从球面到欧几里得空间的扭曲

JAMES DIBBLE

摘要. 任意从半径为 r 的 n 维球体到 n 维欧几里得空间的函数都必须至少将度量加性扭曲了 $\frac{2\pi r}{2+\sqrt{3-2/n}}$。这是使用 Granas 的不动点定理证明的，该定理推广了 Borsuk–Ulam 的经典定理到集值函数。

1. 介绍

设 X 和 Y 是度量空间。非空关系 R 从 X 到 Y（即 $X \times Y$ 的子集）的**失真**是

$$\operatorname{dist}(R) = \sup \big\{ |d_Y(y_1, y_2) - d_X(x_1, x_2)| \,\big|\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \big\},$$

其取值于 $[0, \infty]$。特别是，如果 $f : X \to Y$ 是一个函数，则

$$\operatorname{dist}(f) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)|.$$

扭曲的概念在几何和分析的许多地方出现。例如，两个紧致度量空间之间的 Gromov–Hausdorff 距离被实现为它们之间对应关系扭曲的半下确界 [3]。

记 S^n_r 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 r 的 n 维球面。那就是，

$$S^n_r = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2\}.$$

经典的 Borsuk–Ulam 定理 [1] 表明，任何从 S^n_r 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续函数都将一对对径点映射到同一点，并且因此其失真至少为 πr。由于投影到任意超平面上的失真正好是那么多，这是所有连续函数集合中的最小失真。本文的主要结果是一个适用于所有函数集合的一般下界。

定理 1.1. 如果 $f : S^n_r \to \mathbb{R}^n$ 是任何函数，则 $\operatorname{dist} f \geq \dfrac{2\pi r}{2 + \sqrt{3 - 2/n}}$。

人们立即得到了将球面映射到更高维度的欧几里得空间的功能失真的一个通用下界。

推论 1.2. 如果 $f : S^n_r \to \mathbb{R}^m$ 是任何函数并且 $m \leq n$，那么 $\operatorname{dist}(f) > \dfrac{2\pi r}{2 + \sqrt{3}}$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 51F99 and 54H25.

一维情况的定理 1.1由作者和 Elizabeth Kupin 使用组合论证明。一般情况是 Granas 不动点定理的应用，该定理将 Borsuk–Ulam 定理推广到上半连续集值函数。

论文的组织结构。第二节包含主要定理一维情况的一个基本组合证明。第三节包含了关于集合值函数不动点理论的背景信息，包括 Granas 定理的基本证明，该定理将 Borsuk–Ulam 定理推广到集合值函数。第四节包含了一些关于欧几里得空间中单形几何学必要结果。第五节包含了主要定理的证明。

2. 一维情况

在证明定理 1.1的一般情况之前，给出一个关于函数 S^1_r 的初等组合证明可能会有所帮助。这与 Elizabeth Kupin 共同开发。商空间 $[0, 2\pi]/\sim$，其中 $\sim$ 识别端点，通过映射 $C(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 同胚于圆 S^1_r。在这种识别下，考虑 m 个等间距的点 $x_k = C(2\pi k/m)$ 在 S^1_r 上，它们的索引按 m 取模。为了简化说明，m 始终假设为奇数。

引理 2.1. *令 $f : S^1_r \to \mathbb{R}$ 为任意函数。假设，对于某个 k，以下之一成立：*

(1)$f(x_k) \le f(x_{k+\frac{m+1}{2}}) \le f(x_{k+1})$

(2)$f(x_{k+1}) \le f(x_{k+\frac{m+1}{2}}) \le f(x_k)$

那么，$\operatorname{dist}(f) \ge \frac{2\pi r(m-2)}{3m}$。

证明. 作为邻居，S^1_r,x_k 和 x_{k+1} 相互之间的距离为 $\frac{2\pi r}{m}$。同时，x_k 和 $x_{k+\frac{m+1}{2}}$ 几乎是对跖点；它们之间的距离是 $\frac{\pi r(m-1)}{m}$，这同样也是 x_{k+1} 和 $x_{k+\frac{m+1}{2}}$ 之间的距离。因此，

$$\begin{aligned}\frac{2\pi r}{m} + \operatorname{dist}(f) &\ge d\big(f(x_k), f(x_{k+1})\big)\\ &= d\big(f(x_k), f(x_{k+\frac{m+1}{2}})\big) + d\big(f(x_{k+\frac{m+1}{2}}), f(x_{k+1})\big)\\ &\ge 2\Big(\frac{\pi r(m-1)}{m} - \operatorname{dist}(f)\Big).\end{aligned}$$

