高能碰撞中的快速性谱和纵向核抑制来自非加性统计

Trambak Bhattacharyya,^{1,*} Maciej Rybczyński,^{1,†} and Zbigniew Włodarczyk^{1,‡}

¹Institute of Physics, Jan Kochanowski University, Kielce 25-406, Poland

我们研究了通过快速性分布的缩放比定义的纵向核抑制因子。为了研究这个实验可观测量,我们描述了三种涉及数值和分析计算的方法。我们首先通过使用 EPOS、FTFP_{BERT}和 HIJING 进行模型研究来解决这个问题,并注意到虽然 EPOS 显示出该比率随快速性增加而减少的趋势,但后两种模型计算显示该比率的增量。分析方法包括第一种,从 Tsallis 统计获得的准指数分布,以及第二种,在弛豫时间近似下的非加性 Boltzmann 传输方程。我们注意到我们的分析结果满意地描述了 NA61 实验数据 (对于 $\sqrt{s_{NN}}$ =6.3, 7.6, 8.8, 12.3 和 17.3 GeV)中的负 π 介子。

I. 介绍和数值模型的结果

粒子谱是研究高能碰撞动力学的重要工具。已经多次证明,在各种碰撞能量下,横动量分布和快度谱遵循 q-指数准指数和 q-高斯分布 [1, 2]。这种分布是由于 C. Tsallis 提出的广义熵的最大化(第一和第二矩约束)而出 现的 [3]。这种熵描述了由于波动、长程相关、异常扩散等原因而具有幂律平稳态的系统。

不仅光谱,而且它们的比率也是研究高能碰撞动力学的重要工具。例如,核抑制因子被定义为重离子碰撞 光谱与质子-质子碰撞光谱的比例(经过缩放),这有助于我们确定重离子碰撞是否仅仅是质子-质子碰撞的简单 叠加。这样的比率提供了关于横向上核停止能力的信息。

在纵向方向上,核停止意味着快速性分布向中快速性偏移。然而,这样的分布具有很强的碰撞能量依赖性。 例如,在AGS能量下,净质子快速性谱有一个峰值[4-6],在SPS能量下存在一个凹陷[7],并且在RHIC上几 乎是平坦的,但在束流快速性附近有一些小峰[8]。这种行为表明,随着能量的增加,入射核并没有失去它们的 能量,而是穿过了靶标。

在本文中,我们研究了纵向平面中的一个压制/修改因子,该因子是通过以下比率实验获得的:

$$R_{dN/dy} = \frac{\frac{dN^{\rm Pb-Pb}}{dy}}{\langle N_{\rm coll} \rangle \frac{dN^{\rm Pp}}{dy}},\tag{1}$$

其中 dN/dy 是快速性分布, (Ncoll) 是两个重离子 (在这种情况下为 Pb) 碰撞时平均的核子-核子二元碰撞次数。

从定性上讲,我们预期这个比率会在中速附近出现下降,并且随着前进/后退速度的增加而增加,这是由于 夸克胶子等离子体介质的低密度导致当 y 增加时。为了验证这一论点,我们在 Pb-Pb 和 p+p 碰撞在 $\sqrt{s_{NN}}$ =7.6 GeV 和 17.3 GeV 的情况下,借助三种模型进行了数值实验,即 EPOS、FTFP_{BERT} 和 HIJING 模型。EPOS 模 型遵循基于部分子和弦的一致量子多重散射方法,在计算截面和粒子产生时考虑了能量守恒 [9]。FTFP_{BERT} 是 一个用于 Geant4 的强子物理模型,提供了碰撞和探测器物理学中强子簇射的全面模拟,结合了 Fritiof (FTF) 弦模型来处理高能相互作用 (>4-5 GeV),以及 Bertini 风格的核内级联 (BERT)模型来处理低能相互作用 (<5 GeV) [10]。HIJING 是一个蒙特卡洛事件生成器,结合了微扰 QCD 过程和软相互作用 [11]。

 $^{{}^*}Electronic \ address: \ {\tt trambak.bhattacharyya@ujk.edu.pl}$

 $^{^{\}dagger} Electronic \ address: \ \texttt{maciej.rybczynski@ujk.edu.pl}$

[‡]Electronic address: **zbigniew.wlodarczyk@ujk.edu.pl**

模拟结果如图 1-5所示。我们观察到,虽然 FTFP_{BERT} 和 HIJING 的结果符合我们的预期, EPOS 显示的行为却不同,并且即使在研究现有的实验数据时也未发现这种行为。



