

热电交流约瑟夫森效应

Olli Mansikkamäki,¹ Francesco Giazotto,² and Alexander Balatsky^{1,3}

¹*Nordita, Stockholm University and KTH Royal Institute of Technology,
Hannes Alfvéns väg 12, SE-106 91 Stockholm, Sweden*

²*NEST, Istituto Nanoscienze-CNR & Scuola Normale Superiore, Piazza San Silvestro 12, I-56127 Pisa, Italy*

³*Department of Physics, University of Connecticut, Storrs, Connecticut 06269, USA*

温度梯度 ΔT 在约瑟夫森结中诱导出热电电流。我们预测，当该电流超过结的临界电流时，交流约瑟夫森效应会被激活。我们对这一现象的研究采用了靠近临界温度的时间依赖的金兹堡-朗道理论框架。我们的结果显示，交流电流的频率大约由 $\pi S \Delta T / (2\Phi_0)$ 给出，其中 S 代表塞贝克系数， Φ_0 代表磁通量子，并且我们估计该频率对于锡材料在 GHz 范围内，而对于更大的 S 和 T_c 材料则可达太赫兹范围。此外，我们提出了两种不同的实验配置来观察这一效应。

在超导系统中，电荷由库珀对和类准粒子组成的超流体传递，这些准粒子是类似于电子 [1] 的激发。这些准粒子复制了空穴或电子的行为，类似于在常规金属中观察到的情况。特别是，在我们研究的范围内，这涉及塞贝克效应 [2–8]。超导线中的温度梯度 $\Delta T = (T_2 - T_1)$ 诱导准粒子热电电流 $j_q \sim \sigma S \nabla T$ ，其中 σ 表示正常态电导率， S 表示塞贝克系数。由温度梯度引起的电流表现出与电压偏置引起电流的正式相似性。因此，我们预测热电交流约瑟夫森效应，在这种效应中，暴露于温度梯度的约瑟夫森结会展示出类似于暴露于电压偏置的约瑟夫森结的行为。只有在达到一个临界温差值之后才会发生感应电流振荡，这使其成为一个阈值现象。我们称预测的效果为热电交流约瑟夫森效应 (TEACJ)。应观察交流电 (AC)，并注意热电交流频率

$$\Omega_{TE} = \frac{\pi S \Delta T}{2\Phi_0}. \quad (1)$$

为了说明效果，我们研究了一个包含两个戴耶姆桥的热偏置超导环的动力学 (参见图 1)，利用了时依赖金兹堡-朗道理论 [1]。对于给定的 ΔT ，总振荡交流电流如图 2 所示。方程 1 以及图 2 和 3 中的电流振荡频谱分析是本文的主要结果。

在进行详细计算之前，我们强调几个重要点：我) 我们预测的效果与传统的交流约瑟夫森效应在本质上是不同的。在常规情况下，在两个电压偏置为 V 的凝聚态之间发生相干振荡，有一个凝聚物促进它们之间的类似拉比的相干振荡。在这种情况下，我们观察到了 $eV \rightarrow \hbar\omega_J$ 转换 (即 $\hbar\omega_J = 2eV$) 的现象，在这种转换中施加了相干电压偏移，从而产生了相干振荡。在前者热偏置的情景下，当上臂和下臂保持不同的温度时发生了相干电流振荡。因此，在 TEACJ 的背景下，唯一的非平衡驱动包括两个不同温度 T_1 和 T_2 的热分布。这些分布被表征为具有固有热

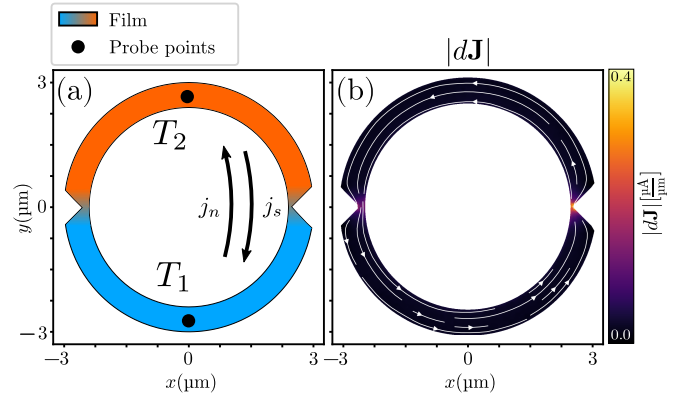


Figure 1. 一个包含两种不同 Dayem 桥的超导环示意图，构成一个热偏置直流 SQUID。颜色描绘了环内的温度分布，其中 $T_1 < T_2 < T_c$ 被指示出来，蓝色代表 T_1 ，橙色代表 T_2 。箭头表示热电准粒子电流 j_q 和补偿无耗散超电流 j_s 的方向。在随后的图中，在由黑点标记的探针位置计算相位和电压差。总薄层电流密度 $d\mathbf{J}$ 如 (b) 面板所示，箭头指示了电流方向。