结果立即得出。 □

定理 2.2. *如果 $f : S^1_r \to \mathbb{R}$ 是任何函数，则 $\operatorname{dist}(f) \ge 2\pi r/3$。*

证明. 设 $m \ge 3$ 为一个奇数，设 x_k 为上述描述的 m 点在 S^1_r 中。构造一个图 $\{x_k\}$，通过在 x_i 和 x_j 之间分配一条边，当且仅当 x_i 和 x_j 几乎是相对点时，即它们之间的距离为 $\frac{\pi r(m-1)}{m}$。由于 m 是奇数，因此该图是 2-正则的（即每个顶点恰好连接到其他两个顶点），并且它的边形成一个长度为 m 的环。如果对于某个 m，两个几乎对角点在 f 下映射到同一点，则 f 的失真至少为 $\frac{\pi r(m-1)}{m}$，结

果成立。如果这种情况从未发生，那么可以通过将每条边定向为从 x_i 指向 x_j 的方式，恰好在 $f(x_i) < f(x_j)$ 的情况下，将其变成一个有向图。由于 m 是奇数，边缘循环必须包含长度至少为二的有向路径，这会产生引理 2.1中假设的两种配置之一。因此，$\operatorname{dist}(f) \geq \frac{2\pi r(m-2)}{3m}$。结果通过令 $m \to \infty$ 而得出。 □

要证明在这种情况下失真界限是尖锐的并不难。

示例 2.3. 在将 S^1_r 识别为 $[0, 2\pi]/\sim$ 后，通过 $f(\theta) = r\theta/3$ 对所有 $\theta \in [0, 2\pi)$ 定义一个映射 $f : S^1_r \to [0, 2\pi r/3)$。然后，$\operatorname{dist}(f) = 2\pi r/3$。

3. 定点理论对于集值函数

令 X 是一个集合，并用 $\mathscr{P}(X)$ 表示 X 的幂集。如果 $F : X \to \mathscr{P}(X)$ 是一个集值函数，那么 $x \in X$ 是**不动点**的 F，当 $x \in F(x)$。如果 X 和 E 是拓扑空间，那么 $F : X \to \mathscr{P}(E)$ 是**上半连续**，如果每当 $x_k \to x$,$y_k \in F(x_k)$ 和 $y_k \to y$ 时，它就导致 $y \in F(x)$。当 E 是一个赋范向量空间，每个 $F(x)$ 都是闭合的，并且 $F(X) = \cup_{x\in X} F(x)$ 具有紧闭包时，这等价于集合 $\{x \in X \,\big|\, F(x) \subset W\}$ 在 $W \subseteq X$ 开的情况下也是开集 [6]。

该领域内的首个重要结果是 Kakatani 的著名不动点定理 [7]。如果 E 具有仿射结构，记 $CC(E)$ 为 E 的非空、闭合且凸的子集组成的集合。

定理 3.1 (角谷)**.** 令 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是紧凸的。如果 $F : X \to CC(X)$ 是上半连续的，则 F 有一个不动点。

定理 1.1的证明依赖于 Granas 的一个结果，该结果将 Borsuk–Ulam 定理 [1] 推广到集值函数，就像 Kakutani 定理推广 Brouwer 不动点定理 [2] 一样。这在 [5] 中被实质上证明了。

定理 3.2 (格拉纳斯)**.** 令 $F : S^n \to CC(\mathbb{R}^n)$ 是一个上半连续函数，使得 $F(X)$ 具有紧闭包。那么，存在一对对距点 $x, \tilde{x} \in S^n$，使得 $F(x) \cap F(\tilde{x}) \neq \emptyset$。

