维度的物理希尔伯特空间的代码子空间中。一般来说，编码后的状态在物理希尔伯特空间中的子系统之间存在纠缠，并且这种纠缠可以保护量子信息免受错误的影响。与全息相关的

量子纠错码类型被称为纠错码，在其中，错误仅仅是擦除物理空间中的一个子系统。

这里为了我们的目的，我们展示一个简单的示例，其中我们将一个量子位编码为四个 [23]。编码映射由以下给出：

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle) \equiv |\bar{0}\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1010\rangle + |0101\rangle) \equiv |\bar{1}\rangle. \quad (4)$$

此代码保护物理希尔伯特空间中任何单个量子位的擦除。然而，丢失两个或更多量子位时，关于原始状态的信息会丢失。读者被鼓励将其视为图 1 中全息 QEC 的离散化示例，在其中一个体量子位编码为四个子区域的边界。

为了大致了解纠错是如何工作的，假设物理希尔伯特空间中的第一个量子比特被擦除。这相当于对第一个量子比特执行部分迹 Tr_1 。在这种操作下，我们有

$$\begin{aligned} |\bar{0}\rangle \langle \bar{0}| &\xrightarrow{\text{Tr}_1} \frac{1}{2} (|000\rangle \langle 000| + |111\rangle \langle 111|), \quad |\bar{1}\rangle \langle \bar{1}| \xrightarrow{\text{Tr}_1} \frac{1}{2} (|010\rangle \langle 010| + |101\rangle \langle 101|), \\ |\bar{1}\rangle \langle \bar{0}| &\xrightarrow{\text{Tr}_1} \frac{1}{2} (|010\rangle \langle 111| + |101\rangle \langle 000|), \quad |\bar{0}\rangle \langle \bar{1}| \xrightarrow{\text{Tr}_1} \frac{1}{2} (|111\rangle \langle 010| + |000\rangle \langle 101|). \end{aligned} \quad (5)$$

很容易看出，在这种操作之后，物理子空间中的矩阵元素不会混合，因此可以轻松读出原始状态。物理希尔伯特空间中其他量子比特的擦除遵循类似的故事。另一方面，如果两个量子比特被迹化，则会失去可区分性。例如，如果第一个和第三个量子比特被迹化，显然 $|\bar{0}\rangle$ 和 $|\bar{1}\rangle$ 变得相同。如果第一个和第二个量子比特被迹化，则 $|\bar{1}\rangle \langle \bar{0}|$ 和 $|\bar{0}\rangle \langle \bar{1}|$ 都消失并且失去可区分性。类似地，擦除任何其他两个量子比特也会导致失去可区分性。

这个示例的一个显著性质是，所有由 (4) 编码的状态都具有“广义 GHZ 态” $|\text{GHZ}_q\rangle$ 的特殊形式，其中包含 $q = 4$ 。众所周知，在某些方面， q -量子比特的广义 GHZ 态是最大纠缠的 [24]。确实，可以通过显式计算 GHZ 态的 q -方真多熵 $\text{GM}^{(q)}$ 来验证这一点。可以确认，对于 $q = 4$, [20]

$$\text{GM}_{|\text{GHZ}_4\rangle}^{(4)} = (1/3 - a) \log 2. \quad (6)$$

因此编码的状态通常具有非零的多体纠缠。

我们在这里给出另一个五量子比特的例子，通常称为五量子比特完美张量码 [25]。该代码可以保护物理希尔伯特空间中任意两个量子比特的丢失。此代码的码字是

$$\begin{aligned} |\bar{0}\rangle &= \frac{1}{4} \left(|00000\rangle + |10010\rangle + |01001\rangle + |10100\rangle + |01010\rangle - |11011\rangle - |00110\rangle - |11000\rangle \right. \\ &\quad \left. - |11101\rangle - |00011\rangle - |11110\rangle - |01111\rangle - |10001\rangle - |01100\rangle - |10111\rangle + |00101\rangle \right), \\ |\bar{1}\rangle &= \frac{1}{4} \left(|11111\rangle + |01101\rangle + |10110\rangle + |01011\rangle + |10101\rangle - |00100\rangle - |11001\rangle - |00111\rangle \right. \\ &\quad \left. - |00010\rangle - |11100\rangle - |00001\rangle - |10000\rangle - |01110\rangle - |10011\rangle - |01000\rangle + |11010\rangle \right). \end{aligned} \quad (7)$$