波动的纯粹热稳态分布。然而，超导态设法在一个单频率 Ω_{TE} 产生相干响应。这种方式下，非相干的热分布导致了 $(T_1, T_2) \rightarrow \hbar\Omega_{TE}$ 沿着谐波的相干振荡。因此，约瑟夫森结将输入熵减少，从而产生了定义清晰的低熵输出。我们认定这一结果是约瑟夫森结的一个重要特性。二) 预期的 TEACJ 结果预计也适用于隧道结。由于时间依赖的金兹堡-朗道模型及其计算实现固有限制，我们使用 Dayem 桥。iii) 时间依赖的金兹堡-朗道理论仅在临界温度 T_c 附近根本适用。尽管它可以仅从微观理论在极限 $T \approx T_c$ 下推导出来，经验证据表明它产生的结果与广泛温度范围内的实验观测一致 [9–12]。我们期望这种效应是普遍的，并在整个温度范围内持续存在。远离临界温度的计算将不得不使用微观计算来进行，并将在其他地方呈现。

我们使用广义时间依赖的 Ginzburg-Landau 理论 [13,

[14], 该理论在开源软件包 py-TDGL 中实现 [15], 我们对其进行了轻微修改以包含热电流。复序参数 $\psi(\mathbf{r}, t) = |\psi|e^{i\theta}$ 的时域演化由以下方程控制

$$\frac{u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mu + \frac{\gamma^2}{2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi = (\epsilon - |\psi|^2) \psi + (\nabla - i\mathbf{A})^2 \psi. \quad (2)$$

这里, $u = \pi^4/[14\zeta(3)]$, 其中 ζ 是 Riemann zeta 函数, 是脏超导体中序参数 ψ 振幅和相位的弛豫时间之比。非弹性电子-声子散射的影响通过参数 $\gamma = 2\tau_E \Delta_0$ 包含在内, 其中 τ_E 是非弹性散射时间, Δ_0 是零场超导间隙。电磁场的影响由电化学标量势 μ 和磁矢量势 $\mathbf{A}$ 给出。温度的局部变化通过参数 $\epsilon(\mathbf{r}) = T_c/T(\mathbf{r}) - 1$ 设置。

超电流密度由

$$\mathbf{J}_s = \text{Im}[\psi^*(\nabla - i\mathbf{A})\psi], \quad (3)$$

给出, 准粒子电流密度由

$$\mathbf{J}_q = -\nabla\mu - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \eta \nabla \left(\frac{T}{T_c} \right), \quad (4)$$

给出, 其中 η 是一个无量纲参数, 由

$$\eta = \frac{\pi\mu_0\lambda^2\sigma S T_c}{2\Phi_0}, \quad (5)$$

给出, 其中 λ 是磁通穿透深度, σ 是正常态电导率, S 是塞贝克系数, T_c 是超导临界温度, μ_0 是真空磁导率, Φ_0 是磁通量子。等式 (4) 的最后一项包含电流密度的热电贡献 $\eta \nabla \left(\frac{T}{T_c} \right)$, 这是对参考文献 [15] 实现的一种偏离。我们假设没有外部电场并且电荷密度近似局部守恒 [14], 也就是说连续性方程 $\nabla \cdot (\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_q) = 0$ 成立。从这一假设和上述电流密度的表达式出发, 我们可以导出一个泊松方程

$$\nabla^2 \mu = \nabla \cdot \mathbf{J}_s - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \eta \nabla^2 \left(\frac{T}{T_c} \right), \quad (6)$$

, 从中计算出电势。

在以下内容中, 我们假设向量势为 $\mathbf{A} = 0$, 除非另有说明。我们模拟了一个超导环, 如图 1 所示, 其内半径为 $2.4 \mu\text{m}$, 外半径为 $3 \mu\text{m}$ 。该环具有两个 Dayem 桥 [16], 最小宽度分别为 90 nm 和 30 nm 。注意, SQUID 需要设置为不对称以支持环中非零的总电流循环。我们将上半部分设定为温度 $T_2/T_c = 0.98$, 并改变下半部分的温度 T_1 。在实验配置中, 建议用 SIS 隧道结替换电流结以减少 SQUID 两段之间的热传导。