为了完整起见，本节的其余部分致力于定理 3.2的一个基本证明。

当 E 是一个向量空间且 $Y \subseteq E$ 时，用 $\operatorname{conv}(Y)$ 表示 Y 的凸包，并用 $\overline{\operatorname{conv}}(Y)$ 表示 $\operatorname{conv}(Y)$ 的闭包。以下近似结果本质上归功于 Cellina[4]（另见 [6] 的引理 8.3）。这里的证明使用了 Stone[9] 的一个非平凡定理，即每个度量空间 X 都是仿紧的。由于度量空间是豪斯多夫的，因此每一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的 X 都允许一个**重心细化**，即一个细化 $\{V_\beta\}$，使得对于每个 $x \in X$，所有的包含 x 的 V_β 都包含在某个 U_α 中。有关此拓扑背景材料的更多详细信息，请参阅 [10]。

引理 3.3. 令 X 是一个度量空间，E 是一个赋范向量空间。如果 $F : X \to CC(E)$ 是上半连续的且 $F(X)$ 具有紧闭包，则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个连续

的 $f_\varepsilon : X \to \mathrm{conv}(F(X))$ 满足以下性质：对于每个 $x \in X$，存在 $\hat{x} \in B(x,\varepsilon)$ 使得 $d(f_\varepsilon(x), F(\hat{x})) < \varepsilon$。

证明. 令 $\varepsilon > 0$。对于每个 $x \in X$，定义 $U(x) = \{y \in X \,|\, F(y) \subset B(F(x),\varepsilon)\}$。由上半连续性，每个 $U(x)$ 是开集。集合 $\{U(x) \cap B(x,\varepsilon) \,|\, x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖；它有一个重心有限的精细分 $\{V_\alpha\}$。令 ϕ_α 是从属予 $\{V_\alpha\}$ 的单位分解。对于每个 α，选择 $z_\alpha \in F(V_\alpha)$，并定义 $f_\varepsilon : X \to \mathrm{conv}(F(X))$ 为 $f_\varepsilon(x) = \sum_\alpha \phi_\alpha(x) z_\alpha$。由于那是一个局部有限的和，$f_\varepsilon$ 是连续的。

固定 $x \in X$，并用 $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ 枚举 $\{V_\alpha\}$ 中包含 x 的所有集合。由于 $\{V_\alpha\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的重心细分，存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\cup_{i=1}^k V_{\alpha_i} \subseteq U(\hat{x}) \cap B(\hat{x},\varepsilon)$。特别是，$x \in B(\hat{x},\varepsilon)$ 和 $\cup_{i=1}^k V_{\alpha_i} \subset U(\hat{x})$。由于 $z_{\alpha_i} \in F(V_{\alpha_i}) \subset B(F(\hat{x}),\varepsilon)$ 和 $B(F(\hat{x}),\varepsilon)$ 是凸的，$f_\varepsilon(x) \in B(F(\hat{x}),\varepsilon)$。因此，$d(f_\varepsilon(x), F(\hat{x})) < \varepsilon$。 □

引理 3.4. 令 $F : S^n \to CC(\mathbb{R}^n)$ 为一个上半连续函数，使得 $F(S^n)$ 具有紧闭包，并且对于每对对径点 $x, \tilde{x} \in S^n$,$F(x) \cap F(\tilde{x}) = \emptyset$。那么，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于这样的每对对径点，

$$B\big(F(B(x,\varepsilon)),\varepsilon\big) \cap B\big(F(B(\tilde{x},\varepsilon)),\varepsilon\big) = \emptyset.$$

证明. 固定对径点 $x, \tilde{x} \in S^n$，假设对于每一个 $\varepsilon > 0$，给定的交集在 x 和 $\tilde{x}$ 处是非空的。然后，存在序列 $y_k, \hat{y}_k \in S^n$ 和 $w_k \in \mathbb{R}^n$，使得 $y_k \to x$，$\hat{y}_k \to \tilde{x}$ 和 $w_k \in B(F(y_k), 1/k) \cap B(F(\hat{y}_k), 1/k)$。由于 $F(S^n)$ 具有紧闭包，可以通过选取子序列，在不失一般性的情况下假设 $w_k \to w \in \mathbb{R}^n$。由上半连续性可知，$w \in F(x) \cap F(\tilde{x})$。这产生了矛盾。现在根据勒贝格数引理得出结论。 □