图 1: 核抑制因子的 π^- 在 $\sqrt{s}=7.6$ GeV 时由 EPOS 计算得出。

dd

 $\left. dN/dy \right|_{PbPb} / \langle N_{coll} \rangle / dN/dy \right|$



图 3: 纵向核抑制因子 π^- 在 $\sqrt{s}=17.3$ GeV 时由 EPOS 计算得出。



图 2: 核抑制因子的 π^- 在 $\sqrt{s}=7.6$ GeV 时由 FTFP_{BERT} 计算 得出。



图 4: 纵向核抑制因子 π^- 在 $\sqrt{s}=17.3$ GeV 时由 FTFP_{BERT} 计算得出。

考虑到这些观察和讨论,我们借助非加性统计来分析纵向核抑制(*R*_{dN/dy})。这项工作提出了两个不同的分析模型。第一个模型涉及描述粒子谱的准指数分布的现象学非加性分布。通过积分出横向部分,可以获得快速度谱。另一种方法涉及介质内的粒子传输。我们考虑一个广义的玻尔兹曼传输方程,它提供了一个准指数稳态,并基于 Ref.[12] 中提出的方法使用弛豫时间近似来求解它。论文的其余部分将致力于描述这些模型,用这些模型分析实验数据以及讨论。



图 5: 纵向核抑制因子 π^- 在 $\sqrt{s}=17.3$ GeV 下由 HIJING 计算得到。

II. dN/dy 单粒子分布的比率

高能碰撞中的实验数据使用以下从非加性(NA)统计得出的准指数单粒子分布来描述:

$$f_{\rm sp} = \left(1 + (q-1)\frac{E-\mu}{T}\right)^{-\frac{q}{q-1}},\tag{2}$$

其中 q 是熵参数, T 是温度, μ 是化学势, $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ 是质量为 m 和 3-动量为 $p \equiv |\vec{p}|$ 的粒子的单粒子能量。 这个单粒子分布用于描述横向动量(p_T) 谱如下:

$$\frac{dN}{dp_{\rm T}dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ f_{\rm sp}
\Rightarrow \frac{dN}{dy} = \int \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ f_{\rm sp} \ dp_{\rm T}.$$
(3)

在上述方程中,我们将能量和纵向动量 (p_z) 用横向质量 $m_T = \sqrt{p_T^2 + m^2}$ 和快度 y 参数化为: $E = m_T \cosh(y); p_z = m_T \sinh(y)$ 。将等式 (2) 代入等式 (3),我们得到(我们设定 $\mu = 0$),

$$\frac{dN}{dy} = \int \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ \left(1 + (q-1)\frac{m_{\rm T} \cosh(y)}{T}\right)^{-\frac{q}{q-1}} \ dp_{\rm T}.$$
(4)

现在,我们使用幂律函数的 Mellin-Barnes 轮廓积分表示形式(由 [13] 给出),解析计算等式(4)的闭合形式,

$$\frac{1}{(X+Y)^{\lambda}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{\Gamma(-z)\Gamma(z+\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \frac{Y^z}{X^{\lambda+z}} dz,$$
(5)

其中 $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ & $\operatorname{Re}(\epsilon) \in (-\operatorname{Re}(\lambda), 0)$,这是此处的情况,因为 $\lambda = q/(q-1) > 0 \Leftrightarrow q > 1$ 。使用积分表示和缩 放变量 $k = p_T/m$,方程 (4) 被转化为以下形式:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{gV\cosh(y)\ m^3}{8\pi^3 i} \left(\frac{T\operatorname{sech}(y)}{m(q-1)}\right)^{\frac{q}{q-1}} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} dz \frac{\Gamma(-z)\ \Gamma\left(z+\frac{q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)} \left(\frac{T\operatorname{sech}(y)}{m(q-1)}\right)^z \int_0^\infty k(k^2+1)^{\frac{1}{2}-\frac{z}{2}-\frac{q}{2(q-1)}} dk, (6)$$