虽然方程 (2) 以无量纲形式呈现, 但动力学的时间和长度尺度由所建模设备材料的特性给出。在我们的模拟

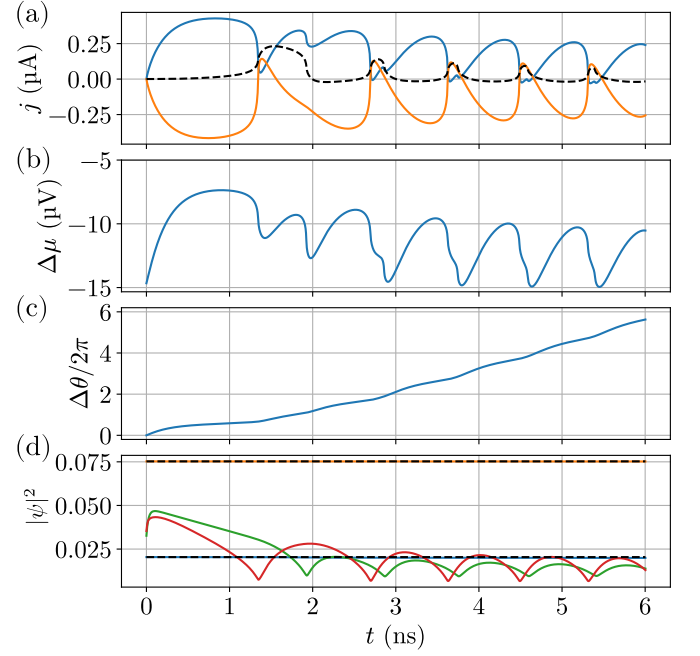


Figure 2. (a) 图表展示了准粒子电流 j_q (用实线蓝色表示)、超电流 j_s (用实线黄色表示) 和总电流 $j = j_q + j_s$ (用虚线黑色表示) 穿过环形结构的情况。(b) 如图 1(a) 所示, 在探针点之间展示了热化学势差 $\Delta\mu$ 。(c) 绘制了上述探针点之间的相位差 $\Delta\theta$ 。相应的温度是 $T_1 = 0.93T_c$ 和 $T_2 = 0.98T_c$ 。(d) 超流密度 $|\psi|^2$ 在探针点上有所描绘, 黄色代表底部, 蓝色代表顶部, 并且右侧的 Dayem 桥用红色表示, 左侧的则用绿色。黑色虚线表示 $\epsilon_1 = T_c/T_1 - 1$ 和 $\epsilon_2 = T_c/T_2 - 1$ 。

中, 我们使用与锡 (Sn) 薄膜中测量到的参数相似的值, 因为据估计它具有相对较高的 $\sigma S = 54 \text{ V}/(\text{K} \cdot \Omega \cdot \text{cm})$ [17]。原则上, 所有参数都依赖于温度。然而, 为了简化以及由于数值实现的限制, 我们将参数在整个环中视为均匀的。我们取薄膜厚度为 $d = 40 \text{ nm}$ 。对于这样的薄膜, 我们得到有效穿透深度 $\lambda(T_2, d) \approx 465 \text{ nm}$ [18] 和相干长度 $\xi(T_2) \approx 365 \text{ nm}$ [18]。使用 $T_c = 3.88 \text{ K}$ 作为锡 [19] 的临界温度值, 我们得到 $\eta \approx 4.33$, 其中 $\rho = 1/\sigma = 1.4 \text{ t}\Omega \cdot \text{cm}$ [18]。假设间隙的尺度为 $\frac{\Delta_0(T)}{\Delta_0(0)} \approx 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}}$ [1], 我们设定 $\gamma = 97$, 并将非弹性散射率设为 $\tau_E = 0.2 \text{ ns}$ [20], 以及间隙 $\Delta_0 \approx 1 \text{ meV}$ [21]。

我们使用初始状态 $\psi = \sqrt{\epsilon}$ 并在模拟中保持温度恒定。温度实际上是瞬间“开启”的, 导致模拟开始时电流急剧跳变。电流、电压、相位差和超流密度 $|\psi|^2$ 的初始行为如图 2 所示。为了理解动力学特性, 我们首先检查温度差异如何影响电流。最明显的是, 在方程 (4) 中, 由于温

度梯度（也称为塞贝克效应）直接对准粒子电流密度

$$\mathbf{J}_{q,T} = \eta \nabla \left(\frac{T}{T_c} \right), \quad (7)$$

有热电贡献。

温度梯度还通过方程 (2) 的 $(\epsilon - |\psi|^2)\psi$ 项影响超流体 $|\psi|^2$ 的密度。这意味着超流体的密度倾向于放松到分布 $|\psi|^2 \rightarrow \epsilon = \frac{T_c}{T} - 1$ 。非均匀的温度分布会导致超流体密度的不均匀，这直接会影响超电流密度，在没有外部磁场的情况下，该密度由

$$\mathbf{J}_s = |\psi|^2 \nabla \theta. \quad (8)$$

给出。温度越高，能够贡献给超电流的超流体就越少。热化学势 μ 的泊松方程 (6) 也包含一个描述温度分布的项。由于序参数的相 θ 的时间演化由方程 (2) 决定，并依赖于热化学势，因此戴耶姆桥上的温度差异意味着也必须存在相位差异。

当讨论交流约瑟夫森效应时，通常会将电流-相位关系简化为

$$j(\Delta\theta) = j_c \sin(\Delta\theta). \quad (9)$$

一般来说，振荡不是正弦波，而是包含更高次谐波 $\sin(2\Delta\theta), \sin(3\Delta\theta)$ 等等 [22–27]。这些更高次的谐波在我们的系统中也很明显，如图 3(a) 所示。然而，为了简化起见，我们假设方程 (9) 描述了对应最高峰值的振荡。

让我们通过大大简化模型来观察交流电的振荡频率。为此，我们仅在图 1 所示的探针点处考虑系统，远离结点。假设这些点周围的超流体均匀分布且为 $\nabla^2 |\psi_k| = 0$ 。初始瞬态行为之后，在探针点 k 处的序参数的大小是恒定的 $\frac{\partial |\psi_k|}{\partial t} = 0$ 。然后，方程 (2) 的实部只是

$$(\epsilon - |\psi|^2)|\psi| = 0, \quad (10)$$

我们得到了超流密度 $|\psi_k|^2 = \epsilon_k$ 。我们可以看到在图 2(d) 中这是大致正确的。从方程 (2) 的虚部我们得到两点之间的相位差的时间演化

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} = -\Delta\mu. \quad (11)$$