与 $q = 4$ 相反，这些编码状态不是广义的 GHZ 类型。也可以确认，对于这些状态， $q = 5$ 真正的多熵⁴ 在一般情况下是非零的 [20]。一般来说，预期更高阶的 $q \geq 6$ 编码状态类似于这个 $q = 5$ 示例。类似地，可以预期编码的状态通常表现出非零的真实多熵 $GM^{(q)}$ ：

$$GM^{(q)} \neq 0 \quad (\text{for encoded states}). \quad (8)$$

有人可能会反对说，我们在众多可用的量子纠错码中挑选出那些在代码子空间中有大量多体纠缠的例子，并且确实已知有些代码只需要参数上很小的纠缠 [26]。然而，我们在这里争论的是它们不具备作为 全息代码所需要的特性。全息量子纠错码具有一个非常特殊的性质：如果我们考虑在体深处的一个操作符 O ，那么 O 将受到保护，直到整个边界子系统的二分之一被擦除——这恰好是不违反无克隆原理的情况下能做到的最好结果。有人争论说，这样的代码只有在存在几乎最大量纠缠的情况下才有可能实现 [27, 28]，我们在此节中给出的两种代码都是很好的例子。是否最大的纠缠意味着大量的多体纠缠仍然是一个开放问题。然而，基于本节所给的例子和全息学中的各种证据⁵，我们认为对于全息量子纠错码来说情况确实如此。

⁴确切地说，Rényi 版本的真实多熵通常是非零的。

⁵例如参见 [5, 7, 9] 中关于大量三方纠缠的论点以及 [29, 30] 中关于全息中大量多体纠缠的提示。

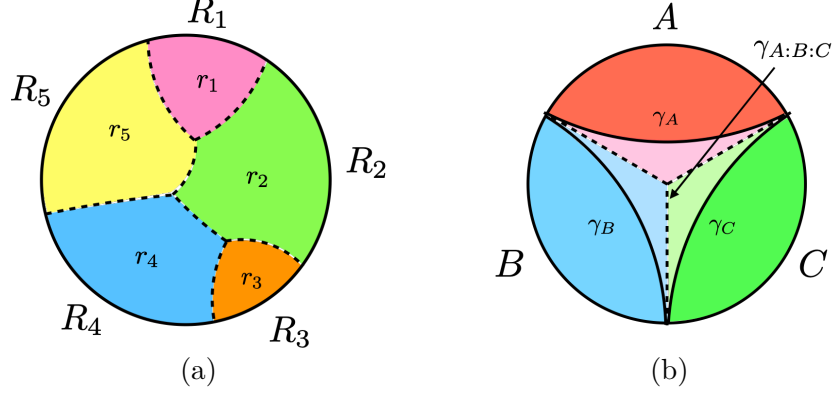


图 2: (a) 一个通用的 5 路割。切割区域是所有虚线面积之和。请注意，极小曲面的交点总是三价的。(b) 用于计算 $GM^{(3)}$ 的相关极小曲面。

3 全息学中的真实多重熵

我们关于大 multipartite 纠缠的主张的另一个证据来自 AdS/CFT 中极小曲面的结构。考虑一个 Σ 的 D 维 AdS 空间的时间切片。我们在下面使用 $D = 3$ ，但我们期望对于一般的 D 也存在类似的论点。我们将渐近边界 $\partial\Sigma$ 划分为 $q \geq 3$ 个连通子区域 $R_1, R_2, \dots, R_q$ ，并评估边界 CFT 态的真实多熵 $GM^{(q)}(R_1 : R_2 : \dots : R_q)$ 。如第 1 节所示， $GM^{(q)}$ 是由多熵 $S^{(p)}$ 的线性组合给出的，系数为 $p \leq q$ 。想法是 $S^{(p)}$ 具有一个提议的全息对偶 [17]⁶，作为 p -多路割的面积（除以 $4G_N$ ）在 Σ 上。一个 p -多路割是将 Σ 分割成 p 个子区域 r_i 的最小面积划分，使得每个 r_i 都包含边界区域 R_i ，参见图 2a 示例。因此， $GM^{(q)}$ 可以仅通过整体几何来确定。接下来我们将给出示例（既包括解析方法也包括数值方法），通常情况下

$$GM^{(q)} = O\left(\frac{1}{G_N}\right) \quad (\text{in holography}). \quad (9)$$