其中我们使用了这些替换: $X = m(q-1)\cosh(y)\sqrt{1+k^2}/T$ 和 Y = 1。对 k 进行积分,并将围道按逆时针方向闭合(以便使 $\Gamma(-z)$ 的极点贡献到围道积分),我们得到以下结果:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{gm^2TV}{4\pi^2(3-2q)} \left(\frac{T\mathrm{sech}(y)}{m(q-1)}\right)^{\frac{1}{q-1}} {}_2F_1\left(\frac{3-2q}{q-1}, \frac{q}{q-1}; \frac{2-q}{q-1}; \frac{T\mathrm{sech}(y)}{m-mq}\right),\tag{7}$$

其中,₂F₁ 是超几何函数 [14]。

根据公式(7), dN/dy比率可以写成:

$$R_{dN/dy}^{(\text{ph})} = \frac{T_2 V_2 (3 - 2q_1)}{N_{\text{coll}} T_1 V_1 (3 - 2q_2)} \left\{ \frac{T_2}{(q_2 - 1)} \right\}^{\frac{1}{q_2 - 1}} \left\{ \frac{T_1}{(q_1 - 1)} \right\}^{\frac{1}{1 - q_1}} \frac{{}_2 F_1 \left(\frac{3 - 2q_2}{q_2 - 1}, \frac{q_2}{q_2 - 1}; \frac{2 - q_2}{q_2 - 1}; \frac{T_{2} \text{sech}(y)}{m - mq_2} \right)}{{}_2 F_1 \left(\frac{3 - 2q_1}{q_1 - 1}, \frac{q_1}{q_1 - 1}; \frac{2 - q_1}{m - mq_1}; \frac{T_{1} \text{sech}(y)}{m - mq_1} \right)}.$$
(8)

在图 6中,我们将方程 (8) 与从实验数据 [15,17] 获得的比率的实验值进行比较。尽管方程 (8) 复现了在较高快速性下比率增加的趋势,但该模型并未明确涉及由于相互作用导致初始分布演化的因素。作为一个起点,我们可以使用非加性玻尔兹曼输运方程 (NABTE) 的弛豫时间近似来研究这种演化。



图 6: 比较 Pb-Pb 和 p-p 碰撞中 dN/dy 的比率 ($\sqrt{s} = 6.3$ GeV) 对于 π^- 粒子 (m=0.139GeV) 与 Eq. (8) 的以下参数值: $q_1=1.12$, $q_2=1.10$, $T_1=0.0863$ GeV, $T_2=0.101$ GeV, $V_1=75.9$ GeV⁻³, $V_2=10^4$ GeV⁻³。我们已经将从 [18] 计算出的 $N_{coll}=808$ 。

III. dN/dy 非加性玻尔兹曼输运方程的比率

A. NABTE 在弛豫时间近似中

如果在时间 t = 0,所有的外部力被关闭并且梯度被取消,分布 f 的非加性玻尔兹曼传输方程在弛豫时间近 似下由下列方程给出(方程左侧的幂指数 q 代表熵参数),

$$\frac{\partial f^q}{\partial t} = -\frac{(f - f_{eq})}{\tau}
\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{(f^{2-q} - f_{eq}f^{1-q})}{q\tau},$$
(9)

$$\int \frac{df}{(f^{2-q} - f_{eq}f^{1-q})} = \mathcal{K} - \theta$$

$$\frac{1}{q-1} \int \frac{dw}{\left(1 - f_{eq}w^{-\frac{1}{q-1}}\right)} = \mathcal{K} - \theta,$$
where $w \equiv f^{q-1}, \quad \theta = \frac{t}{q\tau}.$
(10)

$$\frac{1}{q-1} \int dw \left(1 + f_{eq} w^{-\frac{1}{q-1}} + f_{eq}^2 w^{-\frac{2}{q-1}} + \ldots \right) = \mathcal{K} - \theta \quad \left(\left| f_{eq} w^{-\frac{1}{q-1}} \right| \equiv \left| \frac{f_{eq}}{f} \right| < 1 \right) \\
\Rightarrow \frac{f^{q-1}}{q-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1)_s (1-q)_s}{s! (2-q)_s} \left(\frac{f_{eq}}{f} \right)^s = \mathcal{K} - \theta \\
\Rightarrow \frac{f^{q-1}}{q-1} {}_2 F_1 \left(1, 1-q; 2-q; \frac{f_{eq}}{f} \right) = \mathcal{K} - \theta,$$
(11)

其中, 第二行的 `(.)_s' 是由以下给出的上升 Pochhamer 符号,

$$(a)_{s} = \begin{cases} 1 & s = 0\\ a(a+1)\dots(a+s-1) & \forall s > 0, \end{cases}$$
(12)