定理的证明 3.2. 假设结果是假的。固定 $\varepsilon > 0$ 如引理 3.4的结论，并令 $f_\varepsilon : S^n \to \mathbb{R}^n$ 是由引理 3.3所保证的 F 的单值逼近。如果 $x, \tilde{x} \in S^n$ 是对径的，那么存在 $y \in B(x,\varepsilon)$ 和 $z \in B(\tilde{x},\varepsilon)$，使得 $d(f_\varepsilon(x), F(y)) < \varepsilon$ 和 $d(f_\varepsilon(\tilde{x}, F(z)) < \varepsilon$，即 $f_\varepsilon(x) \in B\big(F(B(x,\varepsilon)),\varepsilon\big)$ 和 $f_\varepsilon(\tilde{x}) \in B\big(F(B(\tilde{x},\varepsilon)),\varepsilon\big)$。通过选择 ε，这意味着 $f_\varepsilon(x) \neq f_\varepsilon(\tilde{x})$。这与 Borsuk–Ulam 定理矛盾。 □

4. 单纯形几何

关于 $\mathbb{R}^n$ 中单形的几个基本几何事实将被需要。$\mathbb{R}^n$ 中的 **m-维单形**是 $m+1$ 个仿射独立点的凸包，即 $v_1, \ldots, v_{m+1} \in \mathbb{R}^n$，使得集合 $\{v_1 - v_{m+1}, \ldots, v_m - v_{m+1}\}$ 线性无关。作为一个集合，

$$\Delta(v_1, \ldots, v_{m+1}) = \Big\{ \sum_{i=1}^{m+1} t_i v_i \,\Big|\, t_1, \ldots, t_{m+1} \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{m+1} t_i = 1 \Big\}.$$

Ak **维面**的 $\Delta(v_1,\ldots,v_{m+1})$ 是一个通过恰好 k 个 v_i 得到的 k 维单形。**顶点**的 $\Delta(v_1,\ldots,v_{m+1})$ 是其 0 面，且其**边缘**是其 1 面。也就是说，它的顶点是 v_i，且它的边是连接 v_i 的线段。一个单纯形是**常规**，如果它的所有边长都相同，在这种情况下，它所有的面也是正则的。**重心**的 $\Delta(v_1,\ldots,v_{m+1})$ 是 $\sum_{i=1}^{m+1} v_i/(m+1)$。

引理 4.1. *令 $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个边长为 L 的正 n 单纯形，顶点为 $v_1,\ldots,v_{n+1}$。然后，以下成立：*

(a) 每个 v_i 到 Δ 的重心 b 的距离是 $L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$。

(b) 对于任意的 $R > L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$，集合 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i,R)$ 覆盖了 Δ，而集合 $\cap_{i=1}^{n+1}\partial B(v_i,R)$ 由两点组成，分别是 p 和 q。

(c) 连接 p 和 q 的线段在 b 处与 Δ 正交相交，并且其长度为 $2\sqrt{R^2 - L^2[\frac{n}{2(n+1)}]}$。

(d) 任何与 Δ 相交并且端点位于 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i,R)$ 外部的线段至少与从 p 到 q 的线段一样长。

证明. 应用刚体运动后，可以假设 $v_i = (L/\sqrt{2})e_i$，其中 e_i 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的第 i 个标准基向量。那么，

$$b = \Big(\frac{L}{(n+1)\sqrt{2}},\ldots,\frac{L}{(n+1)\sqrt{2}}\Big),$$

并且每个顶点到 b 的距离是 $L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$，根据勾股定理。这证明了 (a)。假设 $R > L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$。令 $x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i v_i$，其中 $t_1,\ldots,t_{n+1} \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$，为 Δ 的任意一点。假设 v_j 是距离 x 最近的 Δ 的顶点，或者等价地说，对于所有 i 都有 $t_j \geq t_i$。然后，$t_j \geq \frac{1}{n+1}$，$t_i \leq \frac{1-t_j}{n}$ 对于所有 $i \neq j$，并且

$$\begin{aligned}
d(v_j,x) &= \sqrt{\Big(\frac{t_1L}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{t_jL}{\sqrt{2}} - \frac{L}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{t_{n+1}L}{\sqrt{2}}\Big)^2} \\
&= \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{t_1^2 + \cdots + (1-t_j)^2 + \cdots + t_{n+1}^2} \\
&\leq \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{n\Big(\frac{1-t_j}{n}\Big)^2 + (1-t_j)^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{\Big(\frac{n+1}{n}\Big)(1-t_j)^2} \\
&\leq \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{\Big(\frac{n+1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^2} = L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} < R.
\end{aligned}$$