这表明与 Σ 对偶的边界 CFT 状态具有较大的 q -部分纠缠。

- $q = 3$

⁶参见 [31]。

对于三部分划分， $q = 3$ 真正的多熵 (1) 由以下线性组合给出：

$$\text{GM}^{(3)}(A : B : C) = \gamma_{A:B:C} - \frac{1}{2}(\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C), \quad (10)$$

其中 $\gamma_{A:B:C}$ 是三向切口的面积（如图 2b 中的虚线）， $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ 是 RT 表面的面积。不难看出⁷ 由 (10) 定义的数量是半正的且大于零当且仅当每个单独区域的纠缠楔子集的并集不等于整个体区域。⁸，这是我们考虑的全息码的一个定义特征。

- $q = 4$

对于四分法划分， $\text{GM}^{(4)}$ (2) 带有一个自由参数 a ：

$$\begin{aligned} \text{GM}^{(4)}(A : B : C : D) &= \gamma_{A:B:C:D} - \frac{1}{3}(\gamma_{AB:C:D} + \gamma_{AC:B:D} + \dots) \\ &+ a(\gamma_{AB} + \gamma_{AC} + \gamma_{AD}) + (1/3 - a)(\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C + \gamma_D). \end{aligned} \quad (11)$$

尽管复杂得多，但仍可以证明与 (11) 对应的体几何量 [20] 在 $a \geq 1/3$ 下是非零的。在这里我们通过图 3a 数值验证了这一事实。结合第 1 节的结果，这些都是非常有力的证据，表明全息 CFT 态具有大的四体纠缠。

- $q \geq 5$

上述构造可以很容易地推广到边界更高阶的划分。全息真实多熵的表达式将涉及越来越复杂的线性组合和更多的自由参数。一般来说，我们期望当存在一个不能从单一边界子区域重构的体区域时 $\text{GM}^{(q)}$ 非零，在这种情况下，线性组合中 $\text{GM}^{(q)}$ 的最高多路割是非平凡且与所有较低的 $q < q$ 割不同的。这一观察结果导致了我们的提议：全息 CFT 状态必须也包含大量真实的 q -阶纠缠，对于任何 $q \geq 5$ 。为了记录，这里我们对 $\text{GM}^{(5)}$ 进行了数值评估，并验证了在图 3b 中边界的一般 5 分划情况下 $\text{GM}^{(5)} \neq 0$ 成立。

⁷展示这一点的一种简单方法是将表面 $\gamma_{A:B:C}$ 分成三个具有 $\frac{1}{2}$ 权重的 2-切割，然后利用关于 $\gamma_{A/B/C}$ [11] 的三角不等式。

⁸相同的量 (10) 在 Ref. [32] 中被用来论证随机张量网络中存在大量三方纠缠，通过展示它下界于边界态的马尔可夫间隙 [7]，这是衡量三方纠缠的另一个独立指标。

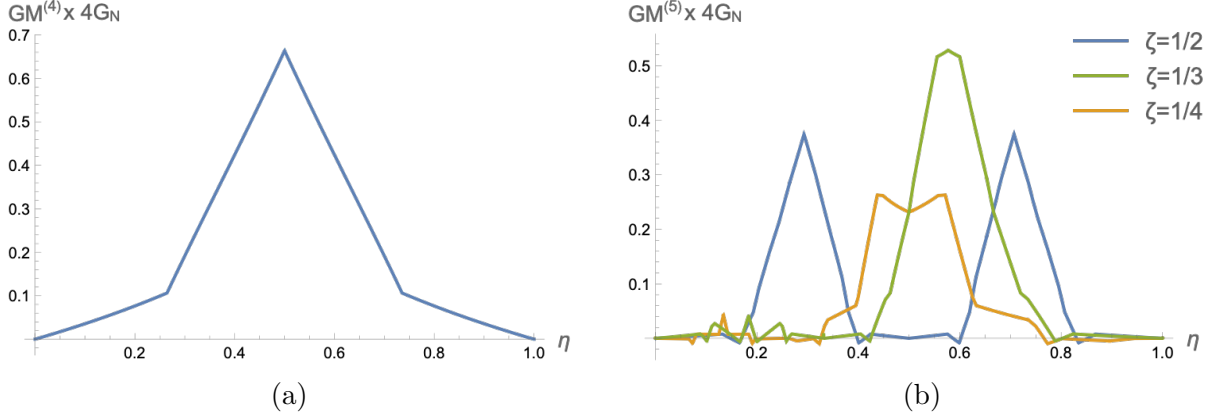


图 3: (a) 真空 AdS_3 中 $\text{GM}^{(4)}$ 的全息值，绘制于四点分离边界区域的共形交叉比 η 。我们这里使用 $a = 1/3$ 。(b) 真空 AdS_3 中 $\text{GM}^{(5)}$ 的全息值。有五个边界分离点，这使我们剩下两个自由度，我们将这两个自由度取为前两点相对于剩余三点的共形交叉比 (η, ζ) 。这里我们使用 $b = 0$ 。我们在图中设置 $\ell_{\text{AdS}} = 1$ 。