而 2F1 是超几何函数。积分常数由以下给出,

$$\mathcal{K} = \frac{f_{\rm in}^{q-1}}{q-1} \, _2F_1\left(1, 1-q; 2-q; \frac{f_{\rm eq}}{f_{\rm in}}\right). \tag{13}$$

因此,在我们求解方程 (11) 对于 *f* 时,可以得到非广延玻尔兹曼输运方程在弛豫时间近似下的解。此解给出了 经过等离子体后修改的分布。尽管可以通过数值方法找到方程 (11) 的解,但我们可以使用方程 (11) 第二行给出 的超几何函数的级数展开来计算近似的解析解。方程 (11) 的零阶解 (即。对于 *s* = 0)可以从以下方程中找到,

$$\Psi_0 = f^{q-1} - (q-1) \left(\mathcal{K} - \theta \right) = 0$$

$$\Rightarrow f_0 = \left[(q-1) \left(\mathcal{K} - \theta \right) \right]^{\frac{1}{q-1}}.$$
(14)

在参考文献 [12] 中开发了一种寻找高阶解的微扰方案。然而,在这项工作中我们仅考虑零阶解。

B. dN/dy 来自 NABTE 的比例

分布 fo 与洛伦兹不变谱以以下方式相关:

$$E\frac{dN}{d^3p} = \frac{gVE}{(2\pi)^3} f_0.$$
 (15)

参数化 E 和 pz 关于 y 和 mT, 可以得到横动量谱。

$$\frac{dN}{dp_{\rm T}dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ f_0 \Rightarrow \frac{dN}{dy} = \int \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ f_0 \ dp_{\rm T}$$
(16)

通过选择一个初始分布和一个平衡分布,例如用以下函数表示,

$$f_{\rm in} = \left(1 + (q_{\rm in} - 1)\frac{E - \mu_{\rm in}}{T_{\rm in}}\right)^{-\frac{q_{\rm in}}{q_{\rm in} - 1}}; \quad f_{\rm eq} = \left(1 + (q - 1)\frac{E - \mu}{T}\right)^{-\frac{q}{q - 1}},\tag{17}$$

方程 (14) 中的解 f_0 可以获得。因此, dN/dy 比率可以写为,

$$\frac{\int p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ f_0 \ dp_{\rm T}}{\int p_{\rm T} \ m_{\rm T} \cosh y \ f_{\rm in} \ dp_{\rm T}}.$$
(18)

我们将上述比率与实验观察到的 R_{dN/dy} 进行比较。

IV. 结果与讨论

在图 7-11中,我们将我们的理论模型(公式 18)与实验数据 [15–17] 进行了比较,该实验数据涉及质子-质子和中心 [22] 铅-铅碰撞中产生的负 π 介子,在质心能量 $\sqrt{s_{NN}} = 6.3$, 7.6, 8.8, 12.3 和 17.3 GeV 时。在这张图中,我们从 GLISSANDO 的 [18] 和 $\langle N_{coll} \rangle = 808$, 819, 825, 840, 900 分别计算了质量中心能量按递增顺序的二元碰撞平均数。我们观察到,当参数值在允许范围内时(例如,q < 54/3 对于 3 动量维度),模型能够很好地符合实验数据点。我们注意到系统从一个初始 q 值开始演化,然后松弛到较低但非单位值的 q。这表明在介质中松弛的 π 介子系统没有接近玻尔兹曼-吉布斯极限。因此,它们的稳态分布仍然由幂律分布给出。这一观察结果与最近的一项研究相符,该研究表明 π 介子在重离子碰撞产生的系统内执行 Lévy 走动 [19]。Lévy 走动的特点是具有长尾随机走动,这表明系统内的异常扩散导致了幂律稳态 [20, 21]。这也证明了我们选择非可加玻尔兹曼输运方程的合理性,该方程具有幂律稳态。我们发现参数 t/τ 的值,即脱耦时间与弛豫时间的比值,在 1 附近波动,这表明碰撞早期产生的 π 介子有可能弛豫到一个稳定状态。我们还注意到温度值下降,除了在 $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$ GeV 图中有一个局部最大值出现在大约 $y \approx 0$ 处。