因此，$\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i,R)$ 涵盖了 Δ。为了看到 $\cap_{i=1}^{n+1}\partial B(v_i,R)$ 确切地包含两个点，假设 p 是这样的一个交点，并考虑其在包含 Δ 的超平面上的正交投影 $\pi(p)$。勾股定理表明 $\pi(p)$ 与每个 v_i 等距，通过写出 $\pi(p) = v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} c_i(v_i - v_{n+1})$ 并求解 c_i，可以发现 $\pi(p) = b$。由于 b 在每个 $B(v_i,R)$ 内部，与 Δ 正交相交于 b 的直线在 $\partial B(v_i,R)$ 上恰好有两个交点。这表明 $\cap_{i=1}^{n+1}\partial B(v_i,R)$ 至多包含两个点。根据勾股定理，那条线上距离 b 为 $\sqrt{R^2 - L^2[\frac{n}{2(n+1)}]}$ 的两点与每个 v_i 的距离为

R, 并且显然连接它们的线段长度是 $2\sqrt{R^2 - L^2[\frac{n}{2(n+1)}]}$, 这完成了 (b) 和 (c) 的证明。

考虑任意一条通过 Δ 且端点位于 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i, R)$ 外部的线段 ℓ。假设 ℓ 与 Δ 在一点 x 相交，且令 v_j 是最接近 x 的 Δ 的一个顶点。如上所示，$x \in B(v_j, R)$，所以 ℓ 与 $\partial B(v_j, R)$ 恰好相交两次。设 y 和 z 是那些交点，并记 m 为连接 y 到 z 的线段的中点。然后，从 v_j 到 m 的线段在 m 处与 ℓ 正交相交。根据勾股定理，$d(v_j, x) \geq d(v_j, m)$。设 ℓ' 是与 Δ 在 x 处正交相交的线段，其端点分别为 y' 和 z'，位于 $\partial B(v_j, R)$ 上。然后，$d(a, m) \geq d(y', x)$；同时，$d(y, m) = d(m, z)$ 和 $d(y', x) = d(x, z')$。因此，

$$|\ell| \geq d(y, m) + d(m, z) \geq d(y', x) + d(x, z') = |\ell'|.$$

由于 $d(x, v_j) \leq L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$，$|\ell'| \geq 2\sqrt{R^2 - L^2[\frac{n}{2(n+1)}]}$。这证明了 (d)。 □

以下将引理 4.1推广到不规则单形。

引理 4.2. *对于 $m \geq n+1$，设 $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ 是一个边长不大于 L 的 n-单形，顶点为 $v_1, \ldots, v_{n+1}$。对于任何 $R > L\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$，集合 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i, R)$ 覆盖 Δ。此外，任何与 Δ 相交且端点位于 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i, R)$ 外的线段长度至少为 $2\sqrt{R^2 - L^2[\frac{n}{2(n+1)}]}$。*

证明. 同样的论证如引理 4.1的证明所示，$\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i, R)$ 覆盖了 Δ。设 ℓ 是任意一个与 Δ 相交的线段，比如说在点 x 处相交，并且其端点位于 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i, R)$ 之外。对于最接近顶点 v_j 的顶点 x，线段 ℓ' 垂直于 Δ，其端点位于 $\partial B(v_i, R)$ 上，满足 $|\ell| \geq |\ell'|$。由于对于所有 i 都有 $d(v_j, x) \leq d(v_i, x)$，所以 ℓ' 的端点位于 $\cup_{i=1}^{n+1} B(v_i, R)$ 外。因为 $d(v_j, x) \leq \frac{n}{2(n+1)}$，勾股定理表明 $|\ell'| \geq 2\sqrt{R^2 - L^2[\frac{n}{2(n+1)}]}$。 □

关于单形相交方式的一个结果也将被需要。

引理 4.3. *令 Δ_1 和 Δ_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中维度为正的单形，使得 $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$。然后，$\Delta_1$ 中的一个边与 Δ_2 相交或 Δ_2 中的一个边与 Δ_1 相交。*