为了估计热化学势差 $\Delta\mu$ ，我们使用与参考文献 [15] 中数值实现类似的离散化方案，在该方案中

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \eta \frac{\Delta T}{T_c} + \text{Im}[\psi_1 e^{-i\theta_1} (|\psi_2| e^{i\theta_2} - |\psi_1| e^{i\theta_1})] \\ &= \eta \frac{\Delta T}{T_c} + |\psi_1| |\psi_2| \sin(\Delta\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

结合方程 (11) 和 (12)，我们得到相位差的一个较为复杂的表达式，

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\alpha \tan \left(\frac{t}{2} \alpha + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right) - \beta}{\eta \frac{\Delta T}{T_c}} \right], \quad (13)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\eta^2 (\frac{\Delta T}{T_c})^2 - \epsilon_1 \epsilon_2}$ ，和 $\beta = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ 。如果我们忽略不随时间变化的项，我们可以估计交流电流的振荡频率为

$$\Omega = \frac{\eta^2 (\frac{\Delta T}{T_c})^2 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\eta \frac{\Delta T}{T_c}}. \quad (14)$$

进一步，在极限条件下 $\eta^2 (\frac{\Delta T}{T_c})^2 \gg \epsilon_1 \epsilon_2$ ，当高温接近临界温度时，我们可以忽略 $\epsilon_1 \epsilon_2$ 项，并将热电交流频率简单地估计为（以物理单位表示）

$$\Omega_{TE} \approx \frac{\eta \frac{\Delta T}{T_c}}{\tau_0} = \frac{\pi S \Delta T}{2 \Phi_0}, \quad (15)$$

其中 $\Omega_{TE} = \Omega / \tau_0$ ，而 $\tau_0 = \mu_0 \sigma \lambda^2$ 是时间依赖的金兹堡-朗道模型的时间特征尺度。近似频率 Ω 与图 3(a) 中的数值解进行了比较。

我们估计 TEACJ 频率在 Sn 薄膜的塞贝克系数为 $S \sim 75 \mu V K^{-1}$ 的特征参数范围内为 $\Omega_{TE} \sim 1 - 10 GHz$ 。振荡频率和发射的辐射与下面提到的实验装置很好地吻合。我们也估计了 FeSe 的频率。FeSe 超导膜表现出显著更高的临界温度 $T_c = 65 K$ [30, 31]，甚至可能在 100 K [32] 范围内。此外，这些薄膜的塞贝克系数已被记录达到高于 50 K 时高达 $S = 454 \mu V K^{-1}$ [33] 的值。然后估计的频率在 $\Omega_{TE} \sim 1 THz$ 的范围内，从而使 FeSe 成为超导体中热电应用的一个有前途的候选者。

请注意，(13) 所示的解仅在 α 具有实数值时才作为相位差有效。也就是说，我们不期望在公式 (14) 的分子为负数时看到交流电流。为了将此预测与数值结果进行比较，我们绘制了

$$A = \frac{1}{2} (j_{\max} - j_{\min}), \quad (16)$$

其中 $j_{\max}$ 和 $j_{\min}$ 分别是总电流的最大值和最小值，作为较高温度 T_2 和温差 ΔT 的函数，如图 3(b) 所示。对于振荡解， A 是总电流的振幅，而对于稳态， $A = 0$ 。

尽管简单的近似与数值结果非常吻合，应该注意到我们假设了环中材料参数是恒定的。实际上，它们会相当强烈地依赖于温度；因此，交流电频率 Ω 很不可能在量上精确，除非接近临界温度。

现在让我们放弃假设 $\mathbf{A} = 0$ ，看看一个应用的磁场如何影响电流。我们假设磁场是恒定的， $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ 。由于

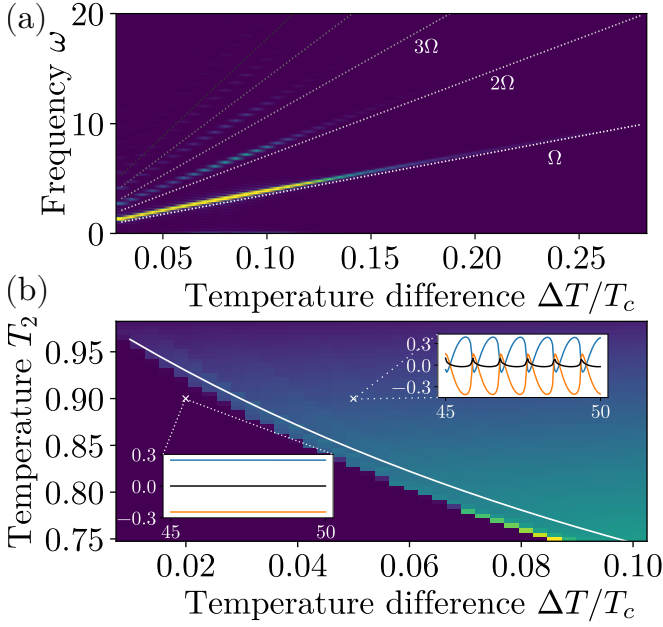


Figure 3. (a) 温度差 $\Delta T/T_c$ 范围内近似标准化功率谱密度的 Lomb–Scargle 周期图形式 [28]。虚线描绘了来自方程 (14) 的频率 Ω 的整数倍。前三条线标有标签。较高的温度是 $T_2 = 0.98T_c$ 。(b) 总电流的振幅 A 作为较高温度 T_2 和温差 ΔT 的函数被呈现出来。白色线条表示方程 (14) 的分子等于零时的温度。电流振荡仅在临界温差之上发生。插图显示了在温度 $T_2 = 0.9T_c$ 下 45 ns 和 50 ns 之间的电流以及差异 $\Delta T = 0.02T_c$ 和 $\Delta T = 0.05T_c$ ，用白色十字标记。展示电流直到 50 ns 的时间演变的视频可在补充材料 [29] 中获得。(临时链接: [link](#))