V. 总结、结论与展望

总结而言,在这项工作中,我们研究了能量范围在 $\sqrt{s}=6.3$ GeV 到 17.3GeV 之间的纵向核抑制因子 $R_{dN/dy}$ 。 我们提出了两个数学模型。第一个模型基于已被用来描述粒子横向动量谱的 Tsallis 分布现象学方法。在这个方 法中,我们通过超几何函数推导出了一个关于快速性谱的封闭解析公式。据我们所知,这一解析公式在文献中 首次被推导出来。我们定性地预期该比率会随着快速性的增加而增大。虽然使用 FTFP_{BERT} 和 HIJING 进行的 模拟显示出这样的趋势,并且也在实验数据中观察到这种情况,但 EPOS 的结果有所不同。我们认为这种差异 令人好奇,值得在未来进行研究。尽管现象学方法可能成功地跟踪了实验数据的趋势,但我们还提出了一种基 于输运方程的方法,涉及非加性 Boltzmann 输运方程在弛豫时间近似下的情况。该方程产生一个幂律稳定态, 这是异常扩散普遍存在系统的一个特征。在这项工作中,我们考虑了一个作者提出的微扰方案所得到的零阶解。 然而,研究更高阶解(附录中给出)如何影响参数值将是有趣的。尽管介质效应通过弛豫时间参数被包含在内, 但在未来的工作中应该考虑一个更严谨的方法,包括相互作用矩阵元和源项来解释不同的 π 介子产生来源。



图 7: Pb-Pb 和 p-p 碰撞中 dN/dy比率 的比较 (\sqrt{s} = 6.3GeV) 对于 π^- 粒子 (m=0.139GeV),使用方程 (18),参数值如 下 : q_{in} =1.04,q=1.025, T_{in} =0.08 GeV,T=0.051 GeV, t/τ =1.06, μ_{in} =0.12 GeV, μ =0.092GeV。我们已 经把 N_{coll} =808。



图 9: Pb-Pb 和 p-p 碰撞中 dN/dy 比率的比较 ($\sqrt{s} = 8.8$ GeV) 对于 π^- 粒子 (m=0.139GeV), 使用以下参数值与公式 (18): $q_{in}=1.04$, q=1.01, $T_{in}=0.103$ GeV, T=0.08GeV, $t/\tau=1.12$, $\mu_{in}=0.2$ GeV, $\mu=0.1$ GeV。



图 8: Pb-Pb 和 p-p 碰撞中 dN/dy 比率的比较 ($\sqrt{s} = 7.6 \text{GeV}$)对于 π^- 粒子(m=0.139 GeV),参数值如 下: $q_{\text{in}}=1.012$, q=1.009, $T_{\text{in}}=0.11 \text{GeV}$, T=0.097 GeV, $t/\tau=0.824$, $\mu_{\text{in}}=0.12 \text{GeV}$, $\mu=0.064 \text{GeV}$ 的 Eq.(18)。



图 10: 比较在 Pb-Pb 和 p-p 碰撞中 dN/dy 的比例 ($\sqrt{s} =$ 12.3GeV)对于 π^- 粒子(m=0.139 GeV),使用 Eq.(18) 的 以下参数值: $q_{\rm in}=1.05,q=1.01,T_{\rm in}=0.108$ GeV,T=0.08 GeV, $t/\tau=1.04,\mu_{\rm in}=0.18$ GeV, $\mu=0.09$ GeV。



图 11: Pb-Pb 和 p-p 碰撞中 dN/dy 比率的比较 ($\sqrt{s} = 17.3$ GeV) 对于 π^- 粒子 (m=0.139GeV), 使用方程 (18), 参数值如下: $q_{in}=1.06, q=1.01, T_{in}=0.08$ GeV,T=0.09GeV, $t/\tau=0.839, \mu_{in}=0.16$ GeV, $\mu=0.04$ GeV。

VI. 附录: 高阶解法

一阶方程的解,我们用 $f_1(t)$ 表示,由下式给出,

$$\Psi_1 = f^{q-1} + \left(\frac{1-q}{2-q}\right) f_{eq} f^{q-2} - (q-1) \left(\mathcal{K} - \theta\right) = 0.$$
(19)

以下是关于如何根据参考文献获得非广延 Boltzmann 输运方程在弛豫时间近似下的一个近似解析一阶解的大致 概述。[12] 一阶方程的解可以以下面这种方式写成零阶解的一个微小增量,

$$f_1 = f_0 + \epsilon_1, \quad |\epsilon_1| << f_0.$$
 (20)