4 讨论

在这篇论文中，我们论证了全息量子纠错码的结构和体空间最小表面的存在性暗示了大量高阶多方纠缠的存在。对于不同 $\mathbf{q}$ 中的多方纠缠所扮演的角色有何区别？回答这个问题的一个线索来自全息 QEC 码的另一个重要特性。如图 1 所示，当我们将边界划分得越来越细时，我们就失去了对体空间中越来越接近边界的区域的访问权。换句话说，构建更深的体算子必须更多地依赖于更精细边界子区域之间的更高阶多方纠缠，而不是靠近边界⁹的算子。从纯边界的角度来看，这可以翻译为高 $\mathbf{q}$ -方纠缠在红外区变得越来越重要，因为众所周知，体 AdS 中的径向方向可以解释为边界 CFT [34–36] 的 RG 流。

上述陈述的另一项证据与极小曲面和多路切割有关。如第 3 节所示，多路切割表面总是位于无法从任何单个边界子系统重建的区域（图 1 中的灰色区域）。此外，在纠缠表面附近的边界上，所有多路切割的贡献相互抵消。这也暗示了高部分纠缠与中心处操作符的体积重建之间的紧密联系。

⁹参见参考文献 [33] 以获取关于多部件纠缠和全息量子纠错码的类似讨论。

致谢

S.L. 想要感谢 Ahmed Almheiri 的富有见解的讨论和评论。N.I. 的工作部分得到了 JSPS KAKENHI 资助号 18K03619、MEXT KAKENHI 基于变革性研究领域 A “极端宇宙” 资助号 21H05184 和台湾 NSTC 资助号 114-2112-M-007-025-MY3 的支持。

参考文献

- [1] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602, [[hep-th/0603001](#)].
- [2] S. Ryu and T. Takayanagi, *Aspects of Holographic Entanglement Entropy*, *JHEP* **08** (2006) 045, [[hep-th/0605073](#)].
- [3] M. Van Raamsdonk, *Building up spacetime with quantum entanglement*, *Gen. Rel. Grav.* **42** (2010) 2323–2329, [[arXiv:1005.3035](#)].
- [4] J. Maldacena and L. Susskind, *Cool horizons for entangled black holes*, *Fortsch. Phys.* **61** (2013) 781–811, [[arXiv:1306.0533](#)].
- [5] C. Akers and P. Rath, *Entanglement Wedge Cross Sections Require Tripartite Entanglement*, *JHEP* **04** (2020) 208, [[arXiv:1911.07852](#)].
- [6] S. Dutta and T. Faulkner, *A canonical purification for the entanglement wedge cross-section*, *JHEP* **03** (2021) 178, [[arXiv:1905.00577](#)].
- [7] P. Hayden, O. Parrikar, and J. Sorce, *The Markov gap for geometric reflected entropy*, *JHEP* **10** (2021) 047, [[arXiv:2107.00009](#)].
- [8] T. Mori and B. Yoshida, *Does connected wedge imply distillable entanglement?*, [arXiv:2411.03426](#).