一个恒定的场不会通过方程 (6) 对势 μ 作出贡献，因此它不影响交流电的频率。然而，如图 4 所示，它会影响振荡电流的幅度。通过半径为 $r = 2.7 \mu\text{m}$ 的环的总磁通量是 Φ_0 ，当磁场强度是 $\mu_0 H = \frac{\Phi_0}{\pi r^2} = 90.25 \text{ tT}$ 。我们在 z 轴上设置一个均匀磁场 $\mu_0 H$ 并将其强度从 -180.5 tT 变化到 180.5 tT 。我们观察到总电流的振幅发生了显著变化，在总磁通量为 $\Phi_0/2$ 时，接近 $\mu_0 H = 45.14 \text{ tT}$ 处达到最大值。

与这里展示的模拟实验相比，实际的实验装置将受到热电流噪声的影响，可能会使得振荡无法被检测到。假设热噪声近似为 $\tilde{j} = \frac{2ek_B T}{h}$ 的量级，我们模拟的锡环上半部分的温度是 $T_2 = 0.98T_c = 3.802 \text{ K}$ ，这导致了热噪声的强度为 $\tilde{j} \approx 0.025 \text{ tA}$ 。如图 4 所示，在没有外部磁场且下半部最低温度为 $T_1 = 0.88T_c$ 的情况下，噪声与总电流振幅相当，从而阻碍了检测。然而，如所示，通过降低温度 T_1 [参见图 3(b)] 或施加外部磁场 [参见图 4] 可以显著增强振幅，而这两种方法都不预期会增加热噪声。因此，我们认为热噪声不应妨碍交流电流的实验检测。

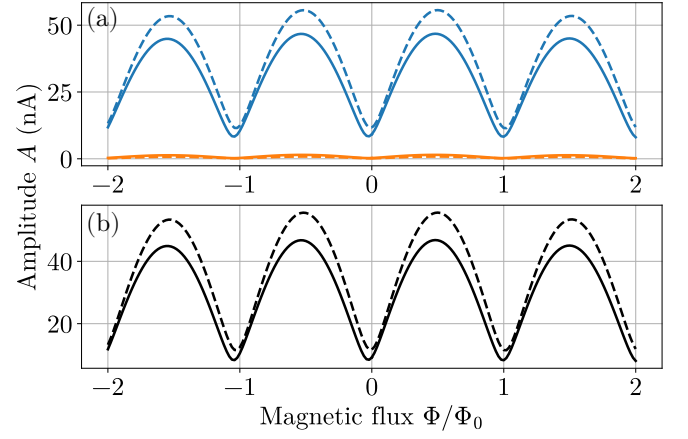


Figure 4. 交流电 (AC) 通过环的振幅被分析为穿过环的磁通量 Φ/Φ_0 的函数。根据方程 (16) 中提供的定义，在交流电稳定后的 1 ns，评估了振幅 A 。面板 (a) 展示了用黄色描绘的超电流 j_s 和用蓝色显示的准粒子电流 j_q 。面板 (b) 表示总电流 $j = j_s + j_q$ 。较高温度设置为 $T_2 = 0.98T_c$ 。在两个面板中， $\Delta T = 0.1$ 的情况以实线显示，而 $\Delta T = 0.2$ 则以虚线显示。水平轴上向左的轻微偏移是由于热电电流导致的非零通量引起的。翻转温度 T_1 和 T_2 会导致向右偏移。

图 5 展示了两种用于评估 TEACJ 的可能实验配置。这些配置可以使用常规光刻方法构建。图 (a) 说明了一种直流测量方法，其中热偏置 SQUID 通过电容耦合到超导体-绝缘体-超导体 (SIS) 直流 SQUID 上，作为芯片上的辐射发射频率 ω 的探测器。一个环通过氧化物势垒连接到四个额外的超导电极。这些电极加热超导体中的准粒子，并作为敏感温度计来准确测量施加在结构 [34–37] 上的热梯度。可以通过应用外部磁通 (Φ_{det}) 减少 SIS 探测器内的整体约瑟夫森耦合，从而允许探索光子辅助准粒子隧道电流对直流 SQUID 电流-电压特性 [38–40] 的贡献。

图 5(b) 所示的方案代表了一种基于微波 (MW) 检测架构的潜在替代设置，在该设置中，热偏置的 SQUID 通过电容与由 SQUID 阵列 [41] 组成的频率可调超导谐振器相连。可以通过在芯片上的磁通线上施加一个小磁场来调整共振频率。这种 MW 设置使人们能够使用标准电路量子电动力学检测方法，通过反射测量对发出的辐射进行表征。