随后,将公式 (20) 代入到公式 (19) 中,并按 ϵ_1 展开至一阶(因为 ϵ_1 是一个很小的量)。得到的方程求解了 ϵ_1 ,得到了用已知解析形式的 f_0 表示的 f_1 ,这个解析形式已经在公式 (14) 中给出。这给出了求解一阶方程的以下表达式,

$$f_1 \approx f_0 + \frac{f_0}{f_0 + f_{eq}} \left[\frac{f_{eq}}{2 - q} + \frac{f_0}{1 - q} + f_0^{2 - q} \left(\mathcal{K} - \theta \right) \right].$$
(21)

根据公式(20),一阶和高阶解可以通过下列递归表示,

$$f_i = f_{i-1} + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, ...,$$
 (22)

其中 $\epsilon_i^{\rm s}$ 由以下方程计算得出,

$$\epsilon_{i} = \frac{f_{i-1}}{\sum_{r=0}^{i} f_{eq}^{r} f_{i-1}^{i-r}} \left(f_{i-1}^{i+1-q} (\mathcal{K} - \theta) + \sum_{r=0}^{i} \frac{f_{eq}^{r} f_{i-1}^{i-r}}{r+1-q} \right).$$
(23)

TB 感谢欧盟 HORIZON EUROPE 计划通过 ERA Fellowship Grant Agreement number 101130816 提供的资金支持。在准备本出版物时,我们使用了卡耶奇扬科沃斯基大学精确科学与自然科学学院计算和计算机建模中心的资源,该中心由波兰教育部在 "Regional Excellence Initiative" 计划下的项目 RID/SP/00015/2024/01 资金进行现代化升级。

- [1] M. Rybczyński and Z. Włodarczyk, Eur. Phys. Jour. C 74, 2785 (2014).
- [2] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman, Phys. Rev. D 91, 054025 (2015).
- [3] C. Tsallis, J. Stat. Phys. 52, 479 (1988).
- [4] E917 Collaboration, B. B. Back et al., Phys. Rev. Lett. 86, 1970 (2001).
- [5] E802 Collaboration, L. Ahle et al., Phys. Rev. C 60, 064901 (1999).
- [6] E877 Collaboration, J. Barette et al., Phys. Rev. C ${\bf 62},\,024901$ (2000).
- [7] NA49 Collaboration, H. Appelshauser et al., Phys. Rev. Lett. 82, 2471 (1999).
- [8] BRAHMS Collaboration, I. G. Bearden et al., Phys. Rev. Lett. 39, 102301 (2004).
- [9] K. Werner, F. M. Liu and T. Pierog, Phys. Rev. C 74, 044902 (2006).
- [10] Geant4 Collaboration, Physics List Guide: FTFP_BERT, https://geant4.web.cern.ch/documentation/dev/plg_html/ PhysicsListGuide/reference_PL/FTFP_BERT.html, (accessed: March 12, 2025).
- [11] M. Gyulassy and X. N. Wang, Computer Physics Communications 83, 307 (1994).
- [12] T. Bhattacharyya, Physica A 624, 128910 (2023).
- [13] T. Bhattacharyya, J. Cleymans, and S. Mogliacci, Phys. Rev. D 94, 094026 (2016).
- [14] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover (1972).
- [15] NA61/SHINE Collaboration, A. Aduszkiewicz et al., Eur. Phys. Jour. C 77, 671 (2017).
- $\left[16\right]$ NA49 Collaboration, S. V. Afanasiev et al., Phys. Rev. C $66,\,054902$ (2002).
- [17] NA49 Collaboration, C. Alt et al., Phys. Rev. C 77, 024903 (2008).
- [18] P. Bożek, W. Broniowski, M. Rybczyński, and G. Stefanek, Comput. Phys. Commun. 245, 106850 (2019).
- [19] D. Kincses, M. Nagy, and M. Csanád, Communications Physics, 8, 55 (2025).
- [20] T. Osada and G. Wilk, Phys. Rev. C 77, 044903 (2009).
- [21] T. Bhattacharyya, E. Megias, and A. Deppman, Phys. Lett. B 856, 138907 (2024).
- [22] 中心性为 0-7.2%对于 $\sqrt{s_{NN}}$ = 6.3-12.3 GeV,以及 0-5% 对于 $\sqrt{s_{NN}}$ = 17.3 GeV