- [9] T. Mori and B. Yoshida, *Tripartite Haar random state has no bipartite entanglement*, [arXiv:2502.04437](#).
- [10] A. Almheiri, X. Dong, and D. Harlow, *Bulk Locality and Quantum Error Correction in AdS/CFT*, *JHEP* **04** (2015) 163, [[arXiv:1411.7041](#)].
- [11] N. Iizuka and M. Nishida, *Genuine multi-entropy and holography*, [arXiv:2502.07995](#).
- [12] A. Hamilton, D. N. Kabat, G. Lifschytz, and D. A. Lowe, *Holographic representation of local bulk operators*, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 066009, [[hep-th/0606141](#)].
- [13] B. Czech, J. L. Karczmarek, F. Nogueira, and M. Van Raamsdonk, *The Gravity Dual of a Density Matrix*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 155009, [[arXiv:1204.1330](#)].
- [14] X. Dong, D. Harlow, and A. C. Wall, *Reconstruction of Bulk Operators within the Entanglement Wedge in Gauge-Gravity Duality*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016), no. 2 021601, [[arXiv:1601.05416](#)].
- [15] J. Cotler, P. Hayden, G. Penington, G. Salton, B. Swingle, and M. Walter, *Entanglement Wedge Reconstruction via Universal Recovery Channels*, *Phys. Rev. X* **9** (2019), no. 3 031011, [[arXiv:1704.05839](#)].
- [16] C.-F. Chen, G. Penington, and G. Salton, *Entanglement Wedge Reconstruction using the Petz Map*, *JHEP* **01** (2020) 168, [[arXiv:1902.02844](#)].
- [17] A. Gadde, V. Krishna, and T. Sharma, *New multipartite entanglement measure and its holographic dual*, *Phys. Rev. D* **106** (2022), no. 12 126001, [[arXiv:2206.09723](#)].
- [18] G. Penington, M. Walter, and F. Witteveen, *Fun with replicas: tripartitions in tensor networks and gravity*, *JHEP* **05** (2023) 008, [[arXiv:2211.16045](#)].
- [19] A. Gadde, V. Krishna, and T. Sharma, *Towards a classification of holographic multi-partite entanglement measures*, *JHEP* **08** (2023) 202, [[arXiv:2304.06082](#)].

- [20] N. Iizuka, S. Lin, and M. Nishida, *In preparation*, .
- [21] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, *Mixed state entanglement and quantum error correction*, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 3824–3851, [quant-ph/9604024].
- [22] E. Knill and R. Laflamme, *Theory of quantum error-correcting codes*, *Phys. Rev. A* **55** (1997), no. 2 900.
- [23] M. Grassl, T. Beth, and T. Pellizzari, *Codes for the quantum erasure channel*, *Phys. Rev. A* **56** (1997) 33, [quant-ph/9610042].
- [24] N. Gisin and H. Bechmann-Pasquinucci, *Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for n qubits*, *Phys. Lett. A* **246** (1998) 1–6, [quant-ph/9804045].
- [25] R. Laflamme, C. Miquel, J. P. Paz, and W. H. Zurek, *Perfect Quantum Error Correcting Code*, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), no. 1 198, [quant-ph/9602019].
- [26] S. Bravyi, D. Lee, Z. Li, and B. Yoshida, *How much entanglement is needed for quantum error correction?*, [arXiv:2405.01332](https://arxiv.org/abs/2405.01332).
- [27] M. Grassl, T. Beth, and M. Roetteler, *On optimal quantum codes*, *Int. J. Quant. Inf.* **2** (2004) 55–64, [quant-ph/0312164].
- [28] F. Huber and M. Grassl, *Quantum Codes of Maximal Distance and Highly Entangled Subspaces*, *Quantum* **4** (June, 2020) 284, [arXiv:1907.07733].
- [29] J. Harper, *Hyperthreads in holographic spacetimes*, *JHEP* **09** (2021) 118, [arXiv:2107.10276].
- [30] J. Harper, *Perfect tensor hyperthreads*, *JHEP* **09** (2022) 239, [arXiv:2205.01140].
- [31] J. Harper, T. Takayanagi, and T. Tsuda, *Multi-entropy at low Renyi index in 2d CFTs*, *SciPost Phys.* **16** (2024), no. 5 125, [arXiv:2401.04236].

- [32] C. Akers, T. Faulkner, S. Lin, and P. Rath, *Reflected entropy in random tensor networks III: triway cuts*, [arXiv:2409.17218](#).
- [33] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow, and J. Preskill, *Holographic quantum error-correcting codes: Toy models for the bulk/boundary correspondence*, *JHEP* **06** (2015) 149, [[arXiv:1503.06237](#)].
- [34] L. Susskind and E. Witten, *The Holographic bound in anti-de Sitter space*, [hep-th/9805114](#).
- [35] J. de Boer, *The Holographic renormalization group*, *Fortsch. Phys.* **49** (2001) 339–358, [[hep-th/0101026](#)].
- [36] I. Heemskerk and J. Polchinski, *Holographic and Wilsonian Renormalization Groups*, *JHEP* **06** (2011) 031, [[arXiv:1010.1264](#)].