综上所述，在时间依赖的 Ginzburg-Landau 理论框架内，我们证明了 SQUID 两半部分之间的热梯度可以在结点处诱导出交流电流，这种效应被称为热电 AC 约瑟夫森 (TEACJ) 效应。从这一论断中得出最值得注意的观察结果是，当无序的热分布应用于干涉仪的臂时，SQUID 产生的相干尖锐线 (低熵) 输出。这个发出的尖锐线实际上代表

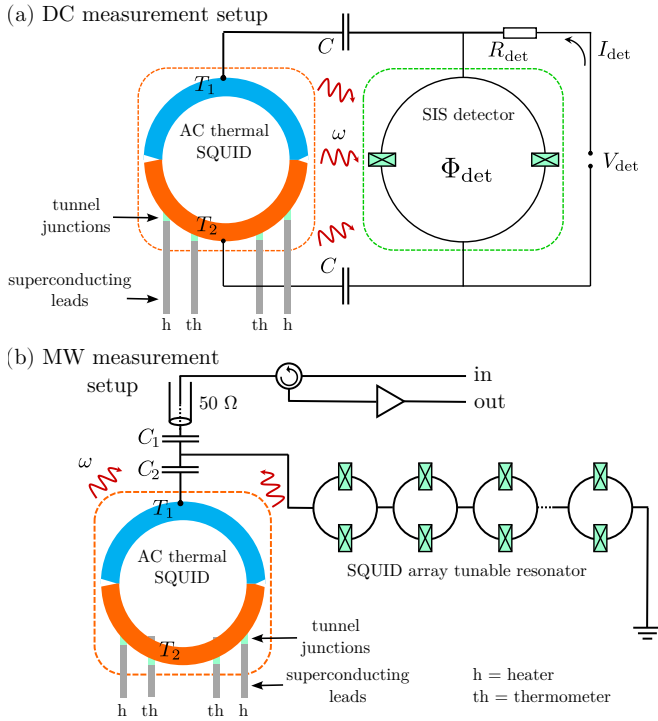


Figure 5. TEACJ 效应的可能测量方案。(a) 直流测量方案包括一个热偏置超导量子干涉装置 (SQUID) (橙色方框)。额外的超导线, 与干涉仪下部通过隧道耦合连接, 使得能够在超导回路上施加和测量温度梯度。这些结点作为加热器 (h) 和温度计 (th) 使用。由 TEACJ 效应产生的频率为 ω 的电磁辐射通过将左侧的 SQUID 电容耦合到右侧的超导体-绝缘体-超导体 (SIS) 直流 SQUID (绿色方框), 作为片上辐射探测器进行检测。可以通过外部磁通量 Φ_{det} 最小化 SIS SQUID 中的总约瑟夫森耦合, 以研究光子辅助准粒子隧穿电流对 SQUID 直流特性贡献的影响。 V_{det} 是施加的直流偏置电压, 其有效电阻为 R_{det} , 导致电流为 I_{det} 。 C 表示耦合电容。(b) 微波 (MW) 测量方案包括一个热偏置 SQUID 与频率可调超导谐振器耦合, 该谐振器由一组 SIS SQUIDs 实现。 C_1 和 C_2 分别表示耦合到微波检测链路和谐振器的电容。微波检测链路包括环形器和预放大器等关键组件, 通过传统的电路量子电动力学异频检测技术进行反射测量。

了 SQUID 对热梯度的滤波作用。在方程 (14) 中为 Ω_{TE} 导出的解析表达式不仅提供了振荡频率的近似值, 还作为选择给定热电系数 η 时 SQUID 两半部分适当温度的指南。尽管基于简化的两点模型, 这一表达式与广温范围内的数值模拟相吻合。考虑到振动源自耗散状态, 该现象预计可以通过发射辐射来检测。此外, 我们提出了两种实验配置以实证验证我们的预测。

作者感谢 A. Crippa 进行的有价值讨论。A.B. 和 O.M. 的工作得到了欧洲研究委员会的支持, 该项目由欧盟第七框架 ERS-2018-SYG 810451 HERO 资助, 并且还获得

了 Knut and Alice Wallenberg 基金会 Grant No. KAW 2019.0068 的资助。F.G. 感谢欧盟的 Horizon 2020 研究和创新框架计划的支持, 该计划由 Grants No. 964398 (SUPERGATE), No. 101057977 (SPECTRUM) 资助, 并且还得到了 PNRR MUR 项目 PE0000023-NQSTI 的部分资金支持。