证明. 令 Δ' 是与 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 相交的 Δ_1 或 Δ_2 中维度最小的面。不失一般性，假设 Δ' 是 Δ_1 中的一个面。为了产生矛盾，假设 Δ' 至少是二维的。令 Δ'' 是与 Δ' 相交的 Δ_2 中维度最小的一个面。那么，Δ'' 至少是二维的。令 P_1 和 P_2 分别为包含 Δ' 和 Δ'' 的 $\mathbb{R}^n$ 的最小仿射子空间。由于 $P_1 \cap P_2$ 至少是一维的，它必须包含一条直线 $\ell \subseteq P_1 \cap P_2$。根据假设，$p$ 内含于 $\Delta' \cap \Delta'' \cap \ell$，因此它必须是一条两端点位于 $\partial\Delta' \cup \partial\Delta''$ 上的线段。但是，$\partial\Delta'$ 和 $\partial\Delta''$ 的维度分别小于 Δ' 和 Δ''，这构成了矛盾。 □

5. 主定理的证明

令 $f : X \to E$ 是从度量空间 X 到赋范向量空间 E 的任意函数。定义一个集值函数 $F : X \to CC(E)$ 如下：

$$F(x) = \cap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x,\varepsilon))\big).$$

此函数捕获了在每一点上 f 的“凸本质”。由于对于所有的 $\varepsilon > 0$，都有 $f(x) \in f(B(x,\varepsilon))$，$F(x) \neq \emptyset$。作为闭合和凸集的交集，每个 $F(x)$ 实际上是闭合且凸的。

引理 5.1. 对于任何 $f : X \to E$，上述定义的函数 F 是上半连续的。

证明. 假设 $x_k \in X$，$y_k \in F(x_k)$，$x_k \to x$ 和 $y_k \to y$。令 $\varepsilon > 0$，并取 $K \in \mathbb{N}$ 使得对于所有的 $k \geq K$ 均有 $x_k \in B(x,\varepsilon)$。对于这样的 k，

$$y_k \in \overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x_k, \varepsilon - d(x_k,x)))\big),$$

这意味着 $y_k \in \overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x,\varepsilon))\big)$ 并且，因此，$y \in \overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x,\varepsilon))\big)$。由于对 $\varepsilon > 0$ 的选择是任意的，$y \in F(x)$。 □

引理 5.2. 如果 $f : X \to \mathbb{R}^n$ 是局部有界的，则 $F(x) = \mathrm{conv}\big(\cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}\big)$。

证明. 假设 $y \in \mathrm{conv}\big(\cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}\big)$。根据 Carathéodory 定理 [8]，存在 $v_1,\ldots,v_{n+1} \in \cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}$ 使得 $y \in \mathrm{conv}\{v_1,\ldots,v_{n+1}\}$。对于每个 $\varepsilon > 0$，$v_i \in \overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x,\varepsilon))\big)$，因此 $\mathrm{conv}\{v_1,\ldots,v_{n+1}\} \subseteq \overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x,\varepsilon))\big)$。由于 $\varepsilon > 0$ 的选择是任意的，$\mathrm{conv}\{v_1,\ldots,v_{n+1}\} \subseteq F(x)$。所以，$y \in F(x)$。

反之，假设 $y \in F(x)$。那么，对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $y \in \overline{\mathrm{conv}}\big(f(B(x,1/m))\big)$。对于每个 $k,m \in \mathbb{N}$，选择 $y_k^m \in \mathrm{conv}\big(f(B(x,1/m))\big)$ 使得 $d(y_k^m, y) < \frac{1}{k+m}$。由 Carathéodory 定理，存在 $v_{k,1}^m,\ldots,v_{k,n+1}^m \in f(B(x,1/m))$，使得 $y_k^m \in \mathrm{conv}\{v_{k,1}^m,\ldots,v_{k,n+1}^m\}$。由于 f 是局部有界的，可以通过选取子序列，不失一般性地假设当 $m \to \infty$ 时，$v_{k,i}^m \to v_{k,i}$。令 $\varepsilon > 0$。由于 $f(B(x,1/m))$ 形成一个递减的集合序列，对于所有足够大的 m，$v_{k,i}^m \in f(B(x,\varepsilon))$。因此，$v_{k,i} \in \overline{f(B(x,\varepsilon))}$。由于 $\varepsilon > 0$ 的选择是任意的，$v_{k,i} \in \cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}$。因此，对于每个 k，

$$\begin{aligned}\Big\{\lim_{m\to\infty} z_m \,\Big|\, z_m \in \mathrm{conv}\{v_{k,1}^m,\ldots,v_{k,n+1}^m\}\Big\} &= \mathrm{conv}\{v_{k,1},\ldots,v_{k,n+1}\}\\ &\subseteq \mathrm{conv}\big(\cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}\big).\end{aligned}$$