- [1] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity: Second Edition* (Courier Corporation, 2004).
- [2] N. W. Ashcroft and N. Mermin, *Solid state, Physics* (New York: Holt, Rinehart and Winston) Appendix C 1 (1976).
- [3] A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals* (Courier Dover Publications, 2017).
- [4] H. J. Mamin, J. Clarke, and D. J. Van Harlingen, Charge imbalance induced by a temperature gradient in superconducting aluminum, *Physical Review B* **29**, 3881 (1984).
- [5] Y. Galperin, V. Gurevich, V. Kozub, and A. Shelankov, Theory of thermoelectric phenomena in superconductors, *Physical Review B* **65**, 064531 (2002).
- [6] V. L. Ginzburg and G. F. Zharkov, Thermoelectric effects in superconductors, *Soviet Physics Uspekhi* **21**, 381 (1978).
- [7] C. D. Shelly, E. A. Matrozoza, and V. T. Petrashov, Resolving thermoelectric “paradox” in superconductors, *Science advances* **2**, e1501250 (2016).
- [8] G. Marchegiani, A. Braggio, and F. Giazotto, Nonlinear thermoelectricity with electron-hole symmetric systems, *Physical Review Letters* **124**, 106801 (2020).
- [9] F. Liu, M. Mondello, and N. Goldenfeld, Kinetics of the superconducting transition, *Physical Review Letters* **66**, 3071 (1991).
- [10] R. Kato, Y. Enomoto, and S. Maekawa, Computer simulations of dynamics of flux lines in type-II superconductors, *Physical Review B* **44**, 6916 (1991).
- [11] H. Frahm, S. Ullah, and A. T. Dorsey, Flux dynamics and the growth of the superconducting phase, *Physical Review Letters* **66**, 3067 (1991).
- [12] M. Machida and H. Kaburaki, Direct simulation of the time-dependent Ginzburg-Landau equation for type-II superconducting thin film: Vortex dynamics and V-I characteristics, *Physical Review Letters* **71**, 3206 (1993).
- [13] L. Kramer and R. J. Watts-Tobin, Theory of Dissipative Current-Carrying States in Superconducting Filaments, *Physical Review Letters* **40**, 1041 (1978).
- [14] R. J. Watts-Tobin, Y. Krähenbühl, and L. Kramer, Nonequilibrium theory of dirty, current-carrying super-

- conductors: phase-slip oscillators in narrow filaments near T_c, *Journal of Low Temperature Physics* **42**, 459 (1981).
- [15] L. B.-V. Horn, pyTDGL: Time-dependent Ginzburg-Landau in Python, *Computer Physics Communications* **291**, 108799 (2023).
- [16] A. H. Dayem and J. J. Wiegand, Behavior of Thin-Film Superconducting Bridges in a Microwave Field, *Physical Review* **155**, 419 (1967).
- [17] N. V. Zavaritskii, observation of superconducting current excited in a superconductor by heat flow, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **19**, 126 (1974).
- [18] D. H. Douglass and R. H. Blumberg, Precise Critical-Field Measurements of Superconducting Sn Films in the London Limit, *Physical Review* **127**, 2038 (1962).
- [19] G. J. Dolan, Critical thicknesses for the transition from intermediate- to mixed-state behavior in superconducting thin films of Pb, Sn, and In, *Journal of Low Temperature Physics* **15**, 133 (1974).
- [20] T. Y. Hsiang and J. Clarke, Boundary resistance of the superconducting-normal interface, *Physical Review B* **21**, 945 (1980).
- [21] P. Townsend and J. Sutton, Investigation by Electron Tunneling of the Superconducting Energy Gaps in Nb, Ta, Sn, and Pb, *Physical Review* **128**, 591 (1962).
- [22] A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, and E. Il'ichev, The current-phase relation in Josephson junctions, *Reviews of Modern Physics* **76**, 411 (2004).
- [23] E. Goldobin, D. Koelle, R. Kleiner, and A. Buzdin, Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of junctions, *Physical Review B* **76**, 224523 (2007).
- [24] G. de Lange, B. van Heck, A. Bruno, D. van Woerkom, A. Geresdi, S. Plissard, E. Bakkers, A. Akhmerov, and L. DiCarlo, Realization of Microwave Quantum Circuits Using Hybrid Superconducting-Semiconducting Nanowire Josephson Elements, *Physical Review Letters* **115**, 127002 (2015).
- [25] M. Stoughton, A. Rossolenko, V. Bolginov, V. Oboznov, A. Rusanov, D. Baranov, N. Pugach, S. Frolov, V. Ryazanov, and D. Van Harlingen, Second-Harmonic Current-Phase Relation in Josephson Junctions with Ferromagnetic Barriers, *Physical Review Letters* **121**, 177702 (2018).
- [26] A. Kringhøj, L. Casparis, M. Hell, T. W. Larsen, F. Kuemmeth, M. Leijnse, K. Flensberg, P. Krogstrup, J. Nygård, K. D. Petersson, and C. M. Marcus, Anharmonicity of a superconducting qubit with a few-mode Josephson junction, *Physical Review B* **97**, 060508 (2018).
- [27] D. Willsch, D. Rieger, P. Winkel, M. Willsch, C. Dickel, J. Krause, Y. Ando, R. Lescanne, Z. Leghtas, N. T. Bronn, P. Deb, O. Lanes, Z. K. Mineev, B. Dennig, S. Geisert, S. Günzler, S. Ihssen, P. Paluch, T. Reisinger, R. Hanna, J. H. Bae, P. Schüffegen, D. Grützmacher, L. Buimaga-Iarinca, C. Morari, W. Wernsdorfer, D. P. DiVincenzo, K. Michielsen, G. Catelani, and I. M. Pop, Observation of Josephson harmonics in tunnel junctions, *Nature Physics* **20**, 815 (2024).
- [28] J. T. VanderPlas, Understanding the Lomb – Scargle Periodogram, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **236**, 16 (2018).
- [29] See Supplemental Material at URL-will-be-inserted-by-publisher for the video.
- [30] Q.-Y. Wang, Z. Li, W.-H. Zhang, Z.-C. Zhang, J.-S. Zhang, W. Li, H. Ding, Y.-B. Ou, P. Deng, K. Chang, J. Wien, C.-L. Song, K. He, J.-F. Jia, S.-H. Ji, Y.-Y. Wang, L.-L. Wang, X. Chen, X.-C. Ma, and Q.-K. Xue, Interface-induced high-temperature superconductivity in single unit-cell fese films on strtio3, *Chinese Physics Letters* **29**, 037402 (2012).
- [31] D. Liu, W. Zhang, D. Mou, J. He, Y.-B. Ou, Q.-Y. Wang, Z. Li, L. Wang, L. Zhao, S. He, Y. Peng, X. Liu, C. Chen, L. Yu, G. Liu, X. Dong, J. Zhang, C. Chen, Z. Xu, J. Hu, X. Chen, X. Ma, Q. Xue, and X. J. Zhou, Electronic origin of high-temperature superconductivity in single-layer FeSe superconductor, *Nature Communications* **3**, 931 (2012).
- [32] J.-F. Ge, Z.-L. Liu, C. Liu, C.-L. Gao, D. Qian, Q.-K. Xue, Y. Liu, and J.-F. Jia, Superconductivity above 100 K in single-layer FeSe films on doped SrTiO₃, *Nature Materials* **14**, 285 (2015).
- [33] S. Shimizu, J. Shiogai, N. Takemori, S. Sakai, H. Ikeda, R. Arita, T. Nojima, A. Tsukazaki, and Y. Iwasa, Giant thermoelectric power factor in ultrathin FeSe superconductor, *Nature Communications* **10**, 825 (2019).
- [34] F. Giazotto, T. T. Heikkilä, A. Luukanen, A. M. Savin, and J. P. Pekola, Opportunities for mesoscopes in thermometry and refrigeration: Physics and applications, *Reviews of Modern Physics* **78**, 217 (2006).
- [35] G. Germanese, F. Paolucci, G. Marchegiani, A. Braggio, and F. Giazotto, Bipolar thermoelectric josephson engine, *Nature Nanotechnology* **17**, 1084 (2022).
- [36] F. Giazotto and M. J. Martínez-Pérez, The josephson heat interferometer, *Nature* **492**, 401 (2012).
- [37] A. Fornieri and F. Giazotto, Towards phase-coherent caloritronics in superconducting circuits, *Nature nanotechnology* **12**, 944 (2017).
- [38] R. Deblock, E. Onac, L. Gurevich, and L. P. Kouwenhoven,

Detection of Quantum Noise from an Electrically Driven Two-Level System, *Science* **301**, 203 (2003).

- [39] D. J. van Woerkom, A. Proutski, R. J. J. van Gulik, T. Kriváchy, D. Car, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, and A. Geresdi, Josephson radiation and shot noise of a semiconductor nanowire junction, *Physical Review B* **96**, 094508 (2017).
- [40] D. Laroche, D. Bouman, D. J. van Woerkom, A. Proutski, C. Murthy, D. I. Pikulin, C. Nayak, R. J. J. van Gulik, J. Nygård, P. Krogstrup, L. P. Kouwenhoven, and A. Geresdi, Observation of the 4-periodic Josephson effect in indium arsenide nanowires, *Nature Communications* **10**, 245 (2019).
- [41] A. Stockklauser, P. Scarlino, J. Koski, S. Gasparinetti, C. Andersen, C. Reichl, W. Wegscheider, T. Ihn, K. Ensslin, and A. Wallraff, Strong Coupling Cavity QED with Gate-Defined Double Quantum Dots Enabled by a High Impedance Resonator, *Physical Review X* **7**, 011030 (2017).

Appendix A: 近似的功率谱密度

在图 3(a) 中, 使用了 Lomb-Scargle 周期图 [28] 来展示谱密度与温度差的关系。周期图用相对较少的不均匀

分布的数据点给出了谱密度的良好估计, 使我们能够通过自适应时间步长来加快模拟速度。如图 2(a) 所示, 在初始行为之后, 交流频率迅速稳定下来, 但幅度由于 γ 的较大值而没有稳定。因为我们主要关心的是谱密度最高峰值的频率, 所以这并不是一个问题。一个平滑的交流电及其对应的周期图示例如图 6 所示。

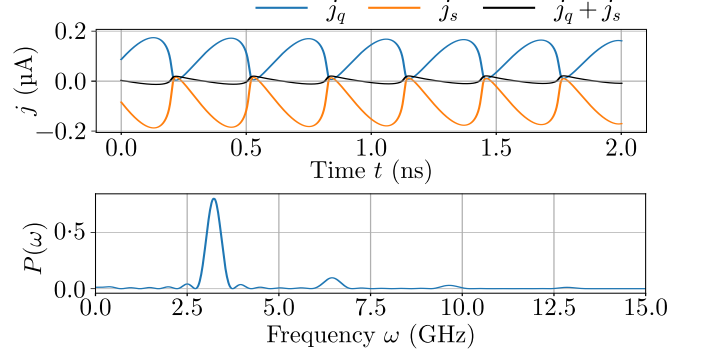


Figure 6. (a) 拟粒子电流 j_q (蓝色)、超电流 j_s (黄色) 和总电流 $j = j_q + j_s$ (黑色) 穿越环状结构。(b) Lomb-Scargle 周期图 $P(\omega)$ 对应于 (a) 中所示的总电流。温度差是 $\Delta T = 0.2T_c$, 前 10 ns 被省略。