由于 $y_k^m \in \mathrm{conv}\{v_{k,1}^m,\ldots,v_{k,n+1}^m\}$ 对于每个 m，

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k^m \in \overline{\mathrm{conv}}\big(\cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}\big) = \mathrm{conv}\big(\cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}\big),$$

其中最后一个等式来自于这样一个事实，即由于 f 局部有界，$\mathrm{conv}\big(\cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}\big)$ 是紧致的。 □

现在可以证明主定理了。

定理的证明 1.1. 设 $f : S^n_r \to \mathbb{R}^n$ 是任意函数。如果 $f(S^n_r)$ 没有紧闭包，则 f 是无界的。在这种情况下，$\mathrm{dist}(f) = \infty$，结果成立。如果 $f(S^n_r)$ 具有紧闭包，则根据引理 5.2，

$$F(x) = \mathrm{conv}\big(\cap_{\varepsilon>0} \overline{f(B(x,\varepsilon))}\big).$$

由引理 5.1，F 是上半连续的，因此，根据定理 3.2，存在对跖点 $x, \tilde{x} \in S^n_k$ 使得 $F(x) \cap F(\tilde{x}) \neq \emptyset$。由 Carathéodory 定理，存在 $v_1, \ldots, v_k \in \cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(x,\varepsilon))}$ 和 $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m \in \cap_{\varepsilon>0}\overline{f(B(\tilde{x},\varepsilon))}$，使得 $\mathrm{conv}\{v_1, \ldots, v_k\} \cap \mathrm{conv}\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m\} \neq \emptyset$，其中 $k, m \le n+1$。由引理 4.3可知，不失一般性地假设连接 v_1 到 v_2 的线段与 $\mathrm{conv}\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m\}$ 相交。由于所需的失真界限在 v_1 或 v_2 中有一个位于 $\mathrm{conv}\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m\}$ 内部时成立，可以进一步假设，在不失一般性的情况下，连接 v_1 到 v_2 的线段与 $\mathrm{conv}\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{m-1}\}$ 相交。

对于每个 $\varepsilon > 0$，都有 $d(v_1, v_2) < \mathrm{dist}(f) + 2\varepsilon$，$d(\hat{v}_i, \hat{v}_j) < \mathrm{dist}(f) + 2\varepsilon$ 和 $d(v_i, \hat{v}_j) > \pi r - \mathrm{dist}(f) - 2\varepsilon$。因此，$d(v_1, v_2) \le \mathrm{dist}(f)$，$d(\hat{v}_i, \hat{v}_j) \le \mathrm{dist}(f)$ 和 $d(v_i, \hat{v}_j) \ge \pi r - \mathrm{dist}(f)$。由引理 4.2，

$$2\sqrt{\pi^2 r^2 - [\mathrm{dist}(f)]^2\big(\frac{n-1}{2n}\big)} \le d(v_1, v_2) \le \mathrm{dist}(f).$$

通过求解 $\mathrm{dist}(f)$ 得出结果。 □

References

[1] Karol Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae **20** (1933), 177–190 (German).

[2] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1911), 97–115 (German).

[3] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2001, xiv+415 pp.

[4] Arrigo Cellina, *A theorem on the approximation of compact multivalued mappings*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **47** (1969), 429–433.

[5] Andrzej Granas, *Theorem on antipodes and theorems on fixed points for a certain class of multi-valued mappings in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **7** (1959), 271–275.

[6] Andrzej Granas and James Dugundji, *Fixed point theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003, xvi+690 pp.

[7] Shizuo Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457–459.

[8] Ernst Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 128–175 (German).

[9] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977–982.

[10] Stephen Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970, xxi+369 pp.

Department of Mathematics and Statistics, University of Southern Maine, 66 Falmouth Street, Portland, ME 04103

Email address: `james.dibble@maine.